

**МЕТОД ПАРНЫХ РЯДОВ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ  
В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ**

**В. М. Александров, М. И. Чебаков**

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются собственно смешанные осесимметричные задачи теории упругости для круглой плиты конечного радиуса и толщины. Смешанные граничные условия задаются на торцах плиты. На боковой поверхности ставятся граничные условия, которые позволяют рассматриваемые задачи свести к парным рядам по функциям Бесселя. Для решения парных рядов используется общий метод [1], основанный на сведении их к бесконечной алгебраической системе первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов. Путем точного обращения главной сингулярной части получена бесконечная система второго рода, приближенное решение которой осуществляется методом редукции на ЭЦВМ. Получен также главный член асимптотики решения для случая малой относительной толщины плиты. В качестве примеров подробно изучены две задачи о кручении плиты штампом. Приведены результаты числовых расчетов.

**1. Сведение парного ряда к бесконечной системе.** Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  упругую плиту, занимающую область  $0 \leq z < h, r \leq R$ . Контактная задача о вдавливании штампа в торец плиты  $z = h$ , жестко защемленной по основанию  $z = 0$  или свободно лежащей на жестком основании  $z = 0$ , при условии, что на боковой поверхности

$$u_r(z, R) = 0, \quad \tau_{rz}(z, R) = 0$$

или

$$\sigma_r(z, R) = 0, \quad u_z(z, R) = 0$$

может быть сведена к исследованию парного уравнения-ряда вида

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k K(u_k) J_\nu(u_k x) = f(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(u_k x) = 0 \quad (a < x \leq R)$$

$$(1.2) \quad K(u) = A \frac{p_1(u^2)}{p_2(u^2)} = A \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1}, \quad A = \text{const}$$

Здесь  $a_k$  — неизвестные коэффициенты,  $J_\nu(x)$  — функции Бесселя ( $\nu \geq -1/2$ ),  $K(u)$  — четная мероморфная функция, представимая в виде (1.2), где  $\pm i\delta_n$  и  $\pm i\gamma_n$  — счетное множество простых нулей и полюсов. Рассматривая уравнение (1.1) в общем виде, будем предполагать, что  $\delta_n$  и  $\gamma_n$

монотонно возрастают по модулю с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (1.2), а на любой правильной системе контуров  $C_n$  в плоскости комплексного переменного  $u$  имеет место оценка

$$K(u) = O(|u|^p), \quad p \leq 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$u_k$  — нули уравнения

$$(1.3) \quad \left[ \frac{d}{dx} J_\nu(u_k x) + \alpha J_\nu(u_k x) \right]_{x=R} = 0$$

Пусть в (1.1)  $f(x) = J_\nu(i\epsilon x)$ . При этом будем иметь в виду, что в общем случае функция  $f(x)$  может быть разложена в ряд по функциям  $J_\nu(i\epsilon_k x)$ . Тогда парное уравнение-ряд (1.1) будет равносильно [1] следующей бесконечной системе:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (B_1 + B_2) X(\epsilon) &= D_1(\epsilon) + D_2(\epsilon) \\ B_1 &= \left\{ \frac{\gamma_m K_{\nu-1}(\gamma_m a) I_\nu(\delta_n a) + \delta_n I_{\nu-1}(\delta_n a) K_\nu(\gamma_m a)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) K_\nu(\gamma_m a) I_\nu(\delta_n a)} \right\} \\ B_2 &= - \left\{ \frac{\gamma_m I_{\nu-1}(\gamma_m a) I_\nu(\delta_n a) - \delta_n I_{\nu-1}(\delta_n a) I_\nu(\gamma_m a)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) K_\nu(\gamma_m a) I_\nu(\delta_n a)} B(\gamma_m, R) \right\} \\ D_1(\epsilon) &= \left\{ \frac{\gamma_m K_{\nu-1}(\gamma_m a) I_\nu(\epsilon a) + \epsilon I_{\nu-1}(\epsilon a) K_\nu(\gamma_m a)}{(\gamma_m^2 - \epsilon^2) K_\nu(\gamma_m a) K(i\epsilon)} \right\} \\ D_2(\epsilon) &= - \left\{ \frac{\gamma_m I_{\nu-1}(\gamma_m a) I_\nu(\epsilon a) - \epsilon I_{\nu-1}(\epsilon a) I_\nu(\gamma_m a)}{(\gamma_m^2 - \epsilon^2) K_\nu(\gamma_m a) K(i\epsilon)} B(\gamma_m, R) \right\} \\ B(\gamma_m, R) &= \frac{\gamma_m K_{\nu-1}(\gamma_m R) - (\alpha - \nu/R) K_\nu(\gamma_m R)}{\gamma_m I_{\nu-1}(\gamma_m R) + (\alpha - \nu/R) I_\nu(\gamma_m R)} \end{aligned}$$

Здесь  $B_i = \{b_{m,n}^{(i)}\}$  — матрицы,  $D_i(\epsilon) = \{d_m^{(i)}(\epsilon)\}$ ,  $X(\epsilon) = \{x_n(\epsilon)\}$  — вектор-столбцы бесконечного порядка ( $i = 1, 2$ ).

Связь между коэффициентами  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) уравнения (1.1) и решением бесконечной системы (1.4) выражается соотношением

$$(1.5) \quad q(x) = \begin{cases} K^{-1}(i\epsilon) J_\nu(i\epsilon x) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\epsilon) J_\nu(i\delta_n x) I_\nu^{-1}(\delta_n a) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x \leq R) \end{cases}$$

$$(1.6) \quad q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(u_k x)$$

Предполагая, что  $|\gamma_m|, |\delta_m| \sim m$  ( $\delta_m \neq \gamma_m$ ) при  $m \rightarrow \infty$ , и учитывая асимптотическое представление функций  $K_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , систему (1.4) можно регуляризовать путем выделения и обращения бесконечной матрицы  $A$  с элементами

$$(1.7) \quad a_{mn} = (\delta_n - \gamma_m)^{-1}, \quad A = \{a_{mn}\}$$

Используя матрицу  $A^{-1}$ , обратную к  $A$ , с элементами [2]

$$(1.8) \quad \tau_{nm} = [(K_-^{-1}(i\gamma_m))' K_+'(-i\delta_n) (\gamma_m - \delta_n)]^{-1}, \quad A^{-1} = \{\tau_{nm}\}$$

$$K_+(u) = K_-(-u) = \sqrt{A} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{i\delta_n}\right) \left(1 + \frac{u}{i\gamma_n}\right)^{-1}$$

систему (1.4) сведем к бесконечной системе второго рода

$$(1.9) \quad X(\varepsilon) = A^{-1}(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon)) - A^{-1}(B_1 + B_2 - A)X(\varepsilon)$$

решение которой при определенных значениях входящих в нее параметров может быть получено методом последовательных приближений [2].

Если в бесконечной системе (1.4) перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , то матрица  $B_2$  и вектор-столбец  $D_2(\varepsilon)$  обратятся в нуль и получим бесконечную систему

$$B_1 X(\varepsilon) = D_1(\varepsilon)$$

соответствующую контактными задачам для упругого слоя.

**2. Кручение штампом круглой плиты.** Остановимся на решении двух смешанных задач теории упругости о кручении штампом круглой плиты при условии жесткого защемления боковой грани (задача 1) и отсутствия на ней напряжений (задача 2). Поставленные задачи будут эквивалентны следующим двум краевым задачам относительно функции перемещений  $v(r, z)$  вдоль оси  $\theta$ :

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

$$(2.2) \quad v = \delta r \quad \text{при } 0 \leq r \leq a, z = h$$

$$\tau_{z\varphi} = G \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при } a < r < R, z = h$$

$$v = 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq R, z = 0$$

$$(2.3) \quad v = 0 \quad \text{при } r = R, 0 \leq z \leq h \quad (\text{задача 1})$$

$$(2.4) \quad \tau_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0 \quad \text{при } r = R, 0 \leq z \leq h \quad (\text{задача 2})$$

Здесь  $\delta$  — угол поворота штампа,  $a$  — радиус штампа,  $R$  — радиус плиты,  $h$  — высота плиты,  $G$  — модуль сдвига.

Разыскивая  $v(r, z)$  в виде

$$(2.5) \quad v(r, z) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sh} u_n z (u_n \operatorname{ch} u_n h)^{-1} J_1(u_n r)$$

для определения коэффициентов  $a_n$  получаем парное уравнение-ряд (1.1), в котором следует положить

$$(2.6) \quad v = 1, f(x) = x, K(u) = u^{-1} \operatorname{th} uh$$

При этом дифференциальное уравнение (2.1) и краевые условия (2.2) будут удовлетворены. Удовлетворяя условиям (2.3) и (2.4), для определения постоянных  $u_k$  для задач 1 и 2 получим соответственно уравнения

$$(2.7) \quad J_1(u_k R) = 0, \quad J_2(u_k R) = 0$$

которые являются частным случаем уравнения (1.3) при  $\alpha = \infty$  и  $\alpha = 1$ .

Контактные напряжения под штампом определяются из соотношения

$$(2.8) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(u_n r) \quad (0 \leq r \leq a)$$

Учитывая соотношение

$$r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_1(\varepsilon r)$$

и (1.5), (1.6), получим

$$(2.9) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} q(x) = \\ = G\delta \left( \frac{r}{h} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n I_1(\delta_n r) I_1^{-1}(\delta_n a) \right), \quad y_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} x_n(\varepsilon)$$

где  $x_n(\varepsilon)$  — решение бесконечной системы (1.4) при  $\nu = 1$ ,  $\alpha = \infty$  (задача 1) и  $\alpha = 0$  (задача 2). Дифференцируя по  $\varepsilon$  систему (1.4) и полагая после этого  $\varepsilon = 0$ , для определения коэффициентов  $y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) получим бесконечную систему

$$(2.10) \quad B \cdot Y = D, \quad B = B_1 + B_2 = \{b_{mn}\}, \quad Y = \{y_n\}, \quad D = \{d_n\} \\ d_m = \frac{a [K_2(\gamma_m a) - B(\gamma_m, R) I_2(\gamma_m a)]}{2h\gamma_m K_1(\gamma_m a)}, \quad \delta_n = \frac{\pi n}{h}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2h} \\ B(\gamma_m, R) = -\frac{K_1(\gamma_m R)}{I_1(\gamma_m R)} \quad (\text{задача 1}) \\ B(\gamma_m, R) = \frac{K_2(\gamma_m R)}{I_2(\gamma_m R)} \quad (\text{задача 2})$$

Матрицы  $B_1$  и  $B_2$  описаны в (1.4) при  $\nu = 1$ .

Используя соотношение (2.9), получим связь между моментом  $M$ , приложенным к штампу, и углом поворота  $\delta$

$$(2.11) \quad M = G\delta a^3 \pi \left[ \frac{a}{2h} + \frac{4}{a} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{I_2(\delta_n a)}{\delta_n I_1(\delta_n a)} \right]$$

Для задачи 2 при  $R = a$  из (2.10) получим  $d_m = 0$ ,  $b_{mn} \neq 0$ , и, следовательно, решение бесконечной системы (2.10)  $y_n \equiv 0$ . Таким образом при  $R = a$  формулы (2.9) и (2.11) дадут известное точное решение задачи о кручении стержня штампом, радиус которого равен радиусу стержня.

Найдем главный член асимптотики решения бесконечной системы (2.10) при малых  $h/a$  и  $(R-a)/h > 0$ . Используя зависимость  $\delta_n = \pi n/h$ ,  $\gamma_m = \pi(2m-1)/2h$  и асимптотику функций  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  при больших значениях аргумента  $x$ , для малых значений  $h/a$  будем иметь

$$(2.12) \quad B_1 = A + B_3, \quad B_3 \sim \{3 [8a^2 \gamma_m \delta_n (\delta_n - \gamma_m)]^{-1}\} \\ D \sim \left\{ a \frac{1 \pm \exp(-2\gamma_m(R-a))}{2h\gamma_m} \right\} = D_0 \\ B_2 \sim \left\{ \frac{\pm \exp(-2\gamma_m(R-a))}{\delta_n + \gamma_m} \right\}$$

где элементы матрицы  $A$  есть (1.7). Здесь и далее знак плюс соответствует задаче 1, минус — задаче 2.

Воспользовавшись малостью элементов матриц  $B_2$  и  $B_3$  по сравнению с элементами матрицы  $A$  при  $h/a \rightarrow 0$  и  $(R-a)/h > R_0 > 0$ , получим

бесконечную систему

$$(2.13) \quad AY_0 = D_0, \quad Y_0 = \{y_n^\circ\}$$

решение которой будет главным членом асимптотики решения бесконечной системы (2.10) при малых  $h/a$  и  $(R-a)/h > R_0 > 0$ . Матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$  с элементами (1.8), которые для рассматриваемых задач принимают вид

$$(2.14) \quad \tau_{nm} = \frac{(2n-1)!!(2m-3)!!}{h(2n-2)!!(2m-2)!!(2n-2m+1)}$$

Кроме того, известно [2] решение бесконечной системы (2.13) с правой частью  $\{a/(2h\gamma_m)\}$ . Используя этот факт и обратную матрицу (2.14), получим решение системы (2.13) в виде

$$(2.15) \quad y_n^\circ = \frac{a(2n-1)!!}{h(2n-2)!!} \left[ \frac{1}{4\pi} \pm \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!! \exp(-\pi(R-a)(2m-1)/h)}{(2m-2)!!(2n-2m+1)(2m+1)} \right]$$

При малых  $h/a$  формулу (2.11) асимптотически можно преобразовать к виду

$$(2.16) \quad M = \pi G \delta a^3 \left( \frac{a}{2h} + \frac{4h}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} y_n^\circ \right)$$

а формулу (2.9), если  $0 < \varepsilon_0 < r \leq a$ , — к виду

$$(2.17) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \left[ \frac{r}{h} + 2\sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^\circ E^n(r) \right]$$

$$E(r) = \exp\left[-\frac{\pi}{h}(a-r)\right]$$

Если  $r \rightarrow 0$ , то

$$(2.18) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \left[ \frac{r}{h} + \frac{\pi^2 r}{h} \sqrt{\frac{2a}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^\circ n \sqrt{n} E^n(0) + O(r^3) \right]$$

Ряд в (2.17) сходится равномерно при всех  $r \leq a - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ . При  $r \rightarrow a$  ряд расходится, что свидетельствует о наличии особенности у функции  $\tau_{r\varphi}(r, 0)$ . Выделим эту особенность, для чего (2.15) преобразуем к виду

$$(2.19) \quad y_n^\circ = \frac{a}{2h} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left[ 1 \pm \frac{2}{\pi} \gamma_0\left(\frac{R-a}{h}\right) \mp \frac{2}{\pi} \gamma_n\left(\frac{R-a}{h}\right) \right]$$

$$\gamma_n(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!! \exp[-\pi x(2m-1)]}{(2m-2)!!(2n-2m+1)} \quad (n=0, 1, \dots)$$

Подставляя (2.19) в (2.17) и суммируя один из рядов, получим

$$(2.20) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \left\{ \frac{r}{h} + \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{a}{h} \left[ 1 \pm \frac{2}{\pi} \gamma_0\left(\frac{R-a}{h}\right) \right] \times \right.$$

$$\times [(1 - E(r))^{-1/2} - 1] \mp \frac{2a}{\pi h} \sqrt{\frac{a}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times$$

$$\left. \times \gamma_n\left(\frac{R-a}{h}\right) E^n(r) \right\} \quad (0 < \varepsilon_0 < r \leq a)$$

Здесь ряд при  $r = a$  сходится и особенность явно выделена. При больших значениях параметра  $(R - a) / h$

$$(2.21) \quad y_n^0 = \frac{a}{2h} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left[ 1 \pm \frac{4}{\pi} E^{-1}(R) \frac{n}{2n-1} \right]$$

и тогда при фиксированном малом значении параметра  $h/a$  и больших значениях параметра  $(R - a) / h$

$$(2.22) \quad \tau_{r\varphi}(r, 0) = G\delta \left\{ \frac{r}{h} + \frac{a}{h} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ (1 - E(r))^{-1/2} - 1 \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \frac{2}{\pi} \frac{E(r)}{E(R)} (1 - E(r))^{-1/2} \right] \right\} \\ M = \pi G\delta a^3 \left[ \frac{a}{2h} + \frac{2 \ln 4}{\pi} \pm \frac{8}{\pi^2 E(R)} \right]$$

Заметим, что при малых  $h/a$  и  $(R - a) / h \rightarrow \infty$  формулы (2.22) будут совпадать с соответствующими результатами работы [3], где рассматривалась задача о кручении штампом слоя.

Формула (2.22) позволяет сделать вывод о том, что при фиксированном малом значении  $h/a$  влияние боковой поверхности плиты на распределение контактных напряжений под штампом экспоненциально затухает с увеличением параметра  $(R - a) / h$  и практически уже при  $(R - a) / h \geq 1$  этим влиянием можно пренебречь.

Как показывают числовые расчеты, формулу (2.22) можно использовать с относительной погрешностью, не превышающей 10% при  $h/a \leq 0.5$  и  $(R - a) / h \geq 0.3$ .

Для получения решения рассматриваемых задач для тех областей изменения параметров, где асимптотические формулы, выведенные выше, теряют свою эффективность, исследуем бесконечную систему (2.10) методом урезания, предварительно регуляризовав ее по схеме (1.9).

Урезанную систему представляем в виде

$$(2.23) \quad y_n = \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{nm} d_m + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{m=1}^N \tau_{nm} b_{mk} \right) y_k \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

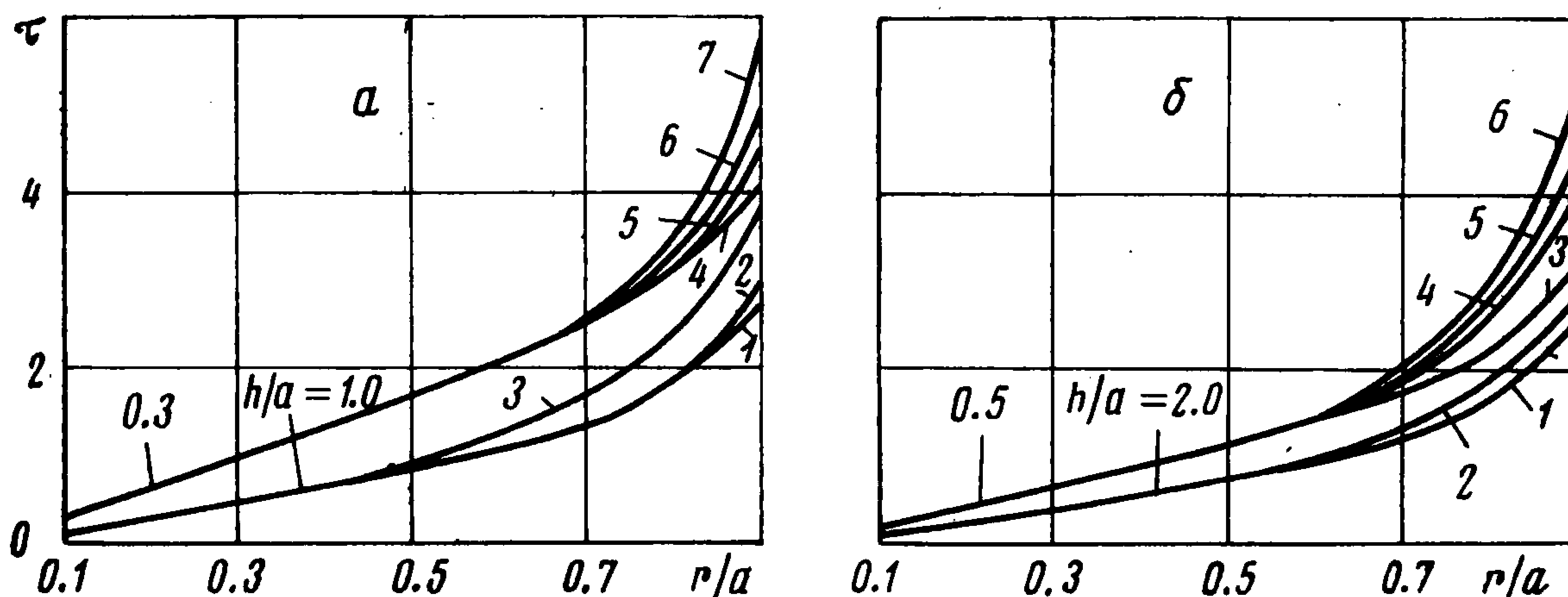
и находим ее решение на ЭЦВМ. Значение  $N$  выбираем в зависимости от заданной точности. Как показывают числовые расчеты, сходимость метода урезания улучшается при увеличении параметра  $(R - a) / h$ . Одновременно с решением системы (2.23) вычислялось значение величины

$$\mu = \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=1}^N \left| \sum_{m=1}^N \tau_{nm} b_{mk} \right|$$

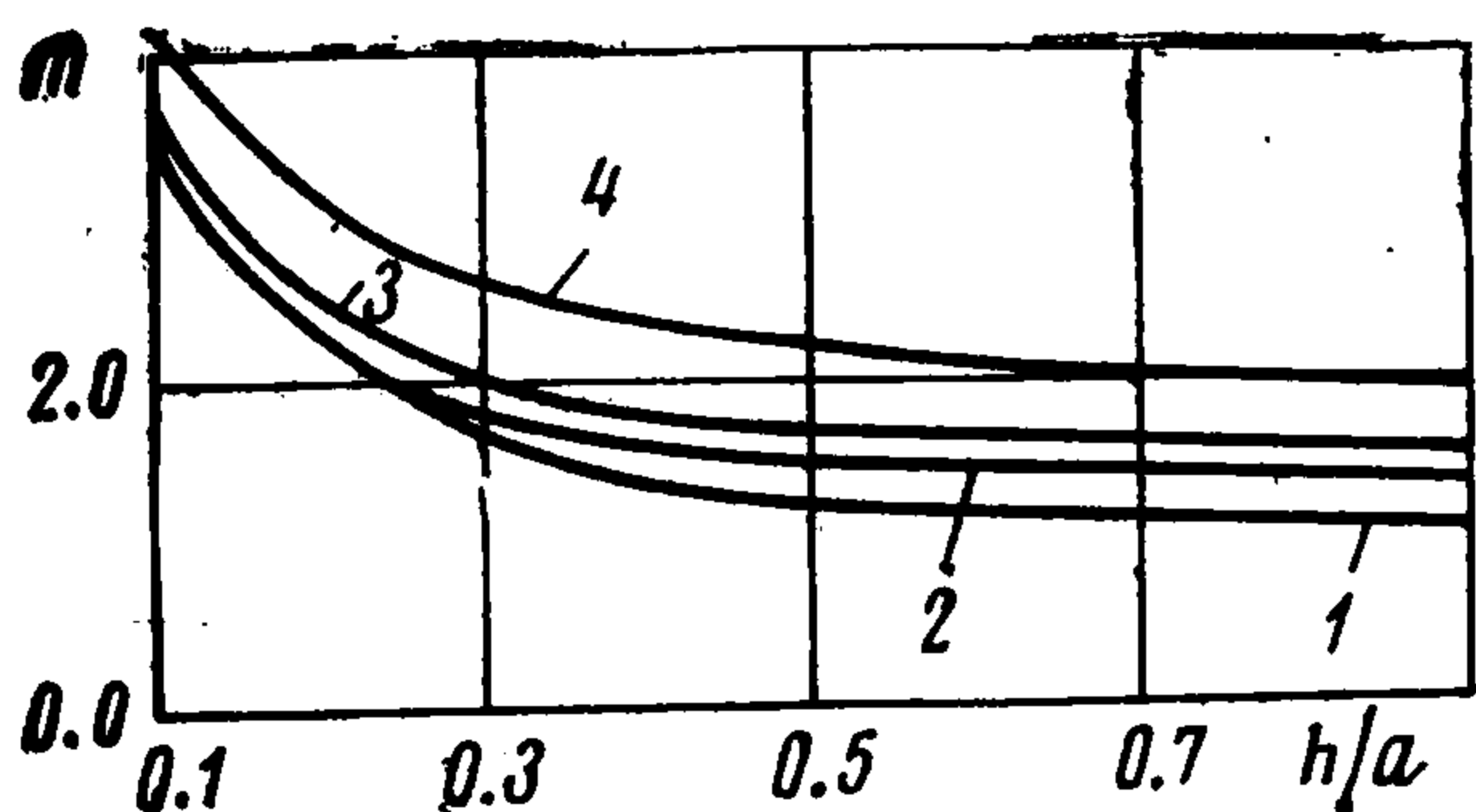
что позволяло приближенно судить о том, при каких значениях параметров  $R/a$  и  $h/a$  решаемая бесконечная система будет вполне регулярной.

Так, например, при  $N = 43$ ,  $\mu < 1$ , если  $R/a = 1.05$ ,  $h/a \leq 4.10$  (0.28),  $R/a = 1.1$ ,  $h/a \leq 4.05$  (0.39);  $R/a = 2$ ,  $h/a \leq 4.28$  (2.09);  $R/a = 4$ ,  $h/a \leq 4.3$  (4.07). Здесь число в скобках соответствует задаче 2, рядом стоящее без скобок — задаче 1. При этом, если в неравенствах последнюю цифру увеличить на единицу, то при таком и большем значении параметра  $h/a$  будет  $\mu \geq 1$ .

На фиг. 1 приведены зависимости величины  $\tau = \tau_{r\varphi}(r, 0) (G\delta)^{-1}$  от  $r/a$  для некоторых значений параметров  $h/a$  и  $(R-a)/a$  для задачи 1, вычисленные методом урезания бесконечной системы по схеме (2.23) и по формуле (2.9) при  $N = 43$ . Кривые



Фиг. 1



Фиг. 2

1—7 на фиг. 1, а построены соответственно при следующих значениях параметров  $h/a$  и  $(R-a)/a$ : 1,  $\infty$ ; 1, 0.5; 1, 0.1; 0.3,  $\infty$ ; 0.3, 0.1; 0.3, 0.05; 0.3, 0.01. Кривые 1—6 на фиг. 1, б — при следующих: 2,  $\infty$ ; 2, 0.5; 0.5,  $\infty$ ; 0.5, 0.1; 0.5, 0.05; 0.5, 0.01. На фиг. 2 приведены зависимости величины  $m = 3M (16G\delta a^3)^{-1}$  от  $h/a$  для значений параметра  $(R-a)/a = \infty, 0.1, 0.05, 0.01$  (соответственно кривые 1—4). При  $(R-a)/a = \infty$  кривые построены по асимптотическим формулам работы [3], где рассматривалась задача о кручении штампом слоя. С этими кривыми на фиг. 1 практически сливаются кривые распределения напряжений под штампом, если  $(R-a)/h \geq 1$ .

Графики показывают, что боковая поверхность плиты оказывает преимущественное влияние на распределение напряжений под штампом вблизи его границы.

Поступила 26 VI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
2. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Александров В. М., Александрова Г. П. Кручение круглым штампом жестко защемленного по основанию слоя. В сб.: Пластинки и оболочки. Ростов-на-Дону, Тр. Ростовск. инж.-строит. ин-та, 1971.