

**КРУЧЕНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ,
СПАЯННЫХ С КРУГЛЫМИ ПЛАСТИНАМИ
ИЛИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ**

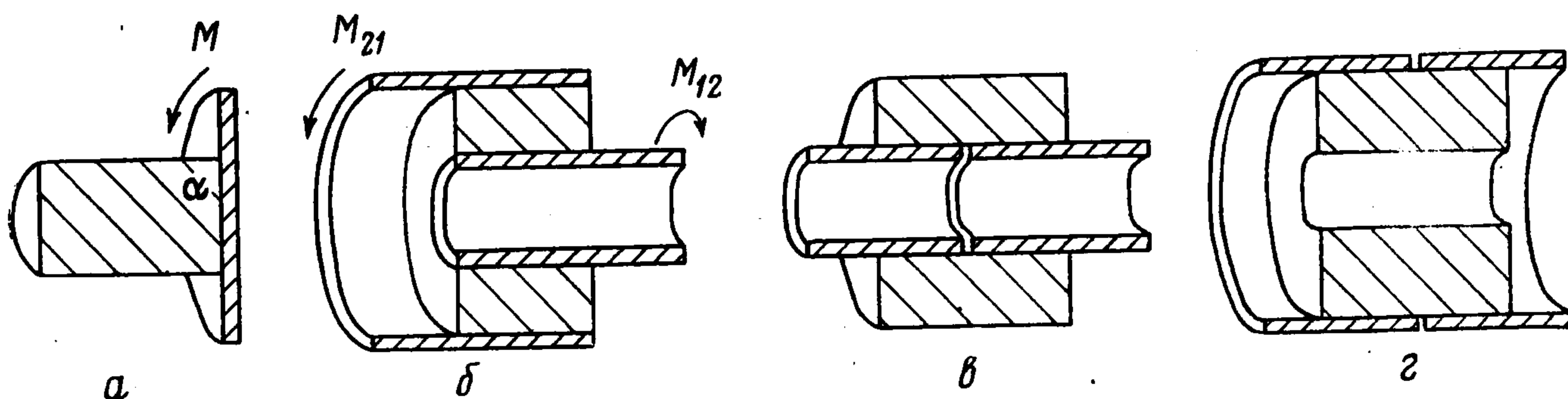
В. Б. Глаговский, Б. М. Нуллер

(Ленинград)

При определении напряженно-деформированного состояния конечных упругих тел, подкрепленных тонкостенными упругими элементами (стержнями, пластинами, оболочками), возникает следующая неклассическая спектральная задача¹. Требуется разложить в ряд по собственным функциям заданную граничную функцию, которая имеет конечный скачок на линии торцевого сечения тонкостенного элемента. Особенность этой задачи наглядно проявляется, например, в случае, когда граничная функция равна нулю всюду, кроме линии скачка.

В данной работе решены в замкнутой форме две задачи такого типа. Рассматривается кручение конечных упругих цилиндров, спаянных на торцах с круглыми пластинами постоянной толщины либо спаянных на боковых поверхностях с цилиндрическими оболочками постоянной толщины. Произвольные основные условия на боковой граничной поверхности цилиндра в первой задаче и на торцах цилиндра во второй задаче удовлетворяются точно с помощью выведенных в работе соотношений ортогональности; ранее подобные соотношения ортогональности с нагрузкой применялись при исследовании колебаний механических систем с сосредоточенными массами [1]. Впервые изучаются вопросы сходимости полученных решений и их поведение в угловых точках. Приводятся результаты численных расчетов.

1. Пусть к торцу $z = 1$ конечного упругого цилиндра $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq r \leq R$ припаяна круглая пластина постоянной толщины h , а другой



Фиг. 1

торец для определенности жестко зашцеилен (фиг. 1, а). К боковой поверхности приложены произвольные осесимметричные касательные усилия $f(z)$, в зоне контакта внешняя поверхность пластины не нагружена, по окружности $z = 1$, $r = R$ на ней действует крутящий момент M .

¹ Глаговский В. Б., Нуллер Б. М. Аналогн соотношений ортогональности Фурье и Шиффа в задачах для подкрепленных упругих областей. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4. Семинары Ленингр. политехн. ин-та.

Выпишем граничные условия для конечного цилиндра

$$(1.1) \quad v = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq R)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - \frac{1}{G_0 h} \tau_{\varphi z} = 0 \quad (z = 1, 0 \leq r \leq R)$$

$$(1.3) \quad \tau_{r\varphi} = f(z) \quad (r = R, 0 \leq z < 1)$$

$$(1.4) \quad \tau_{r\varphi} = MG(2\pi R^2 G_0 h)^{-1} \quad (r = R, z = 1)$$

где G_0 и G — модули сдвига материалов пластины и цилиндра соответственно. Решение задачи (1.1) — (1.4) будем искать в виде ряда по системе однородных решений задачи (1.1), (1.2)

$$(1.5) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} v^k, \quad v^k = G^{-1} A_k p_k I_1(p_k r) \sin p_k z \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\tau_{\varphi z}^k = A_k p_k^2 I_1(p_k r) \cos p_k z, \quad \tau_{r\varphi}^k = A_k p_k^2 I_2(p_k r) \sin p_k z$$

Здесь A_k — произвольные коэффициенты, I_n — функция Бесселя первого рода n -го порядка от мнимого аргумента, p_k — корни характеристического уравнения

$$(1.6) \quad \Delta(p) \equiv \beta p \sin p - \cos p = 0 \quad (\beta = G_0 h G^{-1})$$

Это уравнение имеет только простые вещественные корни, их асимптотика дается формулой

$$(1.7) \quad p_k = \pi k + O(k^{-1})$$

Однородные решения (1.5) удовлетворяют следующему соотношению ортогональности (δ_{kn} — символ Кронекера):

$$(1.8) \quad \int_0^1 \sin p_k z \sin p_n z dz + \beta \sin p_k \sin p_n = \delta_{kn} \gamma_k$$

$$\gamma_k = 1/2 (1 + \beta \sin^2 p_k)$$

Это соотношение и краевые условия (1.3), (1.4) позволяют следующим образом найти коэффициенты A_k . Положим формально в соответствии с (1.3), (1.5)

$$(1.9) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin p_n z, \quad a_n = A_n p_n^2 I_2(p_n R)$$

Умножая обе части первого равенства на $\sin p_k z$, интегрируя по z от нуля до единицы и пользуясь (1.8), получим

$$(1.10) \quad a_k = \gamma_k^{-1} \int_0^1 f(z) \sin p_k z dz + \beta \gamma_k^{-1} \sin p_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin p_n$$

Выясним смысл второго слагаемого в правой части (1.10). Из (1.4) и (1.5) имеем

$$M = 2\pi R^2 \beta \sum_{n=1}^{\infty} A_n p_n^2 I_2(p_n R) \sin p_n = 2\pi R^2 \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin p_n$$

Следовательно, (1.10) можно записать в виде

$$(1.11) \quad a_k = \gamma_k^{-1} \int_0^1 f(z) \sin p_k z dz + \frac{M \sin p_k}{2\pi R^2 \gamma_k}$$

Тем самым задача (1.1) — (1.4) решена в замкнутой форме. В частности, если боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, то

$$(1.12) \quad A_k = M \sin p_k [2\pi R^2 \gamma_k p_k^2 I_2(p_k R)]^{-1}$$

и контактные напряжения между цилиндром и пластиной вычисляются на основании (1.5), (1.6), (1.12) по формуле

$$(1.13) \quad \tau_{\varphi z}(r, 1) = \frac{M}{2\pi R^2 \beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(p_k r)}{p_k (1 + \varepsilon_k) I_2(p_k R)}$$

$$\varepsilon_k = \frac{1 + \beta}{\beta^2 p_k^2}$$

Характер поведения контактных напряжений при $r \rightarrow R$ нетрудно установить, пользуясь известными асимптотическими формулами для беселевых функций [2] и формулой (1.7). Согласно (1.13) имеем

$$(1.14) \quad \tau_{\varphi z}(r, 1) \sim \frac{M}{2\pi^2 R^2 \beta} \ln \frac{1}{R-r} \quad (r \rightarrow R)$$

Заметим, что найденная логарифмическая особенность неустойчива. Если угол α острый, она исчезает, если тупой — переходит в степенную. Это следует из анализа решения функционального разностного уравнения [3], определяющего антиплоскую деформацию клина с упругой накладкой.

2. Пусть теперь конечный полый упругий цилиндр $l_1 \leq z \leq l_2$, $R_1 \leq r \leq R_2$ спаян своими цилиндрическими поверхностями $r = R_j$ с оболочками постоянной толщины h_j ($j = 1, 2$). На торцах цилиндра $z = l_s$ ($s = 1, 2$) заданы осесимметричные касательные напряжения $g_s(r)$, на торцах оболочек — крутящие моменты M_{j_s} (фиг. 1, б).

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (-1)^{j-1} \frac{1}{G_{0j} h_j} \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r = R_j, j = 1, 2)$$

$$(2.2) \quad \tau_{\varphi z}(r, l_s) = g_s(r) \quad (R_1 < r < R_2, s = 1, 2)$$

$$(2.3) \quad \tau_{\varphi z}(R_j, l_s) = M_{j_s} G (2\pi G_{0j} h_j R_j^2)^{-1} \quad (s = 1, 2; j = 1, 2)$$

где G_{0j} — модуль сдвига j -й оболочки, G — модуль сдвига материала цилиндра, и выполняется условие равновесия

$$(2.4) \quad \int_{R_1}^{R_2} g_1(r) r^2 dr + \frac{1}{2\pi} (M_{11} + M_{21}) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) r^2 dr + \frac{1}{2\pi} (M_{12} + M_{22})$$

Решение запишем в виде ряда

$$(2.5) \quad v = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k, \quad v^k = A_k G^{-1} p_k e^{p_k z} Z_1(p_k, r) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\tau_{\varphi z}^k = A_k p_k^2 e^{p_k z} Z_1(p_k, r), \quad \tau_{r\varphi}^k = -A_k p_k^2 e^{p_k z} Z_2(p_k, r)$$

$$v^0 = A_0 G^{-1} r z, \quad \tau_{\varphi z}^0 = A_0 r$$

$$Z_n(p, r) = \beta_1 p [Y_1(p R_1) J_n(pr) - J_1(p R_1) Y_n(pr)] - \\ - [Y_2(p R_1) J_n(pr) - J_2(p R_1) Y_n(pr)]$$

Здесь J_m и Y_m — функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода соответственно; v^k , $\tau_{r\varphi}^k$, $\tau_{\varphi z}^k$ — система однородных решений задачи (2.1), $\beta_j = G_{0j}h_jG^{-1}$ ($j = 1, 2$); числа p_k удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\beta_2 p Z_1(p, R_2) + Z_2(p, R_2) = 0$$

Можно показать, что все корни этого уравнения вещественные и простые, асимптотика их при фиксированных $\beta_j > 0$ ($j = 1, 2$) имеет вид

$$p_k = \pi k (R_2 - R_1)^{-1} + O(k^{-1})$$

Согласно формулам (8), (11) § 5.11 и (12) § 3.63 [2] однородные решения (2.5) удовлетворяют следующему соотношению ортогональности:

$$(2.6) \quad \int_{R_1}^{R_2} Z_1(p_k, r) Z_1(p_n, r) r dr + \sum_{j=1}^2 \beta_j R_j Z_1(p_k, R_j) Z_1(p_n, R_j) = \delta_{kn} \gamma_k$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \left[R_2^2 Z_1^2(p_k, R_2) \left(1 + \beta_2^2 p_k^2 + \frac{4\beta_2}{R_2} \right) - \frac{4}{\pi^2 p_k^2} \left(1 + \beta_1^2 p_k^2 - \frac{4\beta_1}{R_1} \right) \right]$$

Подставив ряд (2.5) в условие (2.2), используя соотношение (2.6) и условия (2.3), получим два уравнения для определения коэффициентов A_k и A_{-k} ($k = 1, 2, \dots$)

$$p_k^2 \gamma_k (A_k e^{p_k l_s} - A_{-k} e^{-p_k l_s}) = \int_{R_1}^{R_2} g_s(r) Z_1(p_k, r) r dr + \frac{1}{2\pi R_2} Z_1(p_k, R_2) M_{2s} + \frac{1}{\pi^2 R_1^2 p_k} M_{1s} \quad (s = 1, 2)$$

Из условия равновесия (2.4) и формулы (1) § 5.1 [2] получим

$$A_0 \gamma_0 = \int_{R_1}^{R_2} g_1(r) r^2 dr + \frac{1}{2\pi} (M_{11} + M_{21})$$

$$\gamma_0 = \beta_2 R_2^3 + \beta_1 R_1^3 + \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

Если $M_{js} \neq 0$, то $\tau_{r\varphi}(z, R_j) = O(\ln |z - l_s|)$ при $z \rightarrow l_s$, если $M_{js} = 0$, то $\tau_{r\varphi}(z, R_j) = O(1)$.

Аналогично решаются и другие задачи о кручении тонкостенных труб, соединенных цилиндрическими втулками (см., например, фиг. 1, в, г). Кроме того, изложенный метод можно применять к задачам совместного кручения оболочек и конечных упругих тел, ограниченных коническими, сферическими и эллипсоидальными поверхностями.

3. Рассмотрим на примере первой задачи вопросы обоснования полученных решений. Они сводятся к исследованию ряда (1.9), из сходимости которого сразу следует сходимость ряда (1.5) для v при $r = R$; сходимость рядов (1.5) при $r < R$ очевидна.

Будем пока считать, что коэффициенты ряда (1.9) определяются формулой (1.11) при $M = 0$, и b_k — синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$a_k = \gamma_k^{-1} \int_0^1 f(t) \sin p_k t dt, \quad b_k = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) \sin \pi k t dt$$

Введем обозначения

$$I = \int_a^b f(t) dt, \quad T_m(t, x; \beta) = \sum_{k=1}^m \sin p_k t \sin p_k x \gamma_k^{-1}$$

$$D_m(t, x) = 2 \sum_{k=1}^m \sin \pi k t \sin \pi k x, \quad S_n(t, x; \beta) = T_n(t, x; \beta) - D_N(t, x)$$

о выборе числа N будет сказано ниже. Тогда

$$(3.1) \quad \int_0^1 f(t) S_n(t, x; \beta) dt = \sum_{k=1}^n a_k \sin p_k x - \sum_{k=1}^N b_k \sin \pi k x$$

Исследование поведения интеграла в левой части формулы (3.1) позволяет связать вопрос сходимости ряда (1.9) с известными результатами о сходимости синус-ряда Фурье функции $f(x)$.

Воспользуемся соотношением

$$(3.2) \quad S_n(t, x; \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(w) dw, \quad \varphi(w) = \frac{2 \sin xw \sin tw}{\sin w \Delta(w)}$$

где контур L — прямоугольник с вершинами $(\pm Bi, C_n \pm Bi)$, $p_n < C_n < < p_{n+1}$, $C_n \neq \pi k$, N — целая часть $\pi^{-1} C_n$, функция $\Delta(w)$ определена в (1.6). Так как интеграл по мнимой оси, взятый в смысле главного значения, равен нулю, при $x + t < 2$ получим

$$(3.3) \quad S_n(t, x; \beta) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n - Bi}^{C_n + Bi} \varphi(w) dw$$

В силу неравенств

$$|S_n(t, x; \beta)| \leq \frac{Q}{(2-x-t)C_n}, \quad \left| \int_0^t S_n(t, x; \beta) dt \right| \leq \frac{Q}{(2-x-t)C_n^2}$$

непосредственно вытекающих из (3.2), (3.3) (Q — постоянная), можно получить следующий аналог теоремы Римана — Лебега: если при $[a, b] \subset \subset [0, 1]$ интеграл I существует и абсолютно сходится, то при $0 \leq x < 1$ (если $b < 1$, то при $0 \leq x \leq 1$) имеет место оценка

$$\int_a^b f(t) S_n(t, x; \beta) dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin p_k x - \sum_{k=1}^N b_k \sin \pi k x = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0 \leq x < 1)$$

Отсюда, из (1.7) и из теоремы Римана — Лебега вытекает равносходимость ряда (1.9) и синус-ряда Фурье. Следовательно, достаточным условием для сходимости ряда (1.9) к функции $f(x)$ при $0 \leq x < 1$ (равномерной сходимости при $0 \leq x \leq 1 - \delta$, $\delta > 0$) является сходимость (равномерная сходимость) синус-ряда Фурье к функции $f(x)$. Если, в частности, $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то [4] $b_n = O(n^{-\alpha})$,

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin \pi k x - f(x) = O(n^{-\alpha} \ln n)$$

и тот же порядок имеет отклонение частичных сумм ряда (1.9) от функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости ряда (1.9) вблизи точки $x = 1$. Аналогично (3.2), (3.3) получим

$$\int_0^1 f(t) T_n(t, x; \beta) dt = \sum_{k=1}^n a_k \sin p_k x$$

$$T_n(t, x; \beta) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n - Bi}^{C_n + Bi} K(w, x, t) dw$$

$$K(w, x, t) = \begin{cases} \psi(w, x) \sin tw, & 0 \leq t < x \leq 1 \\ \psi(w, t) \sin xw, & 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(w, x) = \frac{2}{\Delta(w)} [\beta w \sin(x-1)w + \cos(x-1)w]$$

Используя оценки ($0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$)

$$\left| \int_0^t T_n(t, x; \beta) dt \right| = O(1)$$

$$\left| \int_0^t T_n(t, 1; \beta) dt \right| = O\left(\frac{1}{C_n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

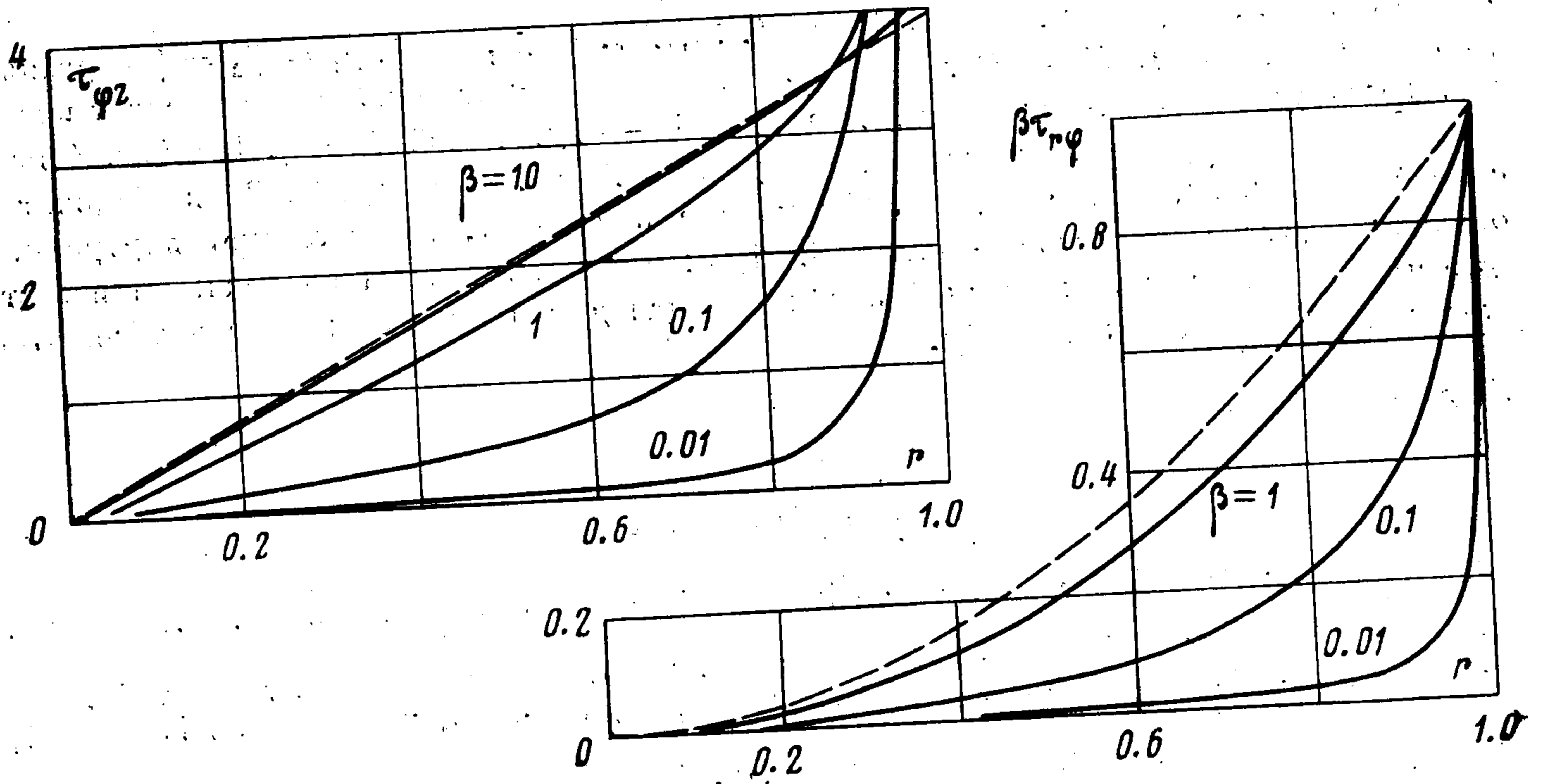
можно показать, что если существует и абсолютно сходится интеграл I , функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $(\lambda, 1)$ ($0 < \lambda < 1$) и $f(1) = 0$, то имеет место равномерная сходимость ряда (1.9) вблизи $x = 1$.

Пусть теперь в формуле (1.11) $M \neq 0$, $f(z) \equiv 0$. Тогда ряд (1.9) сходится к нулю при $0 \leq x < 1$ и к M при $x = 1$. Это легко проверить, рассматривая комплексные интегралы

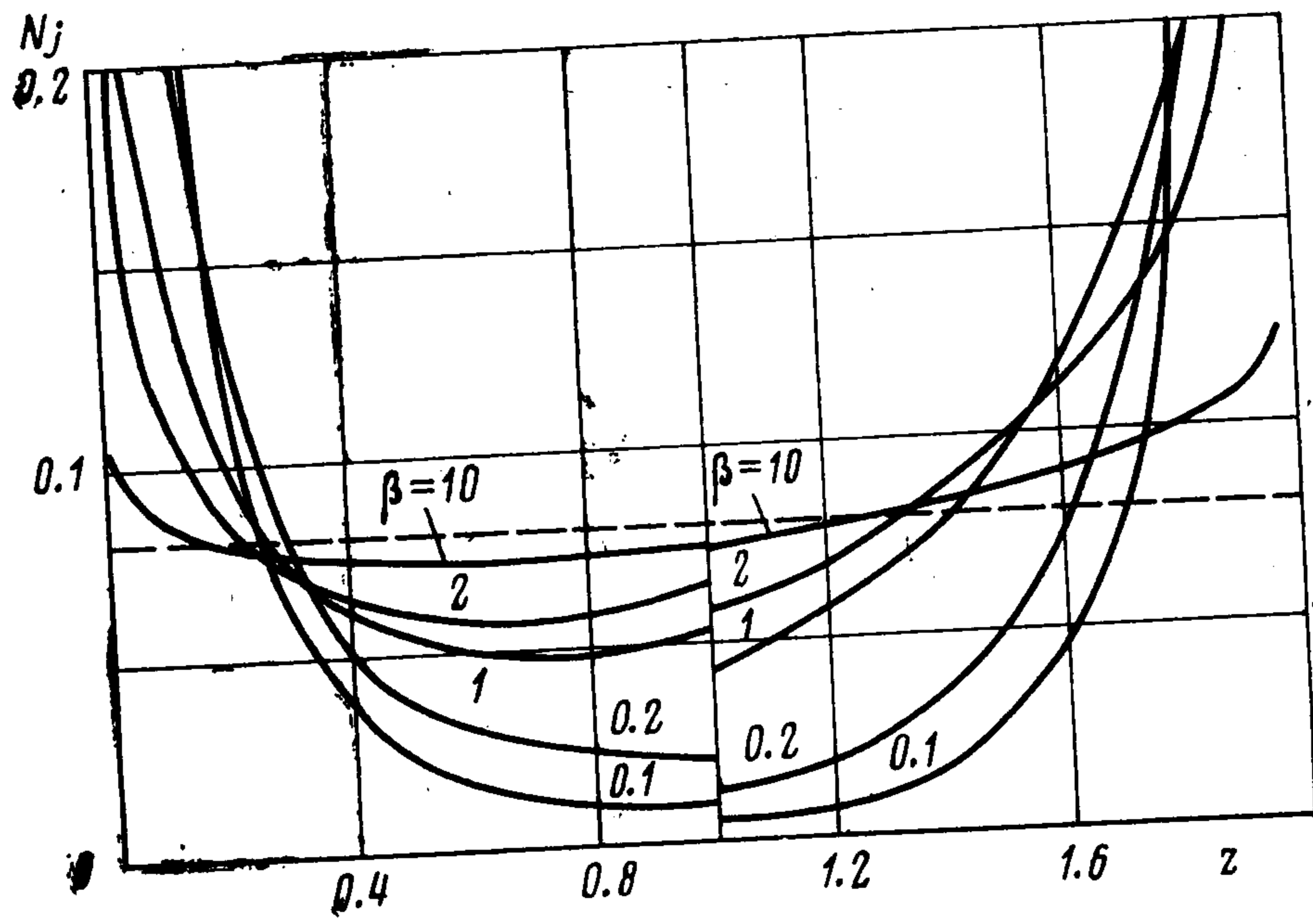
$$\int_{L_1} \frac{(\beta + 1) \sin w + \beta w \cos w}{\Delta(w)(1 + \beta + \beta^2 w^2)} dw, \quad \int_{L_2} \frac{\sin xw}{\Delta(w)} dw$$

где контур L_1 — окружность радиуса C_n с центром в начале координат, L_2 — прямоугольник с вершинами $(\pm \pi(n + 1/2), \pm \ln n)$.

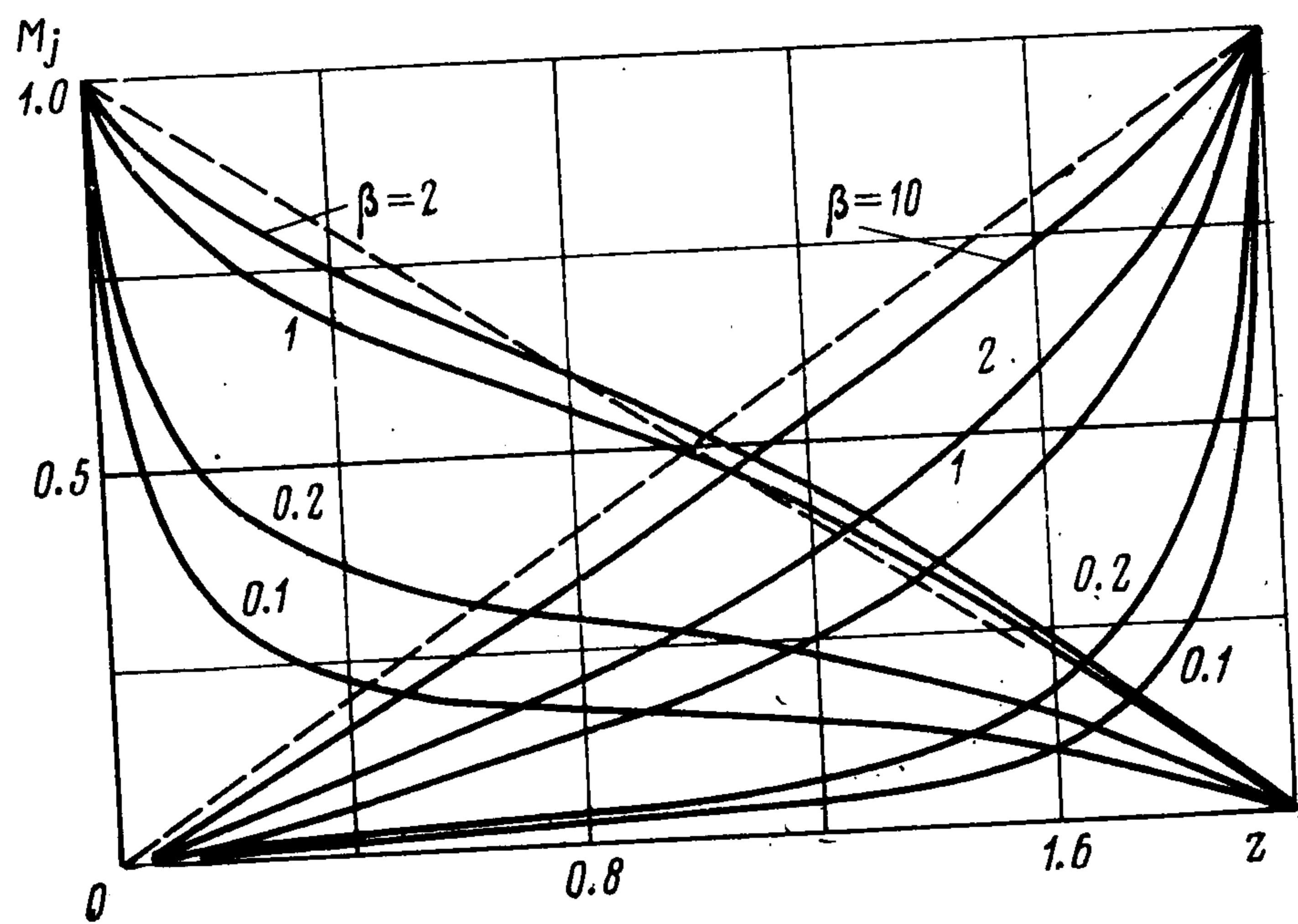
4. Решение задач, [схематически изображенных на фиг. 1, запрограммированы для ЭВМ М-222. Ниже приводятся некоторые результаты численных расчетов. Фиг. 2 относится к задаче (1.1) — (1.4) [при $R = 1$, $f(z) \equiv 0$, $M = 2\pi$ и разных значениях β ; показаны графики распределения контактных напряжений $\tau_{\varphi z}(1, r)$ и усилий $\beta \tau_{r\varphi}(1, r)$ в пластине. Фиг. 3 и 4 относятся к задаче (2.1) — (2.3) при $R_1 = 1$, $R_2 = 2$,



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$l_1 = 0, l_2 = 2, g_s(r) \equiv 0, M_{ss} = 0 (s = 1, 2), M_{21} = M_{12} = 1, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ и разных β . Графики функций $N_j = R_j \tau_{r\varphi}(z, R_j)$ на левой половине фиг. 3 соответствуют внешней контактной поверхности ($j = 2$), на правой — внутренней ($j = 1$). На фиг. 4 изображены графики моментов касательных усилий $M_j = 2\pi R_j^2 \beta_j \tau_{\varphi z}(z, R_j)$ в оболочках; семейство кривых, проходящих через начало координат, соответствует внутренней оболочке, другое семейство — внешней. Пунктирными линиями изображены известные предельные решения рассматриваемых задач для плоского штампа и абсолютно жестких цилиндрических обоек.

Поступила 20 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука» 1966.
2. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
3. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. М., «Мир», 1965.