Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 533.6.013.42

ОБ УСЛОВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАГРАНЖЕВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

М. А. Ильгамов

(Казань)

В лагранжевых координатах приводятся два варианта кинематических и динамических условий на поверхности контакта упругой оболочки и идеальной жидкости для безотрывного и непроницаемого движения. Обсуждение особенностей этих вариантов проводится для плоской задачи, где удается более полно учитывать взаимное скольжение вдоль поверхности контакта. Далее дается обобщение одного из вариантов записи условий для пространственной задачи, в которой взаимное скольжение мало. Толщина оболочки считается малой по сравнению с ее характерными размерами, в связи с чем поверхность контакта отождествляется со срединной поверхностью стенки.

При изучении взаимодействия упругого тела с жидкостью в некоторых случаях наиболее удобной может оказаться формулировка задачи для обеих сред в лагранжевых переменных. К ним относятся, в частности, случаи, в которых движение жидкости и оболочки происходит преимущественно по нормали к недеформированной поверхности и, следовательно, взаимное скольжение относительно мало. Важным примером служит задача, описывающая процесс гидродинамической штамповки тонкостенных изделий из листовых заготовок.

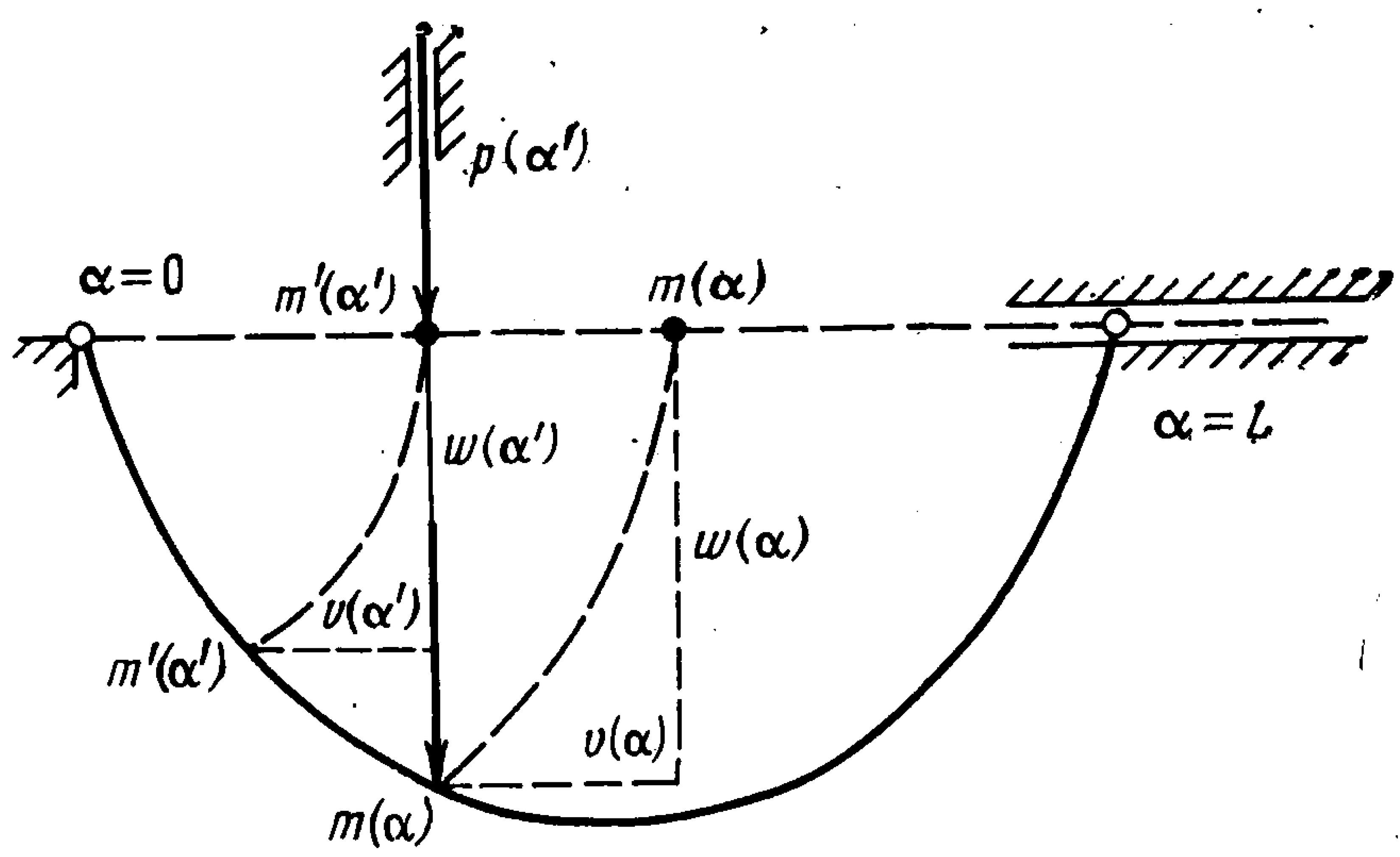
1. Специфика единого лагранжевого представления. Для иллюстрации способов записи условий стыкования рассматривается сильный изгиб балки постоянной во времени силой p с фиксированной линией действия в пространстве (фиг. 1). Пусть это будет, например, вес стержня свободно перемещающегося в жестких направляющих. Трение между стержнем и балкой отсутствует. При изгибе точка m балки с лагранжевой координатой α оказывается в некоторой точке пространства под силой p, находящейся до деформации над точкой m' с координатой α'. Последняя займет новое положение в пространстве, однако сохранит численно то же значение координаты α'. Сила $p(\alpha')$ также будет иметь лагранжеву координату α'.

Сила по нормали к изогнутой оси равна $p(\alpha') / \cos\beta(\alpha)$, где β — угол между ортами по нормали в точке $m(\alpha)$ до и после деформации. Известно [1], что $\cos\beta(\alpha) = 1 + \partial v(\alpha) / \partial\alpha$. Здесь и далее через $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ и $v(\alpha')$, $w(\alpha')$ обозначаются проекции перемещения точек $m(\alpha)$ и $m'(\alpha')$ на оси до деформации. Уравнения изгиба при распределенной системе сил $p(\alpha')$ будут иметь вид

$$L_i^*[v(\alpha), w(\alpha)] = \delta_{3i}\left[1 + \frac{\partial v(\alpha)}{\partial\alpha}\right]^{-1} p(\alpha') \quad (i = 2, 3) \tag{1.1}$$

где L_2^*, L_3^* — нелинейные дифференциальные операторы уравнений сильного изгиба, полученных проектированием всех сил на оси после деформации, δ_{3i} — символ Кронекера.

Поведение рассматриваемой системы обладает основными свойствами взаимодействия упругого тела и жидкости: величина давления и проскальзывание между средами зависят от изгиба балки. Близкие вопросы, в частности процедура вычисления работы, совершаемой «блуждающими» вдоль балки силами, обсуждались в работе [2].



Фиг. 1

В правой части (1.1) $p(\alpha')$ приближенно выразим через давление в точке $m(\alpha)$

$$p(\alpha') \approx p(\alpha) + (\alpha' - \alpha)\, \partial p(\alpha) / \partial\alpha \tag{1.2}$$

Из фиг. 1 следует $\alpha - \alpha' = -v(\alpha)$, поэтому (1.1) приводится к виду

$$L_i^*[v(\alpha),\ w(\alpha)] = \delta_{3i}\left[1 + \frac{\partial v(\alpha)}{\partial\alpha}\right]^{-1}\left[p(\alpha) + v(\alpha)\frac{\partial p(\alpha)}{\partial\alpha}\right] \quad (i = 2, 3) \tag{1.3}$$

Выражение (1.3) остается справедливым до тех пор, пока наибольшее значение α удовлетворяет условию $\alpha < L + v(L)$, где L — длина балки. При $\alpha \geqslant L + v(L)$ величину в последней скобке в правой части (1.3) следует полагать равной нулю (в рассматриваемом примере $v(L) < 0$), что соответствует сходу части сил с балки в результате перемещения ее конца $\alpha = L$.

Граничные условия

$$\begin{gathered} v(\alpha) = w(\alpha) = M(\alpha) = 0 \quad (\alpha = 0) \\ w(\alpha) = M(\alpha) = 0,\ N(\alpha)\cos\beta(\alpha) - Q(\alpha)\sin\beta(\alpha) = 0 \quad (\alpha = L) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где N, M, Q — осевое усилие, изгибающий момент и перерезывающая сила.

В случае, когда нагрузка $p(\alpha)$ быстро изменяющаяся, а перемещение балки изменяется плавно (например при сосредоточенной силе), вместо (1.3) необходимо использовать уравнения в другой форме. Связь между компонентами перемещений точек $m(\alpha)$ и $m'(\alpha')$ с точностью до величин второго порядка может быть представлена в виде

$$v(\alpha) = v(\alpha') + (\alpha - \alpha')\frac{\partial v(\alpha')}{\partial \alpha'}, \quad w(\alpha) = w(\alpha') + (\alpha - \alpha')\frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'} \tag{1.5}$$

Из фиг. 1 следует $-v(\alpha') = mm' \cos\beta(\alpha')$. Так как $mm' = \alpha - \alpha'$ и $\cos\beta(\alpha') = 1 + \partial v(\alpha') / \partial\alpha'$, то

$$\alpha - \alpha' = -v(\alpha')\left[1 + \frac{\partial v(\alpha')}{\partial \alpha'}\right]^{-1} \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) соотношения (1.5) и любую функцию $N(\alpha)$ с принятой точностью можно записать так:

$$v(\alpha) = v(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial v(\alpha')}{\partial \alpha'}, \ldots, N(\alpha) = N(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial N(\alpha')}{\partial \alpha'} \tag{1.7}$$

Производные будут равны

$$\frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'} - v(\alpha')\frac{\partial^2 w(\alpha')}{\partial \alpha'^2}, \quad \frac{\partial^4 w(\alpha)}{\partial \alpha^4} = \frac{\partial^4 w(\alpha')}{\partial \alpha'^4} - v(\alpha')\frac{\partial^5 w(\alpha')}{\partial \alpha'^5}, \ldots$$

поэтому в операторах $L_i{}^*$ уравнений (1.1), приведенных к виду

$$L_i{}^*\left[v(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial v(\alpha')}{\partial \alpha'}, \quad w(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'}\right] = \delta_{3i}\left[1 + \frac{\partial v(\alpha')}{\partial \alpha'}\right]^{-1} p(\alpha') \tag{1.8}$$

операции дифференцирования производятся по α'. В скобках правой части (1.8) величины второго порядка отброшены. Для значений $\alpha' > L + v(L)$ нагрузку $p(\alpha')$ следует приравнивать нулю.

У закрепленного конца балки ($\alpha = 0$) нет взаимного скольжения, поэтому условия (1.4) сохраняют прежний вид

$$v(\alpha') = w(\alpha') = M(\alpha') = 0 \quad (\alpha' = 0) \tag{1.9}$$

в то время как условия на скользящей опоре ($\alpha = L$) запишутся так:

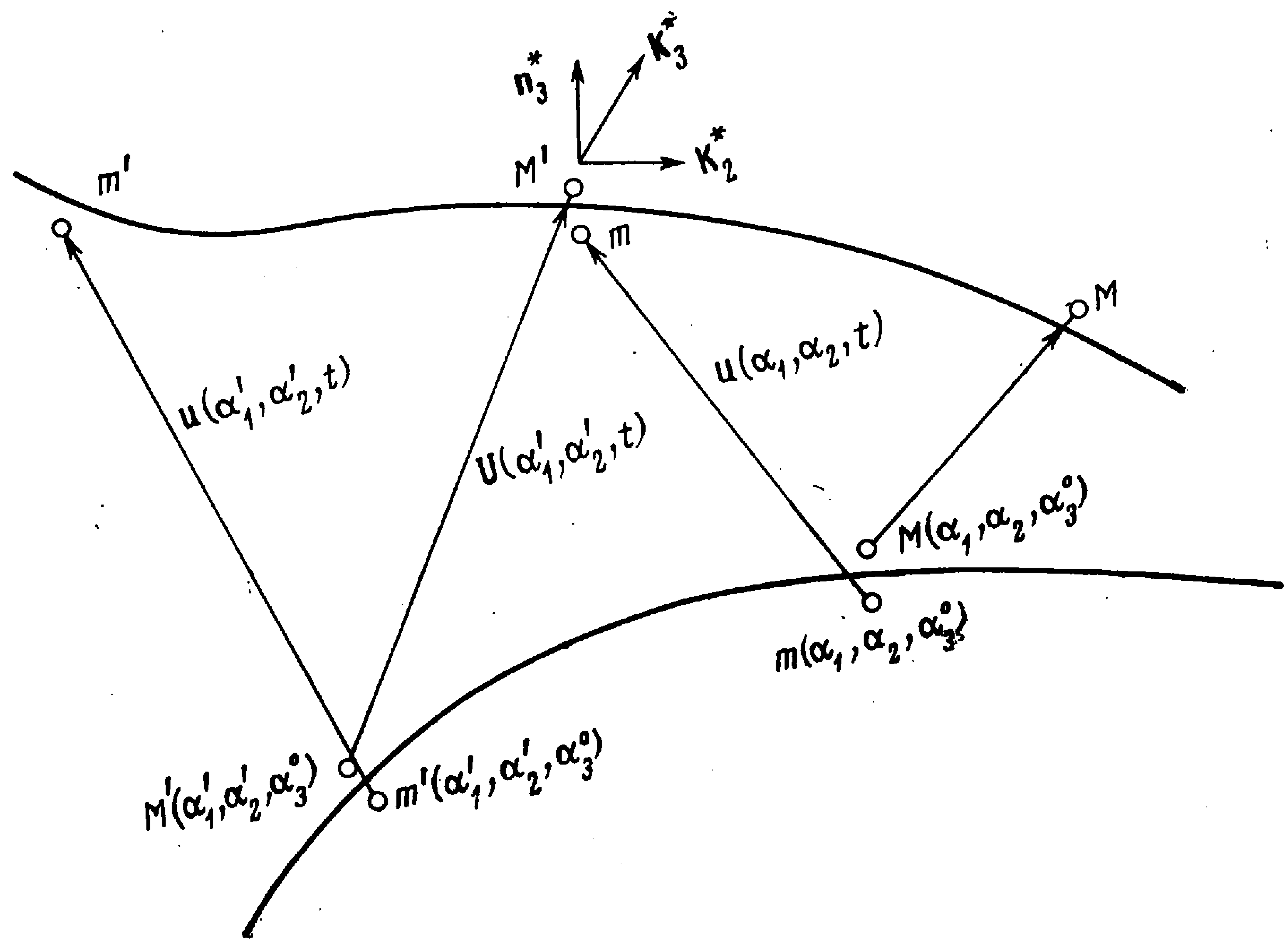
$$w(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial w(\alpha')}{\partial \alpha'} = 0 \tag{1.10}$$

$$M(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial M(\alpha')}{\partial \alpha'} = 0, \quad N(\alpha') - v(\alpha')\frac{\partial N(\alpha')}{\partial \alpha'} = 0$$

Последнее выражение приведено для случая, когда член $Q \sin\beta$ в (1.4) мал по сравнению с первым. Легко записать его также в полном виде. Важно отметить, что условия (1.10) должны удовлетворяться при переменном значении $\alpha' = L + v(L)$. Приведенные рассуждения будут использованы далее при записи общих условий контакта.

2. Кинематические и динамические условия на поверхности. Предполагается, что геометрические параметры оболочки изменяются плавно, частицы жидкости не отрываются с ее поверхности и в результате относительного движения не покидают ее пределы. Проскальзывание между средами может быть обусловлено деформацией оболочки, как в рассмотренном выше примере, и независимым движением жидкости. Суммарная величина проскальзывания должна быть малой по сравнению с длиной, на которой происходит значительное изменение полей деформации и давления в средах (например, с длиной волны).

В момент времени $t = 0$ ортогональная криволинейная система координат Лагранжа α_1, α_2, α_3 принимается общей для упругого тела и области, занятой жидкостью. Контакт между ними осуществляется по поверхности $\alpha_3 = \alpha_3^\circ$ (фиг. 2). Координаты α_1, α_2 направлены по линиям главной кривизны поверхности. В частности, за время $t = 0$ может быть принято недеформированное состояние упругого тела (как в предыдущем примере).



Фиг. 2

Таким образом, в начальный момент соседним точкам с двух сторон поверхности раздела α_3° приписываются одни и те же лагранжевы координаты. Хотя в дальнейшем эти материальные частицы расходятся, оставаясь на той же поверхности α_3°, и двигаются по разным траекториям, численно значения их координат будут одинаковыми. Поэтому условия контакта при наличии проскальзывания будут составляться для точек, имеющих разные значения лагранжевых координат на поверхности контакта, например, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ)$ и $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ)$.

Итак, точка m $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ)$ упругого тела в момент t совпадает с частицей жидкости M', находящейся на той же поверхности α_3°, но имеющей при $t = 0$ координаты α_1', α_2' (фиг. 2). Новые положения точек m' $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ)$ и M $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ)$ также показаны на рисунке. Кинематическое условие будет состоять в равенстве [3]

$$\rho\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ) + \mathbf{u}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ, t) = \rho\,(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^\circ) + \mathbf{U}\,(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ, t) \tag{2.1}$$

Здесь ρ-радиус-вектор, $\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$ — векторы перемещения частиц упругого тела и жидкости.

Динамические условия в случае идеальной жидкости имеют вид

$$\sigma_{k_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ, t)\cdot \mathbf{k}_i^*(\alpha_1, \alpha_2, t) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

(2.2)

$$\sigma_{k_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ, t)\cdot \mathbf{n}_3^*(\alpha_1, \alpha_2, t) = -p(\alpha_1', \ \alpha_2', \ \alpha_3^\circ, \ t)$$

где σ_{k_3} — вектор напряжения на площадке, которая до деформации имела нормаль $\mathbf{k}_3$; $\mathbf{k}_i^*$ — орты по касательным к координатным линиям α_i в точке m после деформации, $\mathbf{n}_3^*$ — орт по нормали. Давление в жидкости p связано с плотностью и компонентами вектора перемещения U_1, U_2, U_3 уравнениями движения и неразрывности. Соотношения между ортами $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_j^*$, $\mathbf{n}_3^*$ содержат компоненты перемещения упругого тела u_1, u_2, u_3 и их производные [4].

Если упругое тело представляет собой тонкостенную оболочку, то за поверхность контакта $\alpha_3 = \alpha_3^\circ$ может быть принята ее срединная поверхность. При этом (2.1) не изменится, а вместо (2.2) будут иметь место уравнения

(2.3) $$L_i^*[u_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \ u_2, u_3] = \delta_{3i} p(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

где L_1^*, L_2^*, L_3^* — нелинейные дифференциальные операторы теории оболочек, соответствующие составлению уравнений движения суммированием проекций всех сил на координатные оси после деформации [1]. Перемещения могут быть порядка характерного размера оболочки, деформации полагаются малыми по сравнению с единицей. Согласно гипотезе Кирхгофа — Лява $\mathbf{k}_3^* = \mathbf{n}_3^*$.

На граничных срезах оболочки задаются условия закрепления

(2.4) $$l_\nu[u_1(\alpha_1^\circ, \alpha_2, t), \ u_2, u_3] = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

В условиях (2.1) — (2.3) правые части могут быть выражены через функции, определенные в окрестности точки $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ)$ с локальным триэдром $\mathbf{k}_i(\alpha_1, \alpha_2)$ до деформации. При этом компоненты u_i, U_i вводятся в форме

(2.5) $$\mathbf{u} = \mathbf{k}_i(\alpha_1, \alpha_2) u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ, t), \quad \mathbf{U} = \mathbf{k}_i(\alpha_1, \alpha_2) U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3^\circ, t)$$

Другой вариант соотношений на контактной поверхности получается, если левые части (2.1) — (2.4) выразить через функции, заданные в точке $m'(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ)$. В этом случае

(2.6) $$\mathbf{u} = \mathbf{k}_i(\alpha_1', \alpha_2') u_i(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ, t), \quad \mathbf{U} = \mathbf{k}_i(\alpha_1', \alpha_2') U_i(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ, t)$$

т. е. u_i, U_i будут проекциями перемещений тех же частиц упругого тела и жидкости, что выше, на направления ортов $\mathbf{k}_i(\alpha_1', \alpha_2')$ в точке $m'(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3^\circ)$.

Особенности этих двух вариантов записи условий обсуждаются далее для задачи в плоскости $\alpha_2\alpha_3$, после чего дается обобщение необходимых соотношений для пространственной задачи.

3. Первый вариант условий. Функции ρ и $\mathbf{U}$ предполагаются аналитическими по α_2, в силу чего правую часть (2.1) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $m(\alpha_2, \alpha_3^\circ)$. Если сохранить в этом разложении три члена и использовать формулы Френе, то из (2.1) следует

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & \mathbf{U}(\alpha_2, t) - \mathbf{u}(\alpha_2, t) + (\alpha_2' - \alpha_2)\left(h_2\mathbf{k}_2 + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\alpha_2}\right) + \\
& + \frac{1}{2}(\alpha_2' - \alpha_2)^2\left(\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_2}\mathbf{k}_2 - \frac{h_2\partial h_2}{h_3\partial\alpha_3}\mathbf{k}_3 + \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial\alpha_2^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Здесь h_2, h_3 — коэффициенты Ляме. Два скалярных уравнения, полученные из (3.1) и (2.5), вычитанием одного из другого и сложением можно привести к линейному и квадратному относительно $(\alpha_2' - \alpha_2)$ уравнениям. Первое из них дает

$$
\begin{aligned}
& \alpha_2' - \alpha_2 = \Delta(\alpha_2, t), \quad \Theta_{23} = {}^1/_2 E_{23} + \Omega_1 \\
(3.2)\qquad & \Delta(\alpha_2, t) = \frac{1}{h_2}\,\frac{(u_2 - U_2)F + (u_3 - U_3)}{(1 + E_{22})F + \Theta_{23}} \\
& F = \left[\frac{h_2\partial h_2}{h_3\partial\alpha_3}(1 + E_{22}) - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(h_2\Theta_{23})\right]\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(h_2 + h_2E_{22}) + \frac{h_2\partial h_2}{h_3\partial\alpha_3}\Theta_{23}\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Параметры E_{22}, E_{23}, Ω_1, характеризующие деформацию и средний поворот элементарного объема жидкости, аналогичны соответствующим параметрам в теории упругости [4]

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & E_{22} = \frac{\partial U_2}{h_2\partial\alpha_2} + \frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}U_3, \quad E_{23} = \frac{h_3\partial}{h_2\partial\alpha_2}\left(\frac{U_3}{h_3}\right) + \frac{h_2\partial}{h_3\partial\alpha_3}\left(\frac{U_2}{h_2}\right) \\
& 2\Omega_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(h_3U_3) - \frac{\partial}{\partial\alpha_3}(h_2U_2)\right]
\end{aligned}
$$

После исключения $(\alpha_2' - \alpha_2)$ из квадратного уравнения кинематическое условие на поверхности контакта упругого тела и идеальной жидкости приобретет вид

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & [(u_3 - U_3)(1 + E_{22}) - (u_2 - U_2)\Theta_{23}][(1 + E_{22})F + \Theta_{23}] + \\
& + \frac{1}{2h_2^2}[u_3 - U_3 + (u_2 - U_2)F]^2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(h_2 + h_2E_{22}) + \frac{h_2\partial h_2}{h_3\partial\alpha_3}\Theta_{23}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Правые части (2.2) и (2.3) также раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки m $(\alpha_2, \alpha_3°)$, и разность $(\alpha_2' - \alpha_2)$ заменяется соотношением (3.2). Таким образом, динамические условия в случае тонкостенной оболочки будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & L_i^*[u_2(\alpha_2, t), u_3] = \delta_{3i}\left[p(\alpha_2, \alpha_3°, t) + \Delta(\alpha_2, t)\frac{\partial p}{\partial\alpha_2} + \right. \\
& \left. + \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha_2^2}\right] \quad (\alpha_3 = \alpha_3°)
\end{aligned}
$$

Если взаимное скольжение между контактирующими средами отсутствует $(u_2 = U_2)$, то согласно (3.4) и (3.5)

$$
(3.6)\qquad u_3 = U_3, \quad L_i^*[u_2(\alpha_2, t), u_3] = \delta_{3i}p(\alpha_2, \alpha_3°, t)
$$

Таким образом, при произвольных, но равных между собой перемещениях оболочки и жидкости по касательной координате, независимо от величины нормальных перемещений кинематическое условие линейно, в отличие от случаев эйлерова и смешанного эйлерово-лагранжевого подхода.

Промежуточный случай между условиями (3.4) — (3.6) имеет место, когда выполняется неравенство

$$|u_2 - U_2| \ll 2h_2^2 (1 + E_{22})^2 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(h_2 + h_2 E_{22}) + \frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3}\Theta_{23}\right]^{-1}$$

что соответствует сохранению в (3.1) первых двух членов разложения. При этом кинематическое и динамическое условия приобретают вид

$$(3.7)\qquad (u_3 - U_3)\left(1 + \frac{\partial U_2}{h_2\partial\alpha_2} + \frac{\partial h_2}{h_2 h_3 \partial\alpha_3}U_3\right) + \\ + (u_2 - U_2)\left(\frac{\partial h_2}{h_2 h_3 \partial \alpha_3}U_2 - \frac{\partial U_3}{h_2 \partial\alpha_2}\right) = 0$$

$$(3.8)\qquad L_i^*[u_2, u_3] = \delta_{3i} p(\alpha_2, \alpha_3^\circ, t) + \frac{\delta_{3i}\partial p}{h_2\partial\alpha_2}\left(1 + \frac{\partial U_2}{h_2\partial\alpha_2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial h_2}{h_2 h_3 \partial\alpha_3}U_3\right)^{-1}(u_2 - U_2)$$

Последние условия для пространственной задачи получены в [3].

В линейном приближении условия (3.4), (3.5), а также (3.7), (3.8) совпадают с соответствующими условиями, записанными в смешанной эйлерово-лагранжевой форме. В последних вместо компонент перемещения фигурируют компоненты скорости. Однако линеаризованные выражения (3.4), (3.7) и правых частей (3.5), (3.8) отличаются от аналогичных условий в смешанной форме. Если через φ° и φ обозначить потенциал скорости в жидкости при абсолютно жесткой границе $\alpha_3 = \alpha_3^\circ$ $(\partial\varphi^\circ/\partial\alpha_3 = 0)$ и его возмущение за счет перемещений границы на u_2, u_3, то линеаризованное относительно возмущений φ, u_2, u_3 кинематическое условие в смешанной форме имеет вид [5]

$$(3.9)\qquad \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{h_3\partial x_3} - \omega_2\frac{\partial\varphi^\circ}{h_2\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3}\left(\frac{\partial^2\varphi^\circ}{h_3\partial x_3^2} + \frac{\partial h_3}{h_2\partial x_2}\,\frac{\partial\varphi^\circ}{h_2\partial x_2}\right) - \\ - \frac{u_2\partial h_2}{h_2 h_3\partial x_3}\,\frac{\partial\varphi^\circ}{h_2\partial x_2}$$

где x_i — координаты Эйлера, которые здесь могут быть отождествлены с координатами Лагранжа α_i, ω_2 — угол поворота сечения оболочки вдоль координатной линии α_2.

Представляя полные перемещения и давления в виде

$$U_i^* = U_i^\circ + U_i, \quad u_i^* = u_i, \quad p^* = p^\circ + p \quad (i = 2, 3)$$

из (3.7) находим линеаризованное условие ($U_3^\circ = \partial U_3^\circ/\partial\alpha_2 = 0$ на $\alpha_3 = \alpha_3^\circ$)

$$(3.10)\qquad \left(1 + \frac{\partial U_2^\circ}{h_2\partial\alpha_2}\right)(u_3 - U_3) - \frac{\partial h_2}{h_2 h_3\partial\alpha_3}U_2^\circ(u_2 - U_2) - \\ - U_2^\circ\left(\frac{\partial h_2}{h_2 h_3\partial\alpha_3}U_2 - \frac{\partial U_3}{h_2\partial\alpha_2}\right) = 0$$

Условие (3.10) и линеаризованная правая часть (3.8) отличны от (3.9) и линеаризованной правой части динамических условий смешанной формы по структуре. Кроме того, в (3.7), (3.8), (3.10) фигурируют производные по координате от компонент перемещения и давления в жидкости, а компоненты перемещения оболочки — в виде самих функций. Это обстоятельство в некоторых задачах можно считать недостатком данного варианта записи условий. Например, если поле в жидкости быстро изменяющееся (высокочастотные колебания, ударные волны и т. п.) и оно определено приближенно, то в результате дифференцирования происходит потеря точности. От этого недостатка свободен второй вариант записи условий.

4. Второй вариант условий. Разложение левой части векторного уравнения (2.1) в ряд Тейлора в окрестности точки m' с координатами α_2', α_3' (фиг. 2) дает

$$\alpha_2 - \alpha_2' = \Delta(\alpha_2', t), \quad \theta_{23} = {}^1/_2 e_{23} + \omega_1$$

$$\Delta(\alpha_2', t) = \frac{1}{h_2} \frac{(U_2 - u_2) f + (U_3 - u_3)}{(1 + e_{22}) f + \theta_{23}} \tag{4.1}$$

$$f = \left[\frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3}(1 + e_{22}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2'}(h_2 \theta_{23})\right]\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2'}(h_2 + h_2 e_{22}) + \frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3}\theta_{23}\right]^{-1}$$

При этом использовано представление (2.6). Величины e_{22}, e_{23} получаются из (3.3) заменой в них U_i и α_2 на u_i и α_2'. В случае тонкостенной оболочки $h_3 = 1$, $\partial h_2 / \partial \alpha_3 \approx h_2 k_{22}$, где k_{22} — кривизна срединной поверхности; величина $h_2(\alpha_3)$ может быть принята с точностью до hk_{22} (h — толщина оболочки) по сравнению с единицей за коэффициент Ляме для срединной поверхности. При этом величина θ_{23} совпадает с ω_2 в выражении (3.9).

Во втором варианте компоненты перемещения и давление функции аргумента α_2'; производные также берутся по α_2'. Величины $\Delta(\alpha_2, t)$, $\Delta(\alpha_2', t)$ представляют собой разные функции. Например, в декартовой системе и при $U_2 \equiv 0$ из (3.2) и (4.1) следуют соотношения $\alpha_2 - \alpha_2' = -u_2(\alpha_2)$ и (1.6), которые использовались в п.1. При этом знаменатель и числитель (3.2) и (4.1) нужно поделить на F и f.

Кинематическое условие второго варианта имеет вид

$$[(U_3 - u_3)(1 + e_{22}) - (U_2 - u_2)\theta_{23}][(1 + e_{22}) f + \theta_{23}] + \frac{1}{2h_2^2} \times$$
$$\times [U_3 - u_3 + (U_2 - u_2) f]^2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2'}(h_2 + h_2 e_{22}) + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2 \partial h_2}{h_3 \partial \alpha_3}\theta_{23}\right] = 0 \quad (\alpha_3 = \alpha_3^\circ) \tag{4.2}$$

Представляя (4.1) в виде $\alpha_2 = \alpha_2' + \Delta(\alpha_2', t)$, вместо (2.3) и (2.4) будем иметь следующие динамические условия:

$$L_i^* \left[u_2(\alpha_2', t) + \Delta(\alpha_2', t)\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2'} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2'^2}, \quad u_3(\alpha_2', t) + \ldots\right] = \delta_{3i} p(\alpha_2', \alpha_3^\circ, t) \tag{4.3}$$

$$l_\nu \left[u_2(\alpha_2', t) + \Delta\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2'} + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2'^2}, \ u_3(\alpha_2', t) + \ldots\right] = 0 \quad (\nu = 2, 3, 4) \tag{4.4}$$

Условие (4.4) должно удовлетворяться при переменном значении $\alpha_2' = \alpha_2^\circ + \Delta(\alpha_2^\circ, t)$, где α_2° — координата граничного среза оболочки. Если в первом варианте для уравнений движения (3.5) ставились, например, условия закрепления на краях оболочки $u_2(\alpha_2, t) = u_3(\alpha_2, t) = 0, \ldots$

... ($\alpha_2 = \alpha_2^\circ$), то теперь они преобретают вид

$$u_\nu(\alpha_2, t) = u_\nu(\alpha_2', t) + \Delta(\alpha_2', t)\frac{\partial u_\nu}{\partial \alpha_2'} + \\ + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial \alpha_2'^2} = 0 \quad (\alpha_2' = \alpha_2^\circ + \Delta(\alpha_2^\circ, t))$$

причем $\Delta(\alpha_2^\circ, t)$ в силу $u_2(\alpha_2^\circ, t) = u_3(\alpha_2^\circ, t) = 0$ будет зависеть только от параметров жидкости, так как

$$\Delta(\alpha_2^\circ, t) = -\frac{1}{h_2}\frac{U_2F + U_3}{(1 + E_{22})F + \Theta_{23}}$$

Таким образом, в отличие от первого варианта записи условий, во втором, как это видно из (4.1) — (4.4), отсутствуют производные от параметров жидкости U_i, p, что можно считать его достоинством. Однако уравнения движения оболочки и граничные условия на срезе ее (4.3), (4.4) оказались более сложными, чем в первом варианте. Поэтому вопрос о том, какой из них более предпочтителен, должен решаться при рассмотрении конкретных задач. Условия первого варианта допускают упрощения при рассмотрении частных видов движения жидкости и ее физических свойств, а второго — при рассмотрении частных видов деформации оболочки.

При $U_2 = u_2$ согласно (4.1), (4.2) $U_3 = u_3$, $\Delta = 0$, и оба варианта записи условий имеют одинаковый вид.

Если ограничиться двумя членами в рядах Тейлора, то кинематическое условие (4.2) запишется так:

$$(4.5) \qquad (U_3 - u_3)\left(1 + \frac{\partial u_2}{h_2\partial\alpha_2'} + \frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}u_3\right) + \\ + (U_2 - u_2)\left(\frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}u_2 - \frac{\partial u_3}{h_2\partial\alpha_2'}\right) = 0$$

При этом в (4.3), (4.4) следует сохранить только члены, содержащие $\Delta(\alpha_2', t)$, $\Delta(\alpha_2^\circ, t)$ в первой степени. Последние равны

$$(4.6) \qquad \Delta(\alpha_2', t) = \frac{U_2 - u_2}{h_2}\left(1 + \frac{\partial u_2}{h_2\partial\alpha_2'} + \frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}u_3\right)^{-1}, \quad \Delta(\alpha_2^\circ, t) = \\ = -\frac{U_2}{h_2}\left(1 + \frac{\partial U_2}{h_2\partial\alpha_2} + \frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}U_3\right)^{-1}$$

В отличие от (3.10) линеаризованное условие (4.5)

$$(4.7) \qquad U_3 = u_3 + U_2^\circ\left(\frac{\partial u_3}{h_2\partial\alpha_2'} - \frac{\partial h_2}{h_2h_3\partial\alpha_3}u_2\right) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^\circ)$$

по структуре близко к (3.9). В случае плоской пластины и однородного исходного поля в жидкости ($U_2^\circ = U_2^\circ(t)$, $U_3 = 0$) они по форме совпадают, если компоненты перемещения в (4.7) заменить соответствующими компонентами скоростей. Очевидно, что и в данном случае α_2' и $x_2 \approx \alpha_2$ нельзя отождествлять.

Перемещение U_2^0 по α_2' будет постоянным, например, для возвратно-поступательного движения идеальной несжимаемой жидкости вдоль границы полупространства. При этом для применимости приведенных уравнений максимальное перемещение жидкости должно удовлетворять ограничению, указанному п. 2. Если имеется поток с постоянной скоростью, то необходимо ограничить время, в течение которого рассматривается процесс. В последнем случае задача для произвольного промежутка времени должна быть сформулирована в смешанной форме [5].

Содержащиеся в динамических условиях (4.3), (4.4) функции $\Delta(\alpha_2', t)$ и $\Delta(\alpha_2^\circ, t)$ согласно (4.6) будут иметь вид

$$\Delta(\alpha_2', t) = \frac{U_2^\circ}{h_2}, \quad \Delta(\alpha_2^\circ, t) = -\frac{U_2^\circ}{h_2}\left(1 + \frac{\partial U_2^\circ}{h_2 \partial \alpha_2}\right)^{-1} \tag{4.8}$$

В случае однородного поля в жидкости $\Delta(\alpha_2', t) = -\Delta(\alpha_2^\circ, t) = U_2^\circ / h_2$.

В качестве примера уравнение

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^*(x', t), \quad N = \frac{B}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

приведем к форме, которую оно должно иметь во втором варианте. Здесь $x = h_2\alpha_2$, $x' = h_2\alpha_2'$. Если ограничиться случаем (4.7), (4.8) и учесть, что N не зависит от продольной координаты, то

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + U_2^0\frac{\partial^5 w}{\partial x'^5}\right) - N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + U_2^0\frac{\partial^3 w}{\partial x'^3}\right) + \gamma h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w + U_2^0\frac{\partial w}{\partial x'}\right) = p^*(x', t)$$

Первое уравнение справедливо в интервале $0 < x < L$, а второе при $-U_2^0 < x' < L - U_2^0$

5. Второй вариант условий в трехмерном случае. Если в разложениях в ряд Тейлора учитывать только два члена, то кинематическое условие

$$\begin{aligned}(u_1 - U_1)[(^1/_2 e_{12} + \omega_3)(^1/_2 e_{23} + \omega_1) - (1 + e_{22})(^1/_2 e_{13} - \omega_2)] + \\ + (u_2 - U_2)[(^1/_2 e_{12} - \omega_3)(^1/_2 e_{13} - \omega_2) - (1 + e_{11})(^1/_2 e_{23} + \omega_1)] + \\ + (u_3 - U_3)[(1 + e_{11})(1 + e_{22}) - (^1/_4 e_{12}^2 - \omega_3^2)] = 0 \quad (\alpha_3 = \alpha_3^\circ)\end{aligned} \tag{5.1}$$

Выражения для e_{ij} $(i \neq j)$, ω_k получаются из (3.3) при замене U_i, α_1, α_2 на u_i, α_1', α_2', а для e_{ii} — круговой перестановкой из

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{h_1 \partial \alpha_1'} + \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \alpha_2'} u_2 + \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \alpha_3} u_3$$

Связь между α_1, α_2 и α_1', α_2' следующая:

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \Delta_1(\rho'), \quad \Delta_2 = \alpha_2' + \Delta_2(\rho') \tag{5.2}$$

$$\Delta_1(\rho') = \frac{1}{h_1}\frac{(U_1 - u_1)(1 + e_{22}) - (U_2 - u_2)(^1/_2 e_{12} - \omega_3)}{(1 + e_{11})(1 + e_{22}) - (^1/_4 e_{12}^2 - \omega_3^2)}$$

Здесь и далее через (ρ') и (ρ) обозначены аргументы $(\alpha_1', \alpha_2', t)$ и (α_1, α_2, t). Выражение для $\Delta_2(\rho')$ получается из $\Delta_1(\rho')$ взаимной заменой индексов *1* и *2*, а также заменой ω_3 на $-\omega_3$. В соотношениях $\alpha_i' = \bar{\alpha}_i + \Delta_i(\rho)$ имеем

$$\Delta_1(\rho) = \frac{1}{h_1}\frac{(u_1 - U_1)(1 + E_{22}) - (u_2 - U_2)(^1/_2 E_{12} - \Omega_3)}{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - (^1/_4 E_{12}^2 - \Omega_3^2)} \tag{5.3}$$

Отсюда $\Delta_2(\rho)$ получается при помощи той же замены, что $\Delta_2(\rho')$.

Динамические условия (2.2) в векторной форме имеют вид

$$\{\sigma_{k_3}(\rho') + [\Delta(\rho')\cdot\nabla]\sigma_{k_3}\}\mathbf{k}_i^*(\rho') + \sigma_{k_3}[\Delta(\rho')\cdot\nabla]\mathbf{k}_i^*(\rho') = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{5.4}$$

$$\{\sigma_{k_3}(\rho') + [\Delta(\rho')\cdot\nabla]\sigma_{k_3}\}\mathbf{n}_3^*(\rho') + \sigma_{k_3}[\Delta(\rho')\cdot\nabla]\mathbf{n}_3^*(\rho') = -p(\rho')$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона в координатах α_1', α_2'. Выражения (5.4) могут быть записаны в ортах $\mathbf{k}_i$ до деформации по известным формулам связи между $\mathbf{k}_i^*$, $\mathbf{n}_3^*$, $\mathbf{k}_i$.

При рассмотрении тонкостенной оболочки выражения e_{ij}, ω_k соответственно упрощаются, следовательно, несколько упрощаются и (5.1), (5.2). Динамические условия (2.3), (2.4) запишутся в виде

$$L_i^* \{u_1(\rho') + [\Delta(\rho')\cdot\nabla] u_1(\rho'), u_2, u_3\} = \delta_{3i} p(\rho') \tag{5.5}$$
$$l_\nu \{u_1(\rho') + [\Delta(\rho')\cdot\nabla] u_1(\rho'), u_2, u_3\} = 0 \quad [\alpha_1' = \alpha_1^\circ + \Delta_1(\alpha_1^\circ, \alpha_2, t)]$$

В (5.5), кроме основных, должны учитываться члены, содержащие $\Delta_1(\rho')$ и $\Delta_2(\rho')$ только в первой степени.

Автор признателен Л. И. Балабуху и Л. А. Галину за обсуждение и советы.

Поступила 17 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
2. *Балабух Л. И., Вульфсон М. Н., Мукосеев Б. В., Пановко Я. Г.* О работе сил реакций подвижных опор. В сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 18. М., Стройиздат, 1970.
3. *Сахабутдинов Ж. М.* Нелинейные задачи аэрогидроупругости в лагранжевых координатах. В сб.: Труды семинара по теории оболочек, вып. 2. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР, 1971.
4. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
5. *Ильгамов М. А.* Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975, т. 2. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.