

НЕСТАЦИОНАРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ КАПИЛЛЯРНАЯ ВОЛНА В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов

(Москва)

В нелинейной постановке рассматривается динамика слоя вязкой жидкости с учетом капиллярных сил. Решена задача о распространении в глубь слоя волны, вызванной пониженным давлением на его краю.

Задача распространения возмущений в жидком слое с учетом капиллярных сил ранее исследована в линейной постановке [1].

1. Постановка задачи. Пусть толщина h слоя вязкой жидкости, граничащего хотя бы с одной стороны с газом, изменяется на характерном расстоянии $l \gg h$ и выполнены условия $h^2 \ll \nu\tau$, $h^2v / (lv) \ll 1$, где ν — кинематическая вязкость, τ — характерное время изменения h , v — скорость жидкости в слое. Тогда поток жидкости Q через единичное сечение слоя локально мало отличается от стационарного потока в плоской щели [1]

$$(1.1) \quad Q = - (h^3k / 3\mu)\text{grad } p, \quad p = p_0 - \sigma n \Delta h, \quad k = 1, 1/4 \\ n = 1, 1/2$$

здесь μ — динамическая вязкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения, давление p отличается от давления в газе p_0 на величину капиллярного давления. Величина k в (1.1) равна единице, если одна поверхность слоя граничит с твердым телом, а другая — свободная. Величина $k = 1/4$, если на обеих поверхностях касательная скорость равна нулю, что] возможно в присутствии поверхностно-активных веществ. Величина $n = 1$, если слой граничит с твердой поверхностью. Если обе границы свободные, то $n = 1/2$.

Присоединяя к (1.1) уравнение сохранения массы

$$(1.2) \quad \text{div } Q + \partial h / \partial t = 0$$

как в [1], получаем уравнение для $h(x, t)$ (x — координата вдоль слоя). В плоской задаче это уравнение имеет вид

$$(1.3) \quad \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{\sigma k n}{3\mu}$$

Решения ряда задач для этого уравнения исследованы в линейном приближении в [1]. Представляет интерес (например, в связи с задачами слияния пузырей или динамики пленок пен) решение следующей нелинейной краевой задачи.

Однородный в одном направлении слой толщины h_∞

$$(1.4) \quad p \rightarrow p_0, \quad h \rightarrow h_\infty, \quad x \rightarrow \infty$$

граничит с областью постоянного пониженного давления (мениск), где $p = p_0 - p_\sigma$ и, следовательно

$$(1.5) \quad \sigma n \partial^2 h / \partial x^2 \rightarrow p_\sigma, \quad x \rightarrow -\infty$$

В этой области толщина слоя неограниченно возрастает

$$h \approx a_0 x^2 + a_1 x + \text{const} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty$$

Коэффициент a_0 просто выражается через перепад давления p_σ . Задание второго коэффициента a_1 соответствует в главном фиксации положения мениска вдоль оси x . Выбор a_1 здесь произволен, так как в силу условия (1.4) задача рассматривается с точностью до трансляции.

Необходимо найти асимптотический вид функции $h(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, не зависящий от начальных условий при $t = 0$.

2. Автомодельное решение. Рассмотрим вспомогательную задачу, имеющую реальный физический смысл. Пусть вместо (1.5) выполнены условия

$$(2.1) \quad h = 0, \quad Q = 0, \quad x = 0$$

соответствующие пережатию слоя до нулевой толщины в точке $x = 0$. Так как отсутствует параметр размерности длины, то в соответствии с теорией размерности [2] возможно автомодельное решение. Оно имеет вид

$$(2.2) \quad h = h_\infty y(\zeta), \quad \zeta = x (4\kappa h_\infty^3 t)^{-1/4}$$

Уравнению (1.3) и условию (1.4) соответствует

$$(2.3) \quad (y^3 y''')' = \zeta y'; \quad y \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

Условию (2.1) с учетом (1.1) будет соответствовать

$$(2.4) \quad y = 0, \quad y^3 y''' = 0, \quad \zeta = 0$$

Прежде всего представляет интерес поведение решения краевой задачи (2.3), (2.4) при $\zeta \rightarrow \infty$. Исследуя линеаризованное уравнение (2.3) в пределе $\zeta \rightarrow \infty$, получим, что асимптотика y зависит от двух постоянных c_1 и c_2

$$y = 1 + c_1 \zeta^{-2/3} \exp(-3/8 \zeta^{4/3} - 31/72 \zeta^{-4/3} - 3/4 \zeta^{-8/3} + \dots) \times \\ \times \cos(c_2 + 3/8 \sqrt{3} \zeta^{4/3} - 31/72 \sqrt{3} \zeta^{-4/3} + 3/4 \sqrt{3} \zeta^{-8/3} + \dots)$$

Постоянные c_1 и c_2 можно найти, удовлетворяя двум условиям (2.4).

Асимптотику при $\zeta \rightarrow 0$ решения уравнения (2.3), удовлетворяющую (2.4), можно найти, применив метод последовательных приближений

$$(2.5) \quad y = b\zeta + \frac{\zeta^2}{4b^2} (\ln \zeta + d) + \frac{\zeta^3}{144b^5} \left(-5 \ln \zeta - 5d + \frac{59}{6} \right) + \dots$$

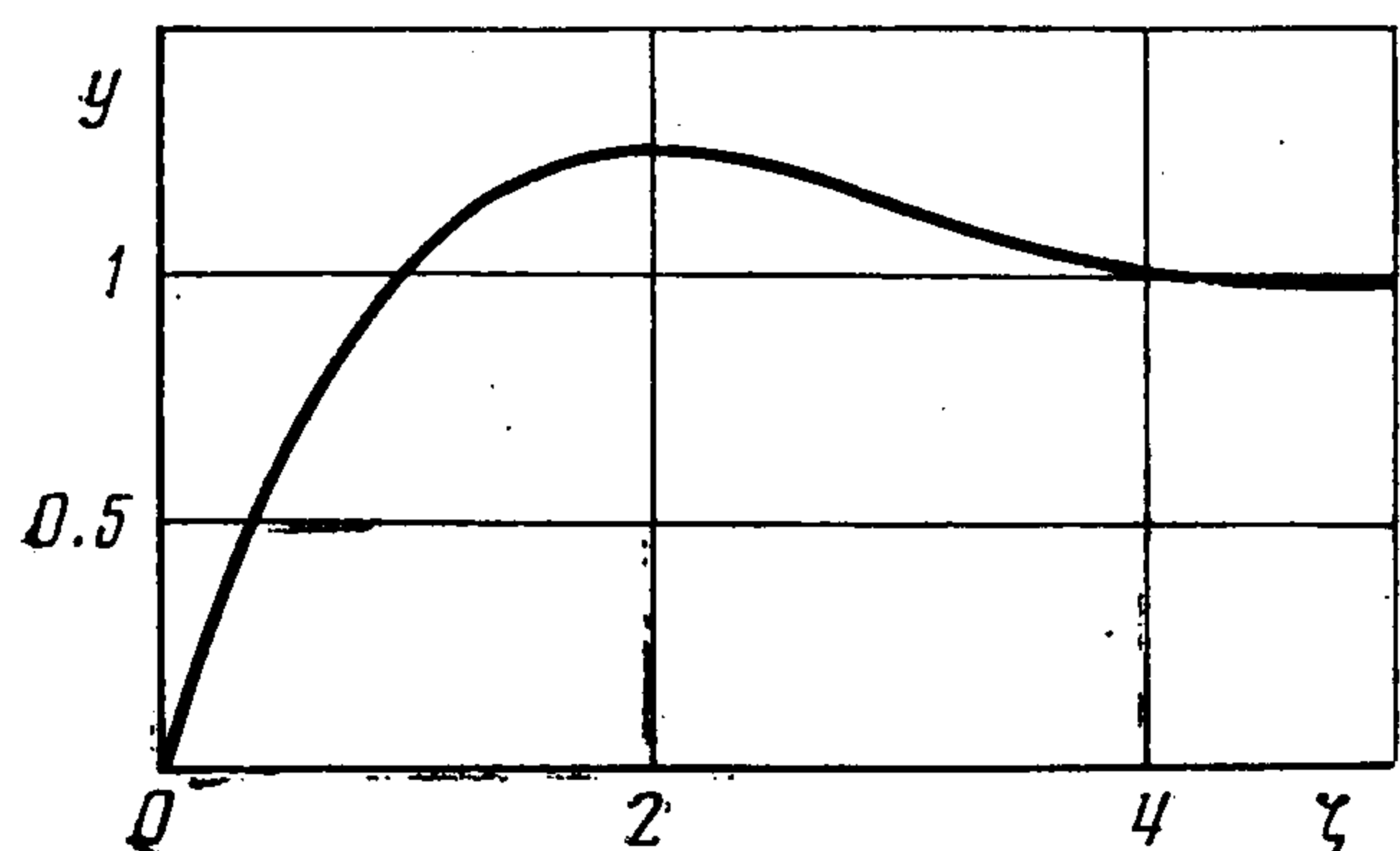
Входящие сюда произвольные постоянные b и d наиболее просто найти, если учесть инвариантное преобразование уравнения (2.3)

$$(2.6) \quad y = \theta^{4/3} y_1, \quad \zeta = \theta \zeta_1$$

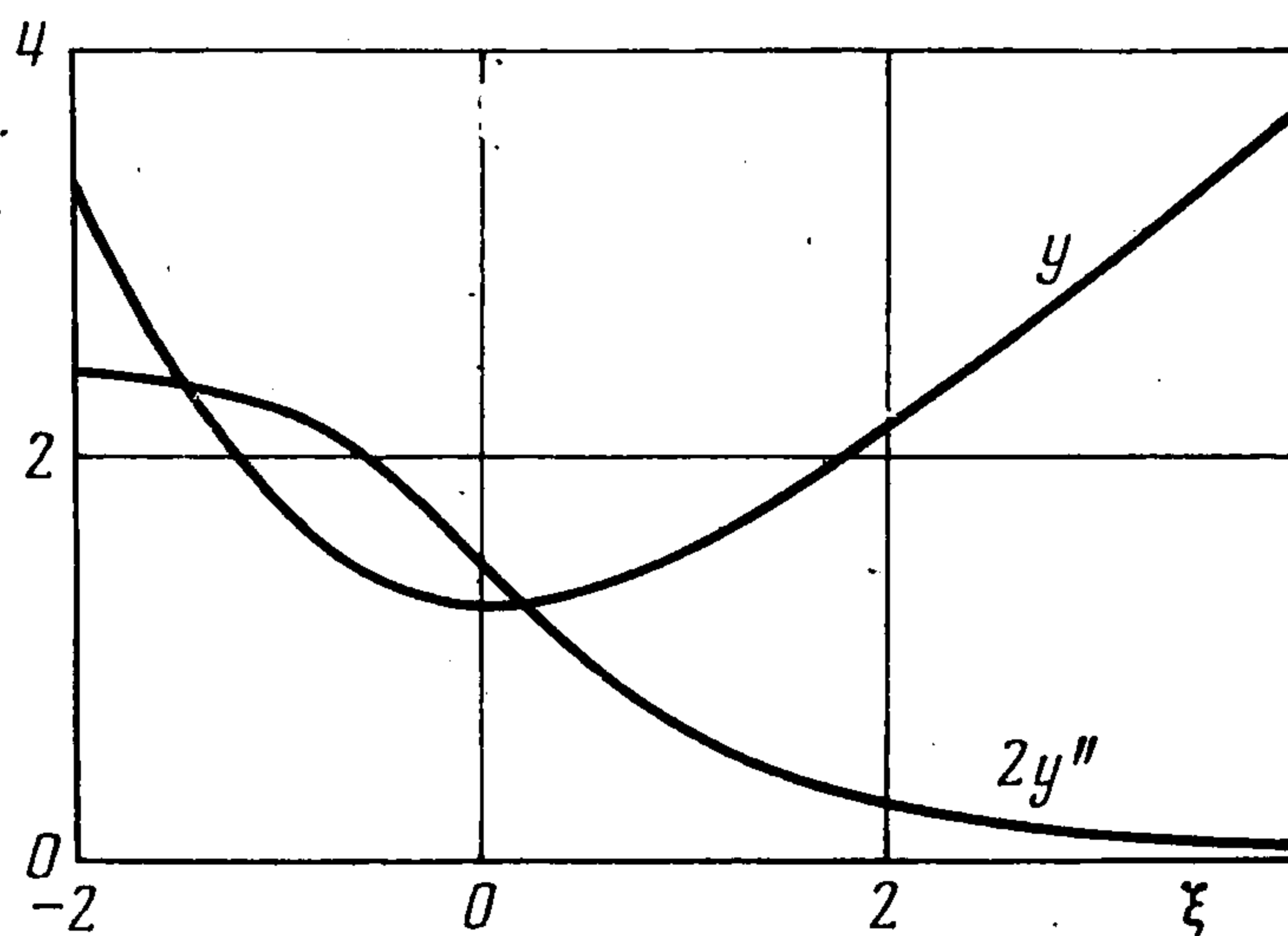
Постоянные в (2.5) преобразуются по формулам

$$b = \theta^{1/3} b_1, \quad d = d_1 - \ln \theta$$

Достаточно для $b_1 = 1$ произвести численные расчеты решения уравнения (2.3), продолжая асимптотику (2.5), и определить значение d_1 ,



Фиг. 1



Фиг. 2

при котором $y_1 \rightarrow y_\infty = \text{const}$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Инвариантное преобразование (2.6) с параметром $\theta = y_\infty^{-3/4}$ дает решение исходной краевой задачи (2.3), (2.4). В итоге получим

$$(2.7) \quad b = 0.628, \quad d = -6.70$$

график $y(\zeta)$ представлен на фиг. 1.

3. Приближенное решение. В области, где слой переходит в мениск, на котором толщина h изменяется по параболе, будем искать приближенное решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию (1.5) и условию

$$(3.1) \quad \partial^2 h / \partial x^2 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

вместо условия (1.4). Затем произведем сращивание.

Проинтегрируем обе части (1.3) от значения $x = x_0$, где толщина минимальна

$$(3.2) \quad \kappa h^3 \left| \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right| = Q_0 - \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial t} dx, \quad Q_0 = Q(x_0, t) < 0$$

В предположении (далее проверяется), что

$$(3.3) \quad |Q_0| \gg \left| \int_{x_0}^x \frac{\partial h}{\partial t} dx \right|$$

задачу (3.1), (3.2), (1.5) можно привести к следующему виду:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \kappa h^3 \partial^3 h / \partial x^3 &= - |Q_0(t)|; & \partial h / \partial x &\rightarrow c(t), & x &\rightarrow \infty \\ n\sigma \partial^2 h / \partial x^2 &\rightarrow p_\sigma, & x &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Здесь функции $Q_0(t)$ и $c(t)$ пока произвольны. Задача (3.4) имеет решения вида

$$(3.5) \quad \begin{aligned} h &= f(t)y(\xi), & \xi &= (x - x_0) / l(t) \\ l &= (n\sigma / p_\sigma) q_0 c, & f &= (n\sigma / p_\sigma) q_0 c^2 \end{aligned}$$

Постоянная q_0 и функция $y(\xi)$ определяются из решения краевой задачи

$$(3.6) \quad y^3 y''' = -1; \quad y'' \rightarrow q_0; \quad \xi \rightarrow -\infty; \quad y' \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow +\infty$$

При $\xi \rightarrow \infty$ асимптотика $y(\xi)$ имеет вид

$$(3.7) \quad y(\xi) = \xi - \frac{1}{2} \ln \xi + \frac{1}{4} \xi^{-1} (\ln \xi + \frac{11}{6}) + \frac{1}{16} \xi^{-2} (\ln^2 \xi + \frac{5}{3} \ln \xi + \frac{5}{36}) + \dots$$

Численное решение задачи (3.6) с учетом (3.7) позволяет найти $y(\xi)$ (см. фиг. 2) и определить q_0 и минимальное значение $y(\xi)$

$$(3.8) \quad q_0 = 1.210, \quad y_{\min} = 1.259$$

При этом минимальное значение толщины слоя h_{\min} и поток Q_0 таковы:

$$(3.9) \quad h_{\min} = \frac{n\sigma}{p_\sigma} q_0 c^2 y_{\min}, \quad Q_0 = -\frac{n\sigma}{p_\sigma} \kappa q_0 c^5$$

Используя формулы (3.5) и асимптотику (3.7), найдем, что условие (3.3) выполнено в области

$$(3.10) \quad 2\kappa n \sigma q_0 c^5 \gg p_\sigma |dc/dt| (x - x_0)^2$$

Как видно из (3.7) или фиг. 2 и аналогичного асимптотического представления при $\xi \rightarrow -\infty$, масштаб найденного решения есть $|\xi - \xi_0| \sim 1$ или $|x - x_0| \sim l$. Учитывая это, получим из (3.5) и (3.10) условие существования найденного приближенного решения

$$(3.11) \quad 2\kappa p_\sigma c^3 \gg n \sigma q_0 |dc/dt|$$

4. Динамика полубесконечного слоя. Решения п. 2, 3 позволяют построить составное решение задачи, поставленной в п. 1. Введем промежуточный масштаб λ

$$(4.1) \quad \lambda^2 |dc/dt| = 2q_0 \kappa c^5 N, \quad N = n\sigma / p_\sigma$$

на котором Q_0 и интеграл в (3.2) имеют один и тот же порядок. Если $x - x_0 \gg \lambda$, то в (3.2) величина Q_0 пренебрежимо мала и в точке $x = x_0$ справедливо условие (2.1). Если при этом

$$(4.2) \quad x - x_0 \ll L = (4\kappa h_\infty^3 t)^{1/4}, \quad x_0 = 0$$

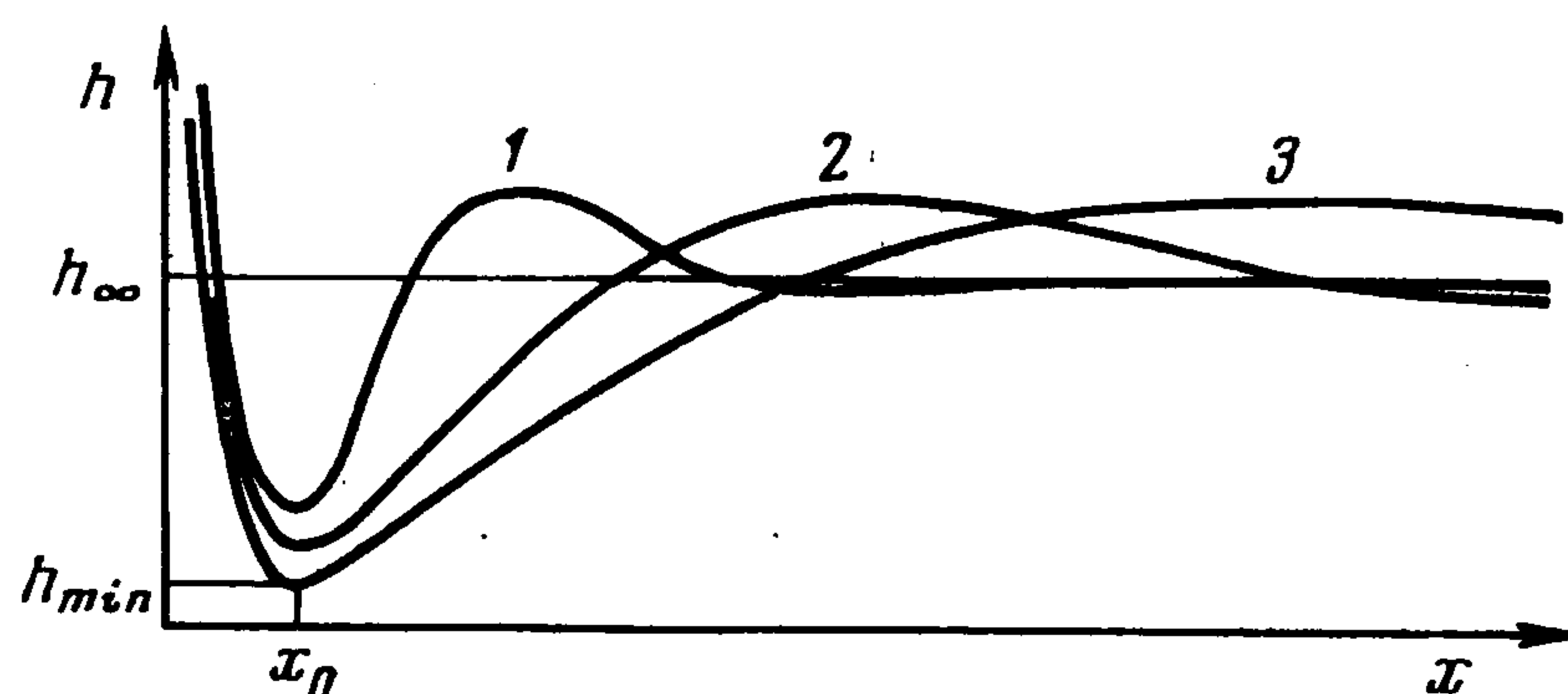
где L — масштаб автомодельного решения в (2.2), то применимо асимптотическое представление (2.5). Сравнивая первые члены двух асимптотических представлений h по формулам (3.7), (3.5) и (2.5), (2.2), находим с учетом (2.7) и (3.8)

$$(4.3) \quad c = b\chi^{1/4}, \quad \chi = h_\infty / (4\kappa t)$$

В итоге получаем составное решение, определяемое в области $x - x_0 \gg \lambda$ формулой (2.2) и в области $x - x_0 \ll \lambda$ формулой (3.5). Параметры решения в (3.5) и (3.9) следующие:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} l &= q_0 b N \chi^{1/4}, \quad f = q_0 b^2 N \chi^{1/2} \\ h_{\min} &= y_{\min} q_0 b^2 N \chi^{1/2}, \quad Q_0 = -\kappa q_0 b^5 N \chi^{5/4} \\ N &= n\sigma / p_\sigma, \quad \chi = h_\infty / (4\kappa t) \end{aligned}$$

здесь l — характерный масштаб переходной области от нелинейной волны (2.2) к мениску, h_{\min} — наименьшая толщина, значения постоянных q_0 , b , y_{\min} известны из (2.7) и (3.8). Полученное решение схематически представлено на фиг. 3 для последовательных моментов времени 1, 2, 3. Одновременно с проникновением волны в глубь слоя по закону $L \sim t^{1/4}$ толщина слоя в непрерывно сужающейся ($l \sim t^{-1/4}$) краевой области убывает как $t^{-1/2}$.



Фиг. 3

Условие применимости решения п. 2 заключается в существовании области (4.2). Неравенство (4.2) возможно, если $L \gg \lambda$. При этом из (4.1)—(4.3) следует условие

$$2 (\kappa h_{\infty} t)^{1/4} \gg \sqrt{n\sigma / p_0}$$

Можно показать, что одновременно будет выполняться условие (3.11) применимости решения п. 3.

5. Пленка конечных размеров. Пусть круглая пленка радиуса r граничит по окружности с мениском, в котором давление понижено на величину p_0 по сравнению с давлением в газе. В начальный момент $t = 0$ пленка имеет однородную толщину. Очевидно, для моментов времени, когда масштаб L волны, вызываемый пониженным давлением на краю, много меньше радиуса пленки r , задача динамики пленки сводится к плоской задаче, решение которой получено выше. Из условия $L \sim r$ находим характерное время τ , через которое после начала процесса пленка начнет утоньшаться в центре

$$(5.1) \quad \tau \approx r^4 / (4\kappa h_{\infty}^3)$$

Формула (5.1) с точностью до несущественного числового множителя совпадает с аналогичной формулой [1] для времени, за которое возмущения в слое распространяются на расстояние r .

При $t \approx \tau$ значение минимальной толщины на краях пленки имеет порядок

$$(5.2) \quad h_{\min} \approx (n\sigma / p_0) 0.6 h_{\infty}^2 / r^2$$

Для моментов времени $t \gg \tau$ можно ожидать, что давление внутри пленки на расстояниях порядка r меняется слабо, волна вырождается и решение близко к

$$(5.3) \quad h = h_0(t) (1 - z^2 / r^2)$$

Здесь z — расстояние от центра пленки. Частное решение уравнений (1.1) и (1.2), близкое к (5.3), возможно, если

$$(5.4) \quad 64 h_0^4 \kappa \gg r^4 | dh_0 / dt |$$

Из (1.1) и (1.2) следует

$$(5.5) \quad \kappa h^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = - \frac{1}{z} \int_0^z z \frac{\partial h}{\partial t} dz$$

На краю пленки, при $z \approx r$ масштаб изменения толщины $l \ll r$, и в левой части уравнения (5.5) главным членом является старшая производная

$$(5.6) \quad \kappa h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{1}{r} \int_0^r z \frac{\partial h}{\partial t} dz, \quad x = r - z$$

Краевое условие с учетом (5.3) запишется в виде

$$(5.7) \quad \partial^2 h / \partial x^2 \rightarrow 0, \quad \partial h / \partial x \rightarrow 2h_0 / r, \quad x \rightarrow +\infty$$

Задача (5.6), (5.7), (1.5) расчета переходной области от пленки к мениску эквивалентна краевой задаче (3.4). Точка, в которой толщина h минимальна, есть $z = r$, следовательно, $x_0 = 0$. Интеграл с (5.6) с асимптотической точностью вычисляется с использованием (5.3). С учетом формул (3.9) получим

$$(5.8) \quad h_0 = \left(\frac{p_\sigma r^6}{2^9 q_0 n \sigma \kappa t} \right)^{1/4}, \quad h_{\min} = \frac{q_0 n \sigma}{p_\sigma} \left(\frac{2h_0}{r} \right)^2 y_{\min}$$

Параметры q_0 и y_{\min} определены (3.8). По порядку величины вторая формула (5.8) соответствует (5.2). Условие (5.4) выполнено при $p_\sigma r^2 \gg h_0 \sigma$.

Свободная поверхность в области больших значений h , в том числе мениск, определяется из уравнений равновесия. В частном случае свободная поверхность вне пленки и переходной области размером $\sim l$ может представлять сферу радиуса R . В этом случае $p_\sigma \approx 2\sigma / R$. Если, кроме того, ограничиться случаем жидкого слоя, граничащего с твердой поверхностью ($\kappa = \sigma / 3\mu$, $n = 1$), то формулы (5.8) оказываются близкими к аналогичным формулам [3], полученным из интуитивных соображений.

Нельзя согласиться с утверждениями [4] об ошибках авторов работы [3]. Напротив, именно работа [4] является ошибочной.

В работе [4] сделана попытка сформулировать некоторый итерационный метод решения уравнений динамики тонкого слоя. Если представить уравнение относительно h в виде $Ah = \partial h / \partial t$, где A — дифференциальный оператор, зависящий только от координат, то этот метод можно кратко переписать в форме $Ah_{k+1} = \partial h_k / \partial t$, $k = 0, 1, \dots$. За нулевое приближение принято $h_0 = f(t)$. Авторы ограничиваются только вычислением величины h_1 и отождествляют ее с приближенным решением задачи.

Такой метод решения ошибочен по следующим причинам.

Во-первых, этот метод безусловно требует, чтобы приближаемая функция h заведомо мало отличалась от $h_0 = f(t)$, в частности, потому, что используется только первое приближение. Следовательно, толщина слоя должна мало меняться вдоль координат. Авторы же пытаются рассматривать задачи, в которых h существенно меняется вдоль координат.

Во-вторых, авторы [4] подчеркивают, что основное уравнение их работы, которое кратко можно записать в виде $Ah_1 = \partial h_0 / \partial t \equiv \partial f / \partial t$, можно рассматривать, как полученное в упрощающем предположении, что радиальный поток $Q(t, r) = a(t)r$. Это неправильное предположение. Из п. 5 данной работы ясно видно, что $Q(t, r) = = 1/2 (dh_0 / dt) (r^3 / 2l^2 - r)$, так как пленка близка к линзе (5.3), а не к плоскопараллельному слою.

В-третьих, в методе [4] совершенно утрачен фундаментальный волновой характер решений, приводящий к тому, что возмущения толщины тонкого макроскопического слоя очень медленно распространяются вдоль него [1]. Работа [4] противоречит строгим результатам [1], полученным в линейном приближении. В частности, утоньшение плоскопараллельного слоя должно начинаться с краев. Согласно же [4] оно сразу начинается с центра слоя. Это также ошибочный результат, обязанный только неправильному методу [4].

Область применимости гидродинамической теории ограничена пленками, макроскопическими по толщине. Возможность гидродинамического описания теряется при $h \sim 10^{-6}$ см. При толщинах пленки $h \lesssim 10^{-5}$ см. необходимо учитывать силы Ван дер Ваальса.

Полученные выше решения важны для исследования вопроса о разрушении пленок. В отсутствие электростатического отталкивания поверхностных слоев при $h_{\min} \sim 10^{-5}$ см жидкость будет быстро вытекать за счет сил Ван дер Ваальса из области минимальной толщины, и пленка разрушится в этой узкой краевой области, аналогично [5].

Автор благодарит В. В. Струминского за обсуждение результатов работы.

Поступила 17 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил. ПМТФ, 1970, № 1.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
3. Frankel S. P., Mysels K. J. On the «dimpling» during the approach of two interfaces. J. Phys. Chem., 1962, vol. 66, No. 1.
4. Буевич Ю. А., Липкина Э. Х. Об истечении жидкости из осесимметричных пленок. ПМТФ, 1975, № 2.
5. Воинов О. В. К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости. ПМТФ, 1974, № 3.