Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 532.516

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ КРОМКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

В. П. Шидловский

(Москва)

Сформулированная Карманом [1] задача о ламинарном течении несжимаемой жидкости под воздействием равномерно вращающегося диска имеет надежное численное решение при условии, что радиус диска считается бесконечно большим [2]. Обобщение на случай диска конечного радиуса при достаточно больших числах Рейнольдса целесообразно провести приемами асимптотического исследования, применявшимися при изучении течения вблизи задней кромки плоской пластины [3, 4]. Таким путем устанавливается структура ближнего следа за кромкой диска, а также порядок размеров переходной области, которая должна быть введена для удовлетворения всех граничных условий. Задача об исследовании течения в этой области сводится к решению уравнений пространственного пограничного слоя со специальными граничными условиями. Изучается асимптотическое поведение соответствующих решений по мере приближения к областям основного течения и ближнего следа, определяется вид главного поправочного члена в выражении коэффициента момента сил трения для диска конечных размеров.

1. Рассмотрим установившееся течение вязкой жидкости, возникшее под воздействием диска радиусом R, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. В общем случае такое течение описывается уравнениями Навье — Стокса, причем скорость в цилиндрической системе координат имеет компоненты u, v и w, соответственно в радиальном, азимутальном и осевом направлении, а основное упрощение сводится к симметрии решения относительно оси z.

Обозначив через r° и z° размерные координаты, ρ — плотность, p — давление, ν — кинематическую вязкость, введем безразмерные переменные и малый параметр

$$r = r^\circ / R,\ \ Z = z^\circ / (\varepsilon R),\ \ F(r,\ Z) = u / (r\omega R) \tag{1.1}$$

$$G(r,\ Z) = v / (r\omega R),\ \ H(r,\ Z) = w / (\varepsilon\omega R)$$

$$P(r,\ Z) = (p - p_\infty) / (\rho\omega^2 R^2)$$

$$\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2} = \sqrt{\nu / (\omega R^2)} \tag{1.2}$$

Записывая уравнения Навье — Стокса и граничные условия в переменных (1.1), получаем

$$rF\frac{\partial F}{\partial r} + F^2 - G^2 + H\frac{\partial F}{\partial Z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) \tag{1.3}$$

$$rF\frac{\partial G}{\partial r} + 2FG + H\frac{\partial G}{\partial Z} = \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial G}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - rF\frac{\partial H}{\partial r} - H\frac{\partial H}{\partial Z} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} \right)$$

$$r\frac{\partial F}{\partial r} + 2F + \frac{\partial H}{\partial Z} = 0$$

$$(1.4) \qquad F = H = G - 1 = 0 \quad \text{при } Z = 0,\ r < 1$$

$$H = \partial F / \partial Z = \partial G / \partial Z = 0 \quad \text{при } Z = 0,\ r > 1$$

$$F \to 0, \quad G \to 0 \quad \text{при } Z \to \infty$$

Кроме того, предполагается, что для всех точек с координатами $r < 1$, достаточно удаленными от кромки, справедливо решение Кармана

$$F = F_0(Z), \qquad G = G_0(Z), \quad H = H_0(Z)$$

При $r > 1$ на некотором расстоянии за кромкой существует область следа, очень похожего по своим свойствам на след за задней кромкой плоской пластины [5,6]. Следуя цитированным работам, введем в рассмотрение функцию тока $\Psi(r, Z)$, характеризующую течение в радиальных плоскостях, проходящих через ось диска. На основании последнего из уравнений (1.3) эта функция должна определяться соотношениями

$$(1.5) \qquad r^2 F = \partial \Psi / \partial Z, \qquad rH = -\partial \Psi / \partial r$$

При рассмотрении области следа взамен r введем новую независимую переменную

$$(1.6) \qquad s = r - 1$$

и исследуем диапазон малых значений s (конкретный порядок малости этих значений будет определен позднее). Как и в [5] будем предполагать, что в области ближнего следа различаются внутренняя и внешняя подобласти, причем в процессе построения решения совершается предельный переход $\varepsilon \to 0$ без дополнительной деформации координатной сетки, т. е. в «погранслойных» координатах s, Z.

Во внутренней части следа функции Ψ и G ищутся в форме разложений вида

$$(1.7) \qquad \Psi = s^{2/3} f_0(\eta) + s f_1(\eta) + \ldots$$

$$G = 1 + s^{1/3} g_0(\eta) + s^{2/3} g_1(\eta) + \ldots, \quad \eta = Z / s^{1/3}$$

С помощью (1.5) отсюда можно получить и разложения для F и H

$$(1.8) \qquad F = s^{1/3} f_0'(\eta) + s^{2/3} f_1'(\eta) + \ldots$$

$$H = {}^1/_3 s^{-1/3} [\eta f_0'(\eta) - 2f_0(\eta)] + {}^1/_3 [\eta f_1'(\eta) - 3f_1(\eta)]$$

После введения в (1.3) нового аргумента согласно (1.6) и подстановки выражений (1.7), (1.8) следует собрать члены, содержащие множителем одинаковые степени s, получая таким образом уравнения для f_0, g_0, f_1, g_1 и т. д. Граничные условия при $\eta = 0$ соответствуют условиям (1.4) при $Z = 0$, $r > 1$, тогда как при $\eta \to \infty$ должны выполняться условия асимптотического сращивания с решением для внешней области, главный член которого соответствует решению Кармана. Если учесть форму представления последнего в окрестности точки $Z = 0$, можно получить следующие уравнения и граничные условия для f_0 и g_0:

$$f_0''' + {}^2/_3 f_0 f_0'' - {}^1/_3 f_0'^2 = 0, \quad g_0'' + {}^2/_3 f_0 g_0' - {}^1/_3 f_0' g_0 = 0 \tag{1.9}$$

$$f_0(0) = f_0''(0) = g_0'(0) = 0$$

$$f_0 = {}^1/_2 a(\eta + \delta_0)^2, \quad g_0 = b(\eta + \delta_0) \quad \text{при } \eta \to \infty$$

$$a = F_0'(0) = 0.510, \quad b = G_0'(0) = -0.616$$

где постоянная δ_0 определяется в ходе численного решения краевой задачи. В данном случае получим $\delta_0 = 1.1165$, $f_0'(0) = 1.0283$, $g_0(0) = -1.2421$.

Приведем также уравнения и граничные условия для f_1 и g_1

$$f_1''' + {}^2/_3 f_0 f_1'' - f_0' f_1' + f_0'' f_1 = -1 \tag{1.10}$$

$$g_1'' + {}^2/_3 f_0 g_1' - {}^2/_3 f_0' g_1 = {}^1/_3 f_1' g_0 - f_1 g_0'$$

$$f_1(0) = f_1''(0) = g_1'(0) = 0$$

$$f_1 = -\frac{1}{6}(\eta + \delta_0)[(\eta + \delta_0)^2 + \delta_1], \quad g_1 = -\frac{b}{6a}\delta_1 \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Сюда входит новая постоянная δ_1, определяемая так же, как и δ_0. Во внешней области следа пригодны разложения

$$\Psi = r^2\Psi_0(Z) + s^{1/3}\Psi_1(Z) + s^{2/3}\Psi_2(Z) + \ldots \tag{1.11}$$

$$G = G_0(Z) + s^{1/3}G_1(Z) + s^{2/3}G_2(Z) + \ldots$$

причем из условий сращивания внутренних и внешних разложений нетрудно определить вид функций $\Psi_1(Z)$, $G_1(Z)$, и т. д. Получим

$$\Psi_1(Z) = \delta_0\Psi_0'(Z), \quad \Psi_2(Z) = \frac{\delta_0^2}{2}\Psi_0''(Z) - \frac{\delta_1}{6a}\Psi_0'(Z) \tag{1.12}$$

$$G_1(Z) = \delta_0 G_0'(Z), \quad G_2(Z) = -\frac{\delta_1}{6a}G_0'(Z)$$

Как видно из уравнений (1.3), давление во внешней (а следовательно, и во внутренней) области следа $P = O(\varepsilon^2)$. Однако для дальнейшего выяснения структуры течения важно установить вид главного члена выражения для P. Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.3), найдем

$$P = -\frac{2}{9}\delta_0\varepsilon^2 s^{-5/3}\Phi(Z) + O(\varepsilon^2 s^{-4/3}) \tag{1.13}$$

$$\Phi(Z) = \int_\infty^Z \Psi_0'^2\, dZ$$

где выбор пределов интегрирования связан с равенством нулю возмущения осевой скорости на бесконечности и, в силу уравнения Бернулли, с обращением в нуль соответствующего возмущения давления. Определение последующих приближений для приведенного выражения не представляет серьезных трудностей.

2. Как отмечалось ранее, решение в области ближнего следа за кромкой диска имеет силу при малых значениях s. Однако у самой кромки при $s = 0$ это решение содержит особенность, проявляющуюся в выражениях (1.8) и (1.13) для H и P. Единственный путь устранения особенности связан с введением дополнительной переходной области в окрест-

ности кромки, размеры которой имеют более высокий порядок малости по ε. Решение в этой области подлежит асимптотическому сращиванию по радиальному направлению, с одной стороны — с решением Кармана, а с другой — с вышеприведенным решением для области следа.

При исследовании течения в переходной зоне прежде всего вводятся растянутые координаты r^*, z^* по формулам

$$s = \varepsilon^{\alpha} r^*, \quad Z = \varepsilon^{\beta} z^* \quad (\alpha, \beta > 0) \tag{2.1}$$

где параметры α и β подлежат определению. Внутри переходной зоны будем различать внешнюю и внутреннюю области, причем внутренней областью будем считать тот подслой, где вязкие и инерционные члены уравнений имеют одинаковый порядок.

При описании внешней области переходной зоны в уравнениях Навье—Стокса совершается предельный переход $\varepsilon \to 0$ при фиксированных r^* и Z. Предполагается, что здесь пригодны асимптотические разложения вида

$$\begin{aligned} \Psi(s, Z; \varepsilon) &= r^2 \Psi_0(Z) + \varepsilon^k \psi_1(r^*, Z) + \ldots \\ G(s, Z; \varepsilon) &= G_0(Z) + \varepsilon^k h_1(r^*, Z) + \ldots \\ P(s, Z; \varepsilon) &= \varepsilon^m p_1(r^*, Z) + \ldots \end{aligned} \tag{2.2}$$

где индекс нуль вновь соответствует решению Кармана.

Введем следующие допущения относительно показателей степени малого параметра ε:

$$\alpha < 1, \quad m = k + 2(1 - \alpha) \tag{2.3}$$

При выполнении этих допущений подстановка (2.2) в уравнения Навье—Стокса с последующим переходом $\varepsilon \to 0$ дает

$$\begin{aligned} &\Psi_0'' \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^* \partial Z} - \Psi_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial r^*} = 0 \\ &\Psi_0' \frac{\partial h_1}{\partial r^*} - G_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial Z} = \Psi_0' \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^{*2}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Первое из уравнений (2.4) можно проинтегрировать, получая

$$\psi_1 = \Psi_0'(Z) D(r^*) \tag{2.5}$$

где аддитивная произвольная функция от Z положена тождественно равной нулю в силу условия сращивания с решением Кармана. Используя (2.5), можно подобным же образом определить

$$h_1 = G_0'(Z) D(r^*) \tag{2.6}$$

$$p_1 = D''(r^*) \Phi(Z) \tag{2.7}$$

где $\Phi(Z)$ — та же функция, которая была введена в (1.13).

По аналогии с (2.2) можно выписать и главные члены разложений для внутреннего, вязкого подслоя переходной области, полагая здесь

$$\begin{aligned} \Psi(s, Z; \varepsilon) &= \varepsilon^n \psi_1^*(r^*, z^*) + \ldots \\ G(s, Z; \varepsilon) &= 1 + \varepsilon^q h_1^*(r^*, z^*) + \ldots \\ P(s, Z; \varepsilon) &= \varepsilon^m p_1^*(r^*, z^*) + \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Главные члены (2.8) при $z^* \to \infty$ должны сращиваться с главными членами (2.2) при $Z \to 0$. Отсюда следует, что при достаточно больших z^* функции ψ_1^* и h_1^* должны вести себя соответственно как $az^{*2}/2$ и bz^*. Но тогда для осуществления сращивания необходимо иметь $n = 2\beta$, $q = \beta$.

Согласно определению вязкого подслоя силы инерции и вязкие силы имеют в нем одинаковый порядок, а это влечет за собой условие $\alpha = 3\beta$. Решение для внешней области переходной зоны при $r^* \to \infty$ должно сращиваться с решением для внешней области следа. Для этого необходимо, в частности, чтобы

$$D(r^*) \to \delta_0 r^{*1/3} \quad \text{при } r^* \to \infty \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) сращивание выражений для Ψ из (2.2) и (1.11) дает $k = \alpha / 3 = \beta$.

Если ввести дополнительное предположение $m < 2(1 - \beta)$, то в рамках асимптотического приближения давление p_1^* может считаться неизменным поперек вязкого подслоя. При учете необходимости сращивания с решением (2.7) для внешней области получим общее выражение для давления в подслое

$$p_1^* = \Phi(0)D''(r^*) \tag{2.10}$$

Последнее из соотношений, требуемых для определения показателей степеней в разложениях (2.2) и (2.8), вытекает из условия равенства порядков для членов с давлением, вязких и инерционных в вязком подслое. Это условие дает $m - \alpha = -\beta$, а с учетом (2.3) позволяет найти значение β, с которым связаны и все остальные показатели. Найденные значения: $\alpha = 6/7$, $\beta = 2/7$, $k = 2/7$, $m = 4/7$, $n = 4/7$, $q = 2/7$ полностью соответствуют сделанным предварительно допущениям, а значения α и β определяют размеры переходной зоны течения у кромки диска.

Знание показателя α дает возможность также уточнить информацию о диапазоне значений s, для которого справедливо построенное в п. 1 решение для области следа. Например, если потребовать, чтобы желаемая точность решений (1.7) и (1.11) обеспечивалась главными членами, то следует положить $s^{4/3} = O(\varepsilon^{6/7})$, или $s = O(\varepsilon^{9/14})$. При учете большего количества членов в указанных разложениях результат изменится. Обозначая через i номер приближения, вклад которого считается пренебрежимо малым, можно для этого, более общего случая положить

$$s = O(\varepsilon^{\gamma}), \quad \gamma = {}^{18}/_{7}\,(3 + i)^{-1} \tag{2.11}$$

3. Задача о структуре течения в окрестности кромки диска сводится, по существу, к решению уравнений для внутреннего подслоя переходной зоны. В соответствии с результатами п. 2 эти уравнения и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z^*}\frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial r^*\partial z^*} - \frac{\partial\psi_1^*}{\partial r^*}\frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial z^{*2}} = -\Phi(0)D'''(r^*) + \frac{\partial^3\psi_1^*}{\partial z^{*3}} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z^*}\frac{\partial h_1^*}{\partial r^*} - \frac{\partial\psi_1^*}{\partial r^*}\frac{\partial h_1^*}{\partial z^*} = \frac{\partial^2 h_1^*}{\partial z^{*2}}, \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial z^*} = 0$$

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &\psi_1^* = \partial\psi_1^* / \partial z^* = h_1^* = 0 \quad \text{при } z^* = 0,\ \ r^* < 0 \\ &\psi_1^* = \partial^2\psi_1^* / \partial z^{*2} = \partial h_1^* / \partial z^* = 0 \quad \text{при } z^* = 0,\ r^* > 0 \\ &\psi_1^* \to az^{*2} / 2, \quad h_1^* \to bz^* \quad \text{при } r^* \to -\infty \\ &\psi_1^* \to (a / 2)\,[z^* + D(r^*)]^2, \quad h_1^* \to b\,[z^* + D(r^*)] \quad \text{при } z^* \to \infty \\ &\psi_1^* \to r^{*^{2/3}} f_0(\eta), \quad h_1^* \to r^{*^{1/3}} g_0(\eta) \quad \text{при } r^* \to \infty \quad (\eta = z^* / r^{*^{1/3}}) \end{aligned}$$

где функции f_0 и g_0 удовлетворяют уравнениям (1.9).

Нельзя безоговорочно утверждать, что решение задачи (3.1), (3.2) существует и имеет физический смысл. Однако можно сослаться на численное решение аналогичной задачи для случая плоской пластины [7], а также, следуя Стюартсону [3], попытаться определить свойства решения данной задачи при достаточно больших значениях $|\,r^*\,|$. Если такой анализ не выявит противоречий с исходными допущениями, а также укажет на возможность определения интегральных характеристик течения, то будем считать его подтверждающим тезис о существовании решения задачи (3.1), (3.2).

Рассмотрим вначале область больших положительных значений r^*, т. е. $r^* \to \infty$. Предельная форма решения в этой области определяется условиями (3.2), и в соответствии с этой формой целесообразно ввести разложения вида

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} \psi_1^* &= r^{*^{2/3}} f_0(\eta) + r^{*^{(2-n)/3}} f_n(\eta) + \ldots, \\ h_1^* &= r^{*^{1/3}} g_0(\eta) + r^{*^{(1-n)/3}} g_n(\eta) + \ldots \end{aligned}$$

где многоточиями обозначаются члены с более высокими степенями $r^{*^{-1}}$. Подставляя в (3.1), получим уравнения для f_n и g_n, а из (3.2) следуют граничные условия к ним

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &f_n''' + \frac{2}{3} f_0 f_n'' - \frac{2-n}{3} f_0' f_n' + \frac{2-n}{3} f_0'' f_n = A_n \\ &g_n'' + \frac{2}{3} f_0 g_n' - \frac{1-n}{3} f_0' g_n = \frac{1}{3}\,[f_n' g_0 - (2-n) f_n g_0'] + B_n \\ &f_n(0) = f_n''(0) = g_n'(0) = f_n''(\infty) = g_n'(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Наименьшее значение n, для которого $A_n \neq 0$, равно семи, причем $A_7 = {}^{10}/_{27}\delta_0\Phi(0)$, $B_7 = 0$. Однако первое из уравнений (3.4) может иметь собственные функции, обладающие требуемыми свойствами, и при меньших значениях n. В частности, при $n = 3$, когда $A_3 = B_3 = 0$, система (3.4) имеет решение

$$(3.5)\qquad f_3 = C\,(2f_0 - \eta f_0'), \quad g_3 = C\,(g_0 - \eta g_0')$$

где C — постоянная, не поддающаяся определению в рамках асимптотического исследования.

С помощью решения (3.5) можно установить уточненную форму представления функции $D(r^*)$ при больших положительных r^* и найти выражения для компонент скорости в плоскости диска, а также уточненное выражение для давления p_1^*, получая

$$D(r^*) = \delta_0 r^{*1/3} + C\delta_0 r^{*-2/3} + \ldots \tag{3.6}$$

$$(\partial\psi_1^* / \partial z^*)_{z^*=0} = r^{*1/3} f_0'(0) + Cr^{*-2/3} f_0'(0) + \ldots \tag{3.7}$$

$$h_{1z^*=0}^* = r^{*1/3} g_0(0) + Cr^{*-2/3} g_0(0) + \ldots$$

$$p_1^* / [\Phi(0)\delta_0] = -{}^2/_9 r^{*-5/3} + {}^{10}/_9 Cr^{*-8/3} + \ldots$$

Переходя к исследованию области $r^* \to -\infty$, введем в рассмотрение разложения, совершенно аналогичные (3.3), где вместо обозначений f_i и g_i принимаются φ_i и ζ_i. Если учесть, что $\varphi_0 = a\eta^2 / 2$, $\zeta_0 = b\eta$, для φ_n и ζ_n получим уравнения со следующими из (3.2) граничными условиями:

$$\varphi_n''' + \frac{a}{3}\eta^2\varphi_n'' + \frac{a(n-2)}{3}\eta\varphi_n' - \frac{a(n-2)}{3}\varphi_n = M_n \tag{3.8}$$

$$\zeta_n'' + \frac{a}{3}\eta^2\zeta_n' + \frac{a(n-1)}{3}\eta\zeta_n = \frac{b}{3}[\eta\varphi_n' + (n-2)\varphi_n] + N_n$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = \zeta_n(0) = \varphi_n''(\infty) = \zeta_n'(\infty) = 0$$

Решение уравнений (3.8) можно при любом n выразить с помощью некоторой комбинации вырожденных гипергеометрических функций. Однако в отличие от уравнений (3.4) при $M_n = 0$ невозможно построить решение, удовлетворяющее всем граничным условиям. Но значение n, при котором $M_n \neq 0$, определяется видом главного члена в выражении p_1^* при $r^* \to -\infty$. Пусть этот член имеет форму

$$p_1^* \sim |r^*|^{-q} = |s|^{-q}\varepsilon^{\alpha q} \tag{3.9}$$

Для оценки показателя степени q проведем следующие рассуждения. Вследствие симметрии размеров переходной зоны значение $|s|$ в формуле (3.9) должно соответствовать оценке, данной в (2.11) для границы этой зоны. Полагая $i = 1$, получим $|s| \sim \varepsilon^\gamma$, $\gamma = {}^9/_{14}$. Величина ε^m, связывающая P с p_1^* согласно (2.8), есть, по определению, величина малая, причем будем полагать, что ее квадратом можно пренебречь. Тогда, для того, чтобы с помощью формулы (3.9) была получена пренебрежимо малая величина P, должно выполняться соотношение

$$2m = m + \alpha q - \gamma q$$

Подставляя сюда известные значения m и α, а также указанное выше значение γ, получим $q = {}^8/_3$, или

$$D(r^*) = C_1 r^{*-2/3} + \ldots, \quad p_1^* = {}^{10}/_9 C_1\Phi(0) r^{*-8/3} + \ldots \tag{3.10}$$

где вновь фигурирует постоянная C_1, определяемая лишь в процессе решения всей задачи в целом.

С помощью (3.10) находим $n = 10$, $M_{10} = {}^{80}/_{27} C_1\Phi(0)$, $N_{10} = 0$, а уравнениям (3.8) будут при этом удовлетворять следующие выражения:

$$\varphi_{10} = -\frac{10}{9a}C_1\Phi(0)\left\{1 - 7\left(\frac{a}{9}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)}\eta^2\right\} \times \tag{3.11}$$

$$\times\left[U\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{a}{9}\eta^3\right) + \frac{a}{18}\eta^3 U\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{a}{9}\eta^3\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{567}\eta^6 U\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{a}{9}\eta^3\right)\right]\Bigg\}$$

$$\zeta_{10} = \frac{70b}{9a^2}\left(\frac{a}{9}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)}C_1\Phi(0)\eta\times$$
$$\times\left[2U\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},-\frac{a}{9}\eta^3\right)+\frac{7a}{18}\eta^3U\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{a}{9}\eta^3\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{22a^2}{567}\eta^6U\left(\frac{7}{3},\frac{11}{3},-\frac{a}{9}\eta^3\right)+\frac{a^3}{729}\eta^9U\left(\frac{10}{3},\frac{14}{3},-\frac{a}{9}\eta^3\right)\right]$$

где функции $U(\alpha, \beta, x)$ соответствуют так называемой второй форме решений вырожденного гипергеометрического уравнения [8].

Вдали от плоскости диска, т. е. при $\eta \to -\infty$, функции $d\varphi_{10} / d\eta$ и ζ_{10} стремятся к постоянному пределу, наличие которого позволяет определить следующий член асимптотического разложения для $D(r^*)$:

$$D(r^*) = C_1 r^{*-2/3} - 5C_1\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{9}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)}\Phi(0)r^{*-3}+\ldots \tag{3.12}$$

Пользуясь (2.10), отсюда можно получить второй член разложения для p_1^*, после чего повторить весь описанный процесс.

Напряжение трения на поверхности диска и общее выражение для коэффициента момента сил трения имеют вид

$$\tau_{z\theta} = \rho\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z^\circ}\right)_w = r\rho\omega^2R^2\varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_w = r\rho\omega^2R^2\varepsilon\left(\frac{\partial h_1^*}{\partial z^*}\right)_w = \tag{3.13}$$
$$= r\rho\omega^2R^2\varepsilon\left[b+\left(\left(\frac{\partial h_1^*}{\partial z^*}\right)_w - b\right)\right]$$

$$C_M = -\frac{2}{\rho\pi\omega^2R^5}\int_0^R 2\pi r^{\circ 2}\tau_{z\theta}\,dr^\circ = -b\varepsilon - 4\varepsilon^{1+\alpha}\int_{-\infty}^0\left[\left(\frac{\partial h_1^*}{\partial z^*}\right)_w - b\right]dr^* \tag{3.14}$$

Здесь использован тот факт, что область существования последнего члена в квадратных скобках правой части (3.13) соответствует области определения r^*. В соответствии с разложением типа (3.3) главный член выражения под знаком интеграла в (3.14) при $r^* \to -\infty$ будет равен

$$r^{*-10/3}\zeta_{10}'(0) = \frac{140b}{9a^2}\left(\frac{a}{9}\right)^{2/3}\frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma^2(5/3)}C_1\Phi(0)\,r^{*-10/3}$$

Последнее выражение представляет собой постоянную, умноженную на большую отрицательную степень r^*, а это позволяет считать интеграл в правой части (3.14) сходящимся.

Второй член правой части в (3.14) представляет собой добавок к коэффициенту C_M, обусловленный конечностью диска. Этот добавок пропорционален $\varepsilon^{13/7}$ и имеет, по-видимому, наибольшее значение по сравнению с другими возможными поправками к коэффициенту момента сил трения бесконечного диска.

Для полного решения поставленной задачи необходимо провести численное интегрирование системы (3.1) с граничными условиями (3.2).

Цель данной работы состояла в качественном выяснении структуры потока в окрестности кромки диска и была достигнута без проведения упомянутых расчетов. Однако, судя по всему, решение, полностью удовлетворяющее как уравнениям (3.1), так и условиям (3.2), может все же содержать разрывы искомых функций или их производных при $r^* = 0$. Если наличие таких особенностей подтвердится в процессе расчетов, то для их устранения придется ввести в ближайшей окрестности кромки еще одну асимптотическую область, что не должно повлиять на справедливость полученных здесь результатов. Для оценки размеров центральной области можно повторить рассуждения, проведенные [4] применительно к случаю плоской пластины, и найти, что она имеет одинаковый порядок протяженности $O(\varepsilon^{3/2})$ как в радиальном, так и в осевом направлениях, причем описание течения в этой области обеспечивается полными уравнениями Навье — Стокса.

В заключение следует отметить, что многослойная асимптотическая структура течения, аналогичная описанной здесь, проявляется при исследовании довольно обширного класса задач со скачкообразным изменением граничных условий. Помимо цитированных ранее работ [3, 4] можно указать на другие исследования течений вблизи кромок [9, 10], а также на работы [11–13], посвященные течениям вблизи точек отрыва пограничного слоя в несжимаемом потоке и в сверхзвуковом газовом потоке. Все эти работы имеют много общего между собой и с данным исследованием в отношении принципов асимптотического анализа, однако изложенные результаты обнаруживают ряд особенностей, не свойственных другим кромочным течениям: порядок размера основных подобластей существенно иной, чем в случае пластины, имеется зона невязкого течения с переменным давлением и т. п.

Поступила 29 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM, 1921, Bd 1, H. 4, S. 235.
2. *Cochran W. G.* The flow due to a rotating disc. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, vol. 30, No. 3.
3. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate II. Mathematika, 1969, vol. 16, part 1.
4. *Messiter A. F.* Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 1.
5. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, vol. 26, No. 1.
6. *Leslie L. M.* The wake of a finite rotating disc. The J. Austral. Math. Soc., 1972, vol. 13, pt. 3.
7. *Jobe C. E., Burggraf O. R.* The numerical solution of the asymptotic equations of trailing edge flow. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1947, vol. 340, No. 1620.
8. *Слейтер Л. Дж.* Вырожденные гипергеометрические функции. М., ВЦ АН СССР, 1966.
9. *Brown S. N., Stewartson K.* Trailing edge stall. J. Fluid. Mech., 1970, vol. 42, pt. 3.
10. *Guiraud J.-P.* Écoulement décollé au voisinage du bord de fuite d'une aile mince tridimensionnelle. J. Mec. 1974, t. 13, N 3.
11. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
12. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
13. *Нейланд В. Я.* Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.