

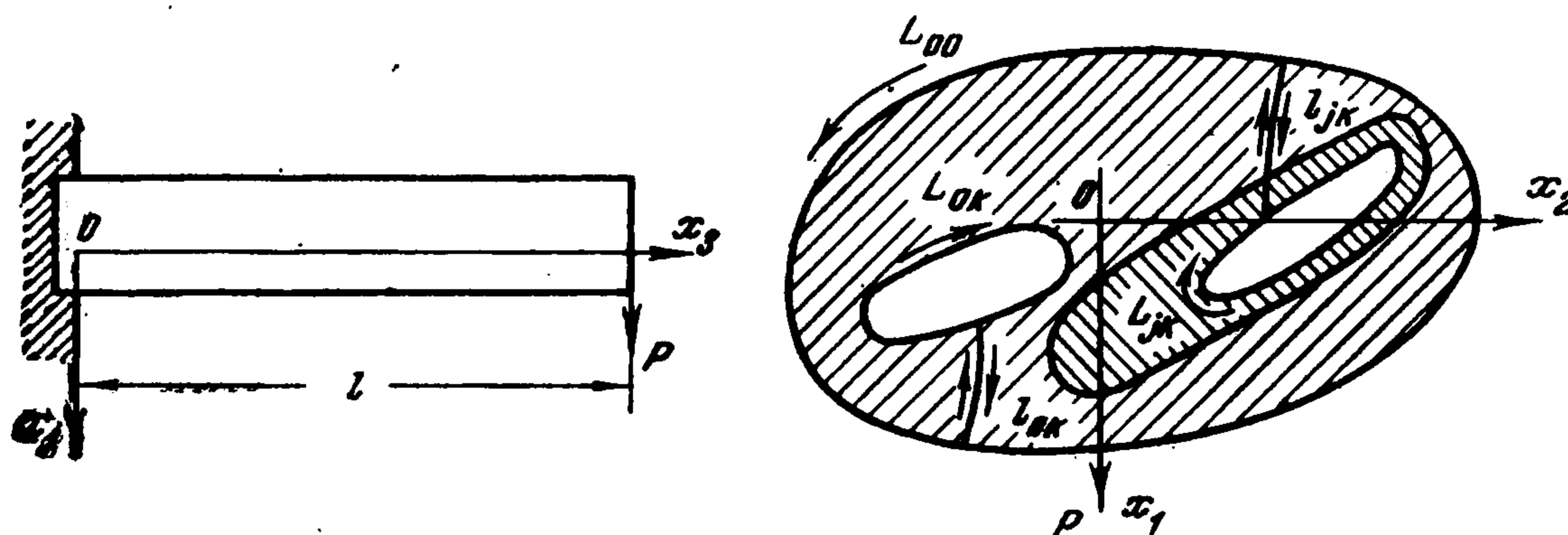
ЦЕНТР ИЗГИБА ПОЛОЙ СОСТАВНОЙ КОНСОЛИ

Ю. А. Амензаде

(Баку)

Было отмечено [1], что для определения центра изгиба сплошной консоли достаточно иметь решение задачи ее кручения. Это утверждение [обобщено [2] на случай полой консоли. В данной работе полученные ранее [3, 4] формулы для координат центра изгиба полой консоли при помощи комплексной функции кручения обобщены для полой составной консоли.

1. Рассмотрим консоль, составленную из многосвязных призматических тел, изготовленных из различных материалов и спаянных между собою вдоль боковых поверхностей. Тогда область, занятая каким-либо поперечным сечением консоли, будет состоять из кусочно-разнородных включений



S_j ($j = 0, 1, \dots, m$), m — число включений области S_0 с линиями контакта L_{0q}^* ($q = 1, 2, \dots, m$). Кроме того, обозначим контуры вырезов включений S_j через L_{jk} ($k = 0, 1, 2, \dots, N_j$), где N_j — число вырезов включений.

Введем следующие обозначения:

$$L = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{N_j} L_{jk}, \quad l = \sum_{j=0}^m \sum_{q=1}^{N_j} l_{jq}$$

$$L' = L + l, \quad \omega = \sum_{j=0}^m \omega_j$$

Здесь L — сумма контуров областей S_j , l_{jk} — линии разрезов, L' — контур односвязной области, ω_j — площадь области.

Пусть призматическое тело длиной l закреплено одним концом, а на свободном конце несет нагрузку, статически эквивалентную силе P . Начало координат поместим в произвольной точке закрепленного конца. При этом ось Ox_3 направим параллельно оси консоли, а ось Ox_1 — параллельно силе P (фигура).

Компоненты тензора напряжений при изгибе консоли ищем в виде [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{33} &= P(ax_1 + bx_2 + e)(l - x_3) \\ \sigma_{31} &= \frac{P}{2} \left(\frac{\partial \chi_j}{\partial x_2} + ax_1^2 + ex_1 \right) \\ \sigma_{32} &= \frac{P}{2} \left(-\frac{\partial \chi_j}{\partial x_1} + bx_2^2 + ex_2 \right) \end{aligned}$$

Здесь $\chi = \chi(x_1, x_2)$ — некоторая неизвестная функция, a, b, e — известные постоянные.

Компоненты тензора напряжений σ_{33} , σ_{31} и σ_{32} в сечении x_3 должны удовлетворять условиям равновесия

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \sigma_{31} d\omega - P &= 0, \quad \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \sigma_{32} d\omega = 0 \\ \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) d\omega &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \sigma_{33} d\omega &= 0, \quad \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \sigma_{33} x_2 d\omega = 0 \\ \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \sigma_{33} x_1 d\omega + P(l - x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Подставив второе соотношение (1.1) в условия (1.3), получим линейную алгебраическую систему, корни которой

$$a = -\frac{I_{11}\omega - S_1^2}{B}, \quad b = \frac{I_{12}\omega - S_1 S_2}{B}, \quad e = \frac{I_{11}S_2 - I_{12}S_1}{B}$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^m I_{j, \alpha\beta}, \quad S_\alpha = \sum_{j=0}^m S_{j, \alpha}; \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$B = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & \omega \end{vmatrix}$$

Здесь $I_{j, \alpha\beta}$ и $S_{j, \alpha}$ — моменты инерции и статические моменты площади ω_j относительно осей x_1, x_2 .

Последние два соотношения (1.1) тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия. При соотношениях (1.1) из шести выражений Бельтрами — Митчелла для функции χ_j имеем (C — постоянная интегрирования)

$$(1.4) \quad \Delta \chi_j = \frac{2\nu_j}{1 + \nu_j} (bx_1 - ax_2) - 2C$$

Условия отсутствия на боковой поверхности консоли нагрузки дают граничное условие вида

$$(1.5) \quad \frac{\partial \chi_j}{\partial l} = (bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \quad \text{на } L$$

2. Представим функцию χ_j в виде

$$(2.1) \quad \chi_j = \Psi_j + C\Phi_j$$

тогда для функций Φ_j и Ψ_j получим задачи

$$(2.2) \quad \Delta\Phi_j = -2 \text{ в } S_j$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial l} = 0 \text{ на } L_{jk}$$

$$(2.3) \quad \Delta\Psi_j = \frac{2\nu_j}{1+\nu_j} (bx_1 - ax_2) \text{ в } S_j$$

$$\frac{\partial\Psi_j}{\partial l} = (bx_2^2 + ex_2) \frac{dx_1}{dl} - (ax_1^2 + ex_1) \frac{dx_2}{dl} \text{ на } L_{jk}$$

где Φ_j — функция напряжения Прандтля, Ψ_j — функция изгиба. Первое и второе условия (1.2) удовлетворяются тождественно.

Для вычисления скручивающего момента M_{ck} подставим в левую часть третьего условия (1.2) два последних соотношения (1.1) и учтем (2.1); тогда после ряда преобразований найдем

$$(2.4) \quad M_{ck} = P \left\{ C \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \Phi_j d\omega + \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \Psi_j d\omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega + \int_{L'} \omega_{jk}^l \frac{\partial\Psi_j}{\partial l} dl - \right. \\ \left. - [\Psi_j \omega_{jk}^l]_{L'} - C \int_{L'} \Phi_j \frac{d\omega_{jk}^l}{dl} dl \right\} \\ \omega_{jk}^l = \frac{1}{2} \int_0^{l_{L_{jk}}} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

где символом $[...]_{L'}$ обозначено приращение функции в скобках при обходе контура L' .

3. Приведем некоторые соотношения, которые в дальнейшем будут использованы.

Среднее значение кручения τ для всего поперечного сечения, следуя [1], определим формулой

$$\tau = \sum_{j=0}^m \frac{1}{\omega_j} \int_{\omega_j} \frac{\partial\omega_3}{\partial x_3} d\omega = \sum_{j=0}^m \frac{1}{\omega_j} \int_{\omega_j} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) d\omega$$

На основании закона Гука и двух последних формул (1.1) с учетом (1.4) имеем

$$(3.1) \quad \tau = P (aS_1 - bS_2 + C\kappa_0)$$

$$S_1 = \sum_{j=0}^m \frac{\nu_j}{E_j} x_{2c}^j, \quad S_2 = \sum_{j=0}^m \frac{\nu_j}{E_j} x_{1c}^j, \quad \kappa_0 = \sum_{j=0}^m \frac{1+\nu_j}{E_j}$$

где (x_{1c}^j, x_{2c}^j) — координаты центра тяжести площади ω_j относительно осей x_1 и x_2 .

Как видно из формулы (3.1), чтобы консоль испытывала только изгиб без участия кручения, постоянную C следует определить формулой

$$(3.2) \quad C = \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1)$$

На основании формулы Грина

$$(3.3) \quad \int_{\omega_*} (U_j \Delta V_j - V_j \Delta U_j) d\omega_* = \int_{L_*} \left(U_j \frac{\partial v_j}{\partial n} - V_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) dl$$

при $U_j = 1$, $V_j = \Psi_j$ с учетом первой формулы (2.3) имеем

$$(3.4) \quad \int_{L_*} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} dl = - \frac{2\nu}{1 + \nu} (ax_{2c} - bx_{1c}) \omega_*$$

Здесь L_* — произвольный, обходимый против часовой стрелки замкнутый контур, лежащий в сечении консоли, x_{1c} , x_{2c} — координаты центра тяжести площади ω_* , заключенный внутри L_* .

Эта формула должна иметь место для каждого внутреннего контура внутри сечения, а равно и для внешнего контура сечения.]

Исходя из однозначности функции Φ_j и того, что $\omega_{jk}^{l-} = \omega_{jk}^{l+} - \omega_{jk}$, $dl_{jk}^+ = -dl_{jk}^-$, имеем

$$(3.5) \quad \int_l \Phi_j \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial l} dl = 0$$

Кроме формул (3.2), (3.4) и (3.5), имеют место соотношения

$$(3.6) \quad \int_{l_{jk}} \Phi_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} dl = 0, \quad \int_{l_{jk}} \Phi_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial l} dl = 0$$

в справедливости которых убедимся ниже.

Введем новую гармоническую функцию

$$(3.7) \quad \Psi_{j1} = \Psi_j - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} (bx_2^2 x_1 - ax_1^2 x_2)$$

Кроме того, имеем [5]

$$(3.8) \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} - x_1, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} - x_2$$

Проекция перемещения на ось Ox_3 определяется по формуле [5]

$$(3.9) \quad u_{3j} = u_{3j}^{\circ} + \omega_{knj}^{\circ} (x_n' - x_n^{\circ}) + \int_{M_0}^{M'} \left[e_{3m} + (x_n' - x_n) \left(\frac{\partial e_{3m}}{\partial x_n} - \frac{\partial e_{nm}}{\partial x_3} \right) \right] dx_m$$

Не нарушая общности, примем $u_{3j}^{\circ} = \omega_{knj}^{\circ} = 0$.

Учитывая в (3.9) закон Гука, две последние формулы (1.1), (2.1), (3.8) и вводя гармоническую функцию Ψ_{j2} , сопряженную с функцией Ψ_{j1} , после интегрирования окончательно получим ($F(x_1, x_2, x_3)$ — некоторый полином)

$$u_{3j} = \frac{\nu_j + 1}{E_j} P(-\Psi_{j2} + C\Phi_j) + \frac{\nu_j + 1}{2E_j} \left[(x_1' - x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} (-\Psi_{j2} + C\Phi_j) + (x_2' - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (-\Psi_{j2} + C\Phi_j) + F(x_1, x_2, x_3) \right]$$

Так как U_{3j} и φ_j — однозначные функции, функция Ψ_{j2} также однозначна. Таким образом, $\partial\Psi_{j1}/\partial l$ и $\partial\Psi_{j1}/\partial n$, а следовательно, и $\partial\Psi_j/\partial l$ и $\partial\Psi_j/\partial n$ вдоль берегов разрезов равны, что и требовалось доказать.

4. Применяя формулу Грина (3.3) для функций Φ_j и Ψ_j , а затем учитывая первые уравнения (2.2), (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \frac{2\nu_j}{1+\nu_j} \int_{\omega_j} (bx_1 - ax_2) \Phi_j d\omega + 2 \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \Psi_j d\omega = \\ & = \int_{L'} \left(\Phi_j \frac{\partial\Psi_j}{\partial n} - \Psi_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} \right) dl \end{aligned}$$

Учитывая в этом равенстве соотношения (3.4)—(3.6), формулы (3.8), а также то, что при обходе контура L' приращение $[\varphi_j \Psi_j]_{L'} = 0$ и $\int_L \varphi_j (\partial\Psi_j/\partial l) dl = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \frac{2\nu_j}{1+\nu_j} \int_{\omega_j} (bx_1 - ax_2) \Phi_j d\omega + 2 \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \Psi_j d\omega = \\ & = \frac{2\nu_0}{1+\nu_0} \left[-C_{00}\omega_{00} (ax_{2c}^{\circ\circ} - bx_{1c}^{\circ\circ}) + \sum_{k=1}^{N_0} C_{0k} (ax_{2c}^{\circ k} - \right. \\ & \left. - bx_{1c}^{\circ k}) \omega_{0k} \right] + \sum_{j=1}^m \frac{2\nu_j}{1+\nu_j} \sum_{k=0}^{N_j} C_{jk} (ax_{2c}^{jk} - bx_{1c}^{jk}) \omega_{jk} + \\ & + 2 [\Psi_j \omega_{jk}^l]_{L'} - \int_L \Phi_j \frac{\partial\Psi_j}{\partial l} dl - 2 \int_L \omega_{jk}^l \frac{\partial\Psi_j}{\partial l} dl \end{aligned}$$

где C_{jk} — значения Φ_j на контурах L_{jk} , ω_{jk} — площадь, заключенная внутри контура L_{jk} (x_{1c}^{jk} , x_{2c}^{jk}) — координаты центра тяжести площади ω_{jk} . Отсюда определим второй член последнего равенства и подставим в (2.4), тогда

$$\begin{aligned} (4.1) \quad M_{ck} = & P \left\{ C \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \Phi_j d\omega + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (bx_2 - ax_1) x_1 x_2 d\omega - \right. \\ & - \sum_{j=0}^m \frac{\nu_j}{1+\nu_j} \int_{\omega_j} (bx_1 - ax_2) \Phi_j d\omega + \frac{\nu_0}{1+\nu_0} \left[- (ax_{2c}^{\circ\circ} - bx_{1c}^{\circ\circ}) \times \right. \\ & \times C_{00}\omega_{00} + \sum_{k=1}^{N_0} (ax_{2c}^{\circ k} - bx_{1c}^{\circ k}) C_{0k}\omega_{0k} \left. \right] + \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\nu_j}{1+\nu_j} \sum_{k=1}^{N_j} (ax_{2c}^{jk} - bx_{1c}^{jk}) C_{jk}\omega_{jk} - \frac{1}{2} \int_L \Phi_j \frac{\partial\Psi_j}{\partial l} dl - \\ & - C \int_{L'} \Phi_j \frac{d\omega_{jk}^l}{dl} dl \end{aligned}$$

В этой формуле на основании граничного условия (2.3) и формулы Гаусса — Остроградского с учетом (3.8)

$$(4.2) \quad \int_L \varphi_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial l} dl = -2 \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi_j d\omega - \\ - \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} \left[(ax_1^2 + ex_1) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + (bx_2^2 + ex_2) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right] d\omega = \\ = -2 \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi_j d\omega - \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (ax_1 - bx_2) x_1 x_2 d\omega$$

В формуле (4.1) на основании соотношения (3.5)

$$(4.3) \quad \int_L \Phi_j \frac{d\omega_{jk}^l}{dl} dl = \int_L \Phi_j \frac{d\omega_{jk}^l}{dl} dl + \int_l \Phi_j \frac{d\omega_{jk}^l}{dl} dl = \\ = C_{00} \omega_{00} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{N_j} C_{jk} \omega_{jk}$$

Чтобы консоль испытывала только изгиб без участия кручения, постоянную C следует определить формулой (3.2).

Подставив (3.2), (4.2) и (4.3) в (4.1), получим крутящий момент M_{ck} , который вместе с силой P , действующей вдоль оси Ox_1 в точке O , вызывает изгиб консоли без участия кручения. Он равен

$$(4.4) \quad M_{ck} = P \left\{ \sum_{j=0}^m \left[\frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1) \int_{\omega_j} \Phi_j a \omega - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} \int_{\omega_j} (bx_1 - ax_2) \Phi_j d\omega + \int_{\omega_j} (ax_1 + bx_2 + e) \varphi_j d\omega \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{\nu_0}{1 + \nu_0} (ax_{2c}^{00} - bx_{1c}^{00}) + \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1) \right] C_{00} \omega_{00} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{N_0} \left[\frac{\nu_0}{1 + \nu_0} (ax_{2c}^{0k} - bx_{1c}^{0k}) + \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1) \right] C_{0k} \omega_{0k} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j} \left[\frac{\nu_j}{1 + \nu_j} (ax_{2c}^{jk} - bx_{1c}^{jk}) + \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1) \right] C_{jk} \omega_{jk} \right\}$$

Сложим силу P и скручивающий момент M_{ck} , определяемый формулой (4.4). Тогда координата точки приложения результирующей силы $x_{20} = -M_{ck} / P$.

На основании выражения комплексного потенциала кручения $F(z) = -i(\varphi + i\psi)$, где $\psi = \Phi + 1/2(x_1^2 + x_2^2)$, для координаты x_{20} с учетом формулы (4.4) окончательно будем иметь

$$(4.5) \quad x_{20} = \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (ax_1 + bx_2 + e) \operatorname{Im} F_j(z) d\omega - \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - aS_1) \int_{\omega_j} \left[\operatorname{Re} F_j(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] d\omega - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} \int_{\omega_j} (bx_1 - \\
& - ax_2) \left[\operatorname{Re} F_j(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] d\omega \left. \right\} + \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{N_j} \delta_{jk} \left[\frac{\nu_j}{1 + \nu_j} (ax_{2c}^{jk} - \right. \\
& \left. - bx_{1c}^{jk}) + \frac{1}{\kappa_0} (bS_2 - aS_1) \right] C_{jk} \omega_{jk} \\
\delta_{jk} = & \begin{cases} 1, & \text{когда } j = k = 0 \\ -1, & \text{для остальных значений } j \text{ и } k \end{cases}
\end{aligned}$$

Направим теперь силу P параллельно оси Ox_2 , тогда аналогично найдем координату $x_{10} = M_{ck}^*/P$ или окончательно

$$\begin{aligned}
(4.6) \quad x_{10} = & - \sum_{j=0}^m \int_{\omega_j} (a_* x_1 + b_* x_2 + e_*) \operatorname{Im} F_j(z) d\omega + \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{1}{\kappa_0} (b_* S_2 - \right. \\
& - a_* S_1) \int_{\omega_j} \left[\operatorname{Re} F_j(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] d\omega - \\
& - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} \int_{\omega_j} (b_* x_1 - a_* x_2) \left[\operatorname{Re} F_j(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] d\omega \left. \right\} - \\
& - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{N_j} \delta_{jk} \left[\frac{\nu_j}{1 + \nu_j} (a_* x_{2c}^{jk} - b_* x_{1c}^{jk}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\kappa_0} (b_* S_2 - a_* S_1) \right] C_{jk} \omega_{jk} \\
a_* = & \frac{I_{12}\omega - S_1 S_2}{B}, \quad b_* = \frac{[S_2^2 - \omega I_{22}]}{B}, \quad e_* = \frac{I_{22} S_1 - I_{12} S_2}{B}
\end{aligned}$$

Координаты (x_{10}, x_{20}) называются координатами центра изгиба.

В случае, когда консоль изготовлена из однородного материала, формулы для координат центра изгиба (4.5) и (4.6) при обозначениях $x_{1c}^{jk} = x_{1c}^k$, $x_{2c}^{jk} = x_{2c}^k$, $C_{jk} = C_k$, $\omega_{jk} = \omega_k$ примут вид (эти формулы выведены в работах [3, 4] и приведены в [5], но в них вкрались описки в знаках)

$$\begin{aligned}
x_{20} = & \int_{\omega} (ax_1 + bx_2 + e) \operatorname{Im} F(z) d\omega + \frac{\nu_0}{1 + \nu_0} \left\{ \int_{\omega} [b(x_1 - x_{1c}) - \right. \\
& - a(x_2 - x_{2c}) \left(\operatorname{Re} F(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right)] d\omega - [b(x_{1c}^0 - x_{1c}) - \\
& - a(x_{2c}^0 - x_{2c}) C_0 \omega_0] + \sum_{k=1}^n [b(x_{1c}^k - x_{1c}) - a(x_{2c}^k - x_{2c})] C_k \omega_k \left. \right\} \\
x_{10} = & - \int_{\omega} (a_* x_1 + b_* x_2 + e_*) \operatorname{Im} F(z) d\omega - \frac{\nu_0}{1 + \nu_0} \left\{ b_* (x_1 - x_{1c}) - \right. \\
& - a_* (x_2 - x_{2c}) \left[\operatorname{Re} F(z) - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] d\omega - \\
& - [b_* (x_{1c}^0 - x_{1c}) - a_* (x_{2c}^0 - x_{2c})] C_0 \omega_0 + \\
& + \sum_{k=1}^n [b_* (x_{1c}^k - x_{1c}) - a_* (x_{2c}^k - x_{2c})] C_k \omega_k \left. \right\}
\end{aligned}$$

Здесь x_{1c} , x_{2c} — координаты центра тяжести площади ω поперечного сечения, n — число вырезов сечения.

Для односвязного сечения формулы координат центра изгиба получаются из последних двух формул, если в фигурных скобках приравнять нулю третьи слагаемые.

Поступила 11 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
2. Прокопов В. К. О центре тяжести многосвязного профиля. Л., Научно-техн. информ. бюл. политехн. ин-та, № 7, 1960.
3. Амензаде Ю. А., Бубутейшвили Л. О. Центр изгиба консоли с многосвязным поперечным сечением. Докл. АН АзербССР, 1973, т. 29, № 10.
4. Амензаде Ю. А., Бубутейшвили Л. О. Определение центра изгиба консоли с многосвязным поперечным сечением. Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-матем. наук, 1975, № 1.
5. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М., «Высшая школа», 1976.