

О КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСАХ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Рассматривается задача о резонансных колебаниях малой амплитуды в нелинейной системе вблизи границы ее устойчивости. Решение ищется в виде ряда по амплитуде собственного колебания и по амплитуде вынуждающей силы. На основе полученного уравнения, описывающего зависимость амплитуды собственного колебания от времени, исследуется эволюция стационарных движений при изменении параметров. В качестве примера рассмотрены субгармонические колебания политропного газа, возбуждаемые поршнем в длинной трубе, оканчивающейся емкостью.

1. При периодическом воздействии на системы, описываемые уравнениями гидродинамического типа, возможны комбинационные резонансы. В самовозбуждающихся системах возможны режимы биений и захватывания частоты; примером могут служить комбинационные резонансы в газовом разряде [1].

Главный резонанс рассмотрен в [2]; комбинационные резонансы требуют специального рассмотрения, так как характер колебаний и их амплитуда существенно зависят от типа резонанса.

Как и в [2], рассматривается граничная задача

$$(1.1) \quad \frac{\partial X}{\partial t} + L_1 X + L_2 X^2 + \dots = \varepsilon EC + \text{с.с.}, \quad UX = 0 \quad (E = e^{i\omega t})$$

Здесь X — вектор малых отклонений гидродинамических переменных от равновесных значений, с.с. означает выражение, комплексно-сопряженное предшествующему.

Вещественные коэффициенты L и матрица U в граничном условии зависят от параметров λ , координат x и являются полиномами относительно $D = \partial / \partial x$. Область изменения x предполагается ограниченной. Периодическое возмущение с формой $C = C(x)$ пропорционально малой амплитуде ε . Предполагается, что задача

$$(1.2) \quad p_0 X_1 + L_1 X_1 = 0, \quad UX_1 = 0$$

имеет простое собственное значение $p_0 = \gamma_0 + i\Omega_0$ (называемое ниже критическим), которое при $\lambda = \lambda_*$ становится чисто мнимым ($p_0 = i\Omega_*$, $\Omega_* > 0$); инкременты $\gamma_0(\lambda_*)$ других собственных значений отрицательны и не малы.

При $\varepsilon \neq 0$ имеет место комбинационный резонанс, если для несократимой дроби $\zeta = n/m$, где n, m — положительные целые, расстройка

$p = p_0 - i\omega\zeta$ мала по сравнению с величинами ω ($1, \zeta, 1 - \zeta$). Малые параметры $\gamma_0, \Omega_0 - \omega\zeta, \varepsilon$ являются независимыми.

Решение задачи (1.1) ищется в виде степенного ряда по малым величинам $QE^\zeta, \varepsilon E$ и им комплексно-сопряженным

$$(1.3) \quad X = (QE^\zeta X_1 + \varepsilon E X_2) + \text{с.с.} + \dots$$

Коэффициенты ряда зависят только от x ; X_1 — собственная функция задачи (1.2), соответствующая критическому p_0 .

Уравнение для амплитуды колебаний $Q(t)$ также ищется в виде ряда по величинам Q, ε и им сопряженным

$$(1.4) \quad \frac{dQ}{dt} = Q(p + p_3\varepsilon\bar{\varepsilon} + p_2Q\bar{Q} + \dots) + \bar{Q}^{m-1}\varepsilon^n(p_1 + \dots) + \dots$$

Здесь в скобках стоят ряды по степеням $|\varepsilon|^2, |Q|^2$; опущены ряды, умноженные на $\bar{Q}^{ms-1}\varepsilon^{ns}$ при $s > 1$.

Коэффициенты в (1.3), (1.4) определяются из линейных неоднородных задач, получающихся после подстановки (1.3), (1.4) в (1.1) приравниванием членов, пропорциональных $Q^a\bar{Q}^b\varepsilon^c\bar{\varepsilon}^dE^\zeta^\nu$, где $\nu = a - b + (c - d)/\zeta$. Достаточно рассмотреть задачи с $\nu \geq 0$. Решения этих задач конечны при $\nu \neq 1$, поэтому соответствующий коэффициент в (1.4) равен нулю. При $\nu = 1$ решения конечны при $p \rightarrow 0$, лишь если

$$(1.5) \quad \langle \Psi \cdot Z \rangle \equiv \int (\Psi \cdot \bar{Z}) dx = 0$$

Здесь Ψ — свободный член неоднородной задачи, Z — собственная функция задачи, сопряженной к задаче (1.2) с критическим значением p_0 ; интегрирование ведется по области изменения x . Из (1.5) находится соответствующий коэффициент ряда (1.4), входящий в Ψ линейно.

Равенство $\nu = 1$ удовлетворяется, если $b = a - 1 + ms, c = d + ns, s \geq 0$. При $s = 0$ последние соотношения не зависят от чисел m, n , определяющих тип резонанса. Соответствующие члены в (1.4) описывают нерезонансные эффекты, в частности, асинхронный эффект изменения расстройки ($b = 0$). Измененная расстройка есть $p_+(\varepsilon) = p + p_3\varepsilon\bar{\varepsilon} + \dots$.

В дальнейшем рассматривается неособый случай, когда в приближенном уравнении (1.4) величины $p_n = \gamma_n + i\Omega_n$ ($n = 1, 3$), γ_2 не малы при $\lambda = \lambda_*, p = 0$ (некоторые особые случаи обсуждаются в п. 4). В приложениях может оказаться удобным находить коэффициенты в (1.3), (1.4) в виде рядов по $\lambda - \lambda_*, \omega - \Omega_*$.

Для нахождения p_1 необходимо в (1.1) учитывать все члены ряда со степенями $\leq N = n + m - 1$; это означает, что резонансные эффекты несущественны при больших порядках N резонансов. Последнее утверждение можно обосновать и уточнить с помощью следующих оценок.

При $p_+ = 0, m \leq 3$ из (1.4) для стационарной отличной от нуля амплитуды получается $Q \sim \varepsilon^\chi$, где $\chi = n / (4 - m)$. Эффекты расстройки сравниваются с резонансными при $p_+ \sim Q^2$; отсюда для области резонанса (области захватывания частоты) получается $\delta\omega \sim Q^2$. Эта область и амплитуда убывают с ростом n, m .

При $N = 1$ первый член в (1.3) наибольший, асинхронный эффект несуществен [2].

При $N = 2$ первый член в (1.3) наибольший в области резонанса. Асинхронный эффект несуществен при определении стационарного решения, но существенно влияет на его устойчивость вне области резонанса (ниже показано, что вне этой области $Q \neq 0$ лишь для $m = 1$).

При $N = 3$ в области резонанса оба члена в (1.3) одного порядка; асинхронный эффект существует. При $N > 3$ второй член в (1.3) наибольший.

В случае $m > 3$ существует лишь тривиальное стационарное решение $Q = 0$ (малое при малых ε). Это означает, что область захватывания частоты отсутствует. Периодические колебания малой амплитуды могут иметь лишь частоту ω ; они устойчивы, если $\gamma_+ < 0$. Биениям соответствует предельный цикл с квадратом амплитуды $|Q|^2 \approx -\gamma_+ / \gamma_2$ и частотой $\Omega = \Omega_+ + |Q|^2 \Omega_2$ (влияние резонансных членов на показатели цикла можно учесть, используя обычную теорию возмущений). Цикл устойчив при $\gamma_+ > 0$, $\gamma_2 < 0$. При $\gamma_+ \geq 0$, $\gamma_2 > 0$ малые колебания в системе невозможны.

Указанные возможности полностью определяют поведение системы при изменении параметров в случае $m > 3$.

2. Для исследования резонансов в случае $m \leq 3$ удобно представить (1.4) в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} dR/d\tau &= (1 + i\eta) \{R [\alpha (1 - i\sigma) - R\bar{R}] + F\bar{R}^{m-1} + \dots\} \equiv H \\ R &= (Q / \mu) \exp [i(\varphi_2 - \varphi_1) / m], \quad \tau = t |p_2| \mu^2 \cos \varphi_2 \\ \eta &= \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \sigma = \operatorname{tg} \psi, \quad \psi = \varphi_2 - \varphi, \quad \mu = |(p_+ / p_2) \cos \psi|^{1/2} > 0 \\ \varepsilon^n p_1 &= |\varepsilon^n p_1| \exp i\varphi_1, \quad p_2 = -|p_2| \exp i\varphi_2, \quad p_+ = |p_+| e^{i\varphi} \\ F &= |\varepsilon^n p_1 / p_2| / \mu^{4-m}, \quad \alpha = (\cos \psi) / |\cos \psi| = \pm 1 \end{aligned}$$

При $\eta = 0$ уравнение (2.1) рассматривалось в [3], при $m = 1$ оно исследовано в [2]. Качественное исследование (2.1) для $m = 2, 3$ приведено ниже. Сначала рассматривается случай $\gamma_2 < 0$, $\eta \geq 0$.

Структура фазовой плоскости уравнения (2.1) периодическая по $\arg R$ с периодом $2\pi / m$. Отсюда следует, что число особых точек с одинаковым значением $\rho = R\bar{R} \neq 0$ равно m . Для этих точек из (2.1) получается

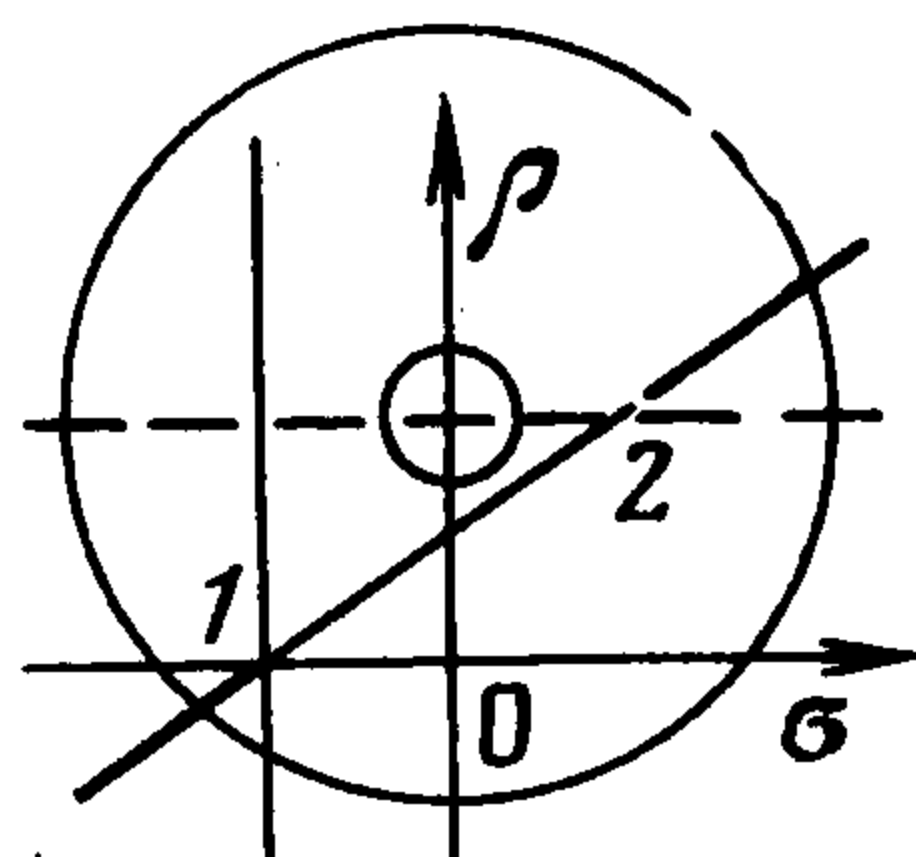
$$(2.2) \quad (\alpha - \rho)^2 + \sigma^2 = f\rho^{m-2}, \quad f = F^2$$

Удобно вместо двух уравнений (2.2) для $\rho \geq 0$ рассматривать только уравнение с $\alpha = 1$ в области $(-\infty < \rho < \infty)$, используя отрицательные ρ при $\alpha = -1$. Амплитудные кривые — окружности $F = \text{const}$ при $m = 2$ (фиг. 1) и $f = \text{const}$ при $m = 3$ (фиг. 2); пунктиром на фиг. 1.2. показаны кривые, на которых окружности имеют вертикальную касательную.

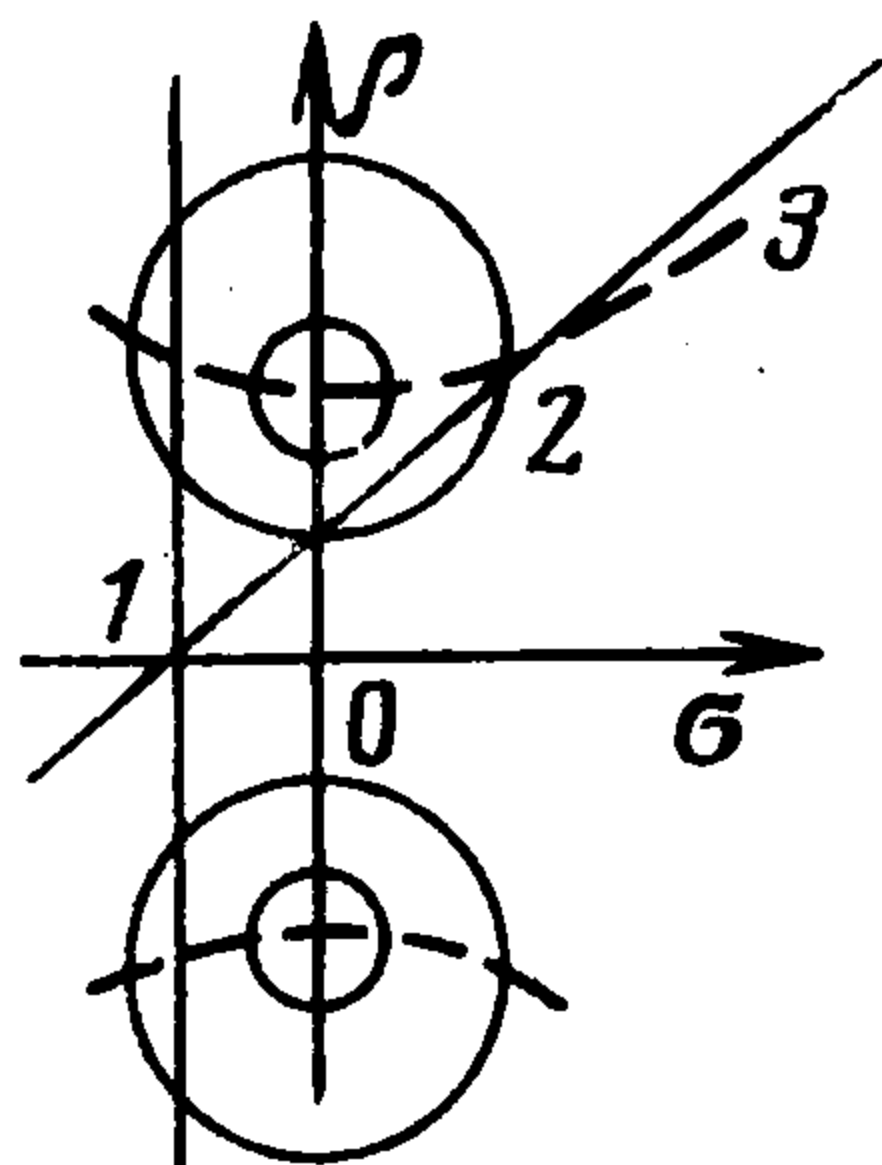
Малые отклонения от равновесий пропорциональны $\exp \kappa t$, где

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \kappa &= a \pm (a^2 - b)^{1/2}, \quad a \equiv \operatorname{Re} (\partial H / \partial R) = \alpha (1 + \sigma\eta - 2\rho) \\ b &\equiv |\partial H / \partial R|^2 - |\partial H / \partial \bar{R}|^2 = m (1 + \eta^2) [(2 - m) \times \\ &\times (1 + \sigma^2) - 2\rho (3 - m) + (4 - m) \rho^2] \end{aligned}$$

Седла расположены в области $b < 0$; на пунктирных кривых, где $b = 0$, расположены седло-узлы. Сложные фокусы расположены на прямых $a = 0$, пересекающих ось σ в точке $\sigma_1 = -1/\eta$; используя результаты [4], можно показать, что эти фокусы — неустойчивые первой кратности. Простые фокусы и узлы неустойчивы, если на фиг. 1, 2 они расположены между прямой $a = 0$ и осью σ в первом и третьем квадрантах, образованных осью σ и прямой $\sigma = \sigma_1$.



Фиг. 1



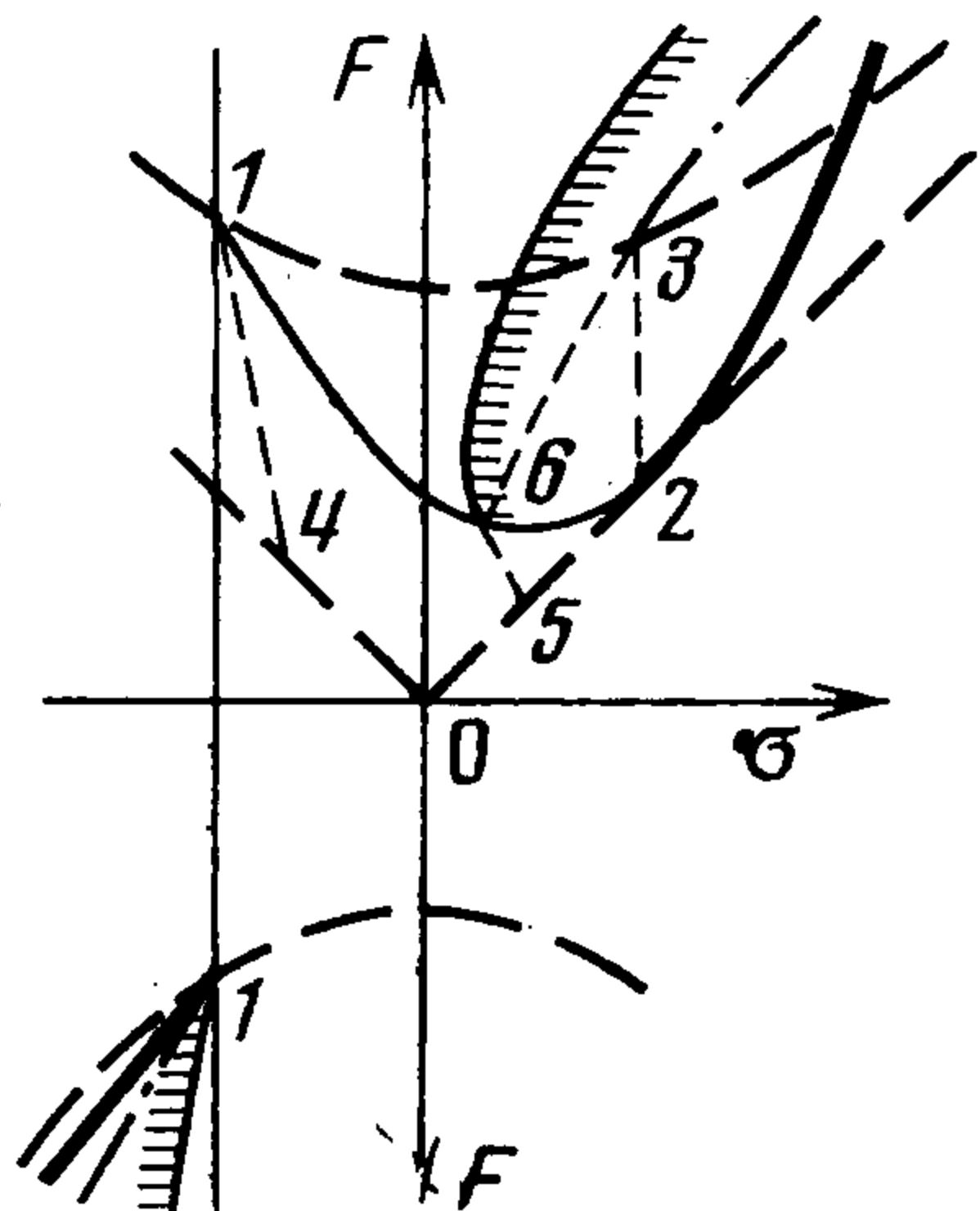
Фиг. 2

На этой прямой $\gamma_+ = 0$, во втором и четвертом квадрантах $\gamma_+ < 0$; при изменении параметров переход из верхней полуплоскости в нижнюю возможен только через бесконечно удаленную точку в противоположный квадрант.

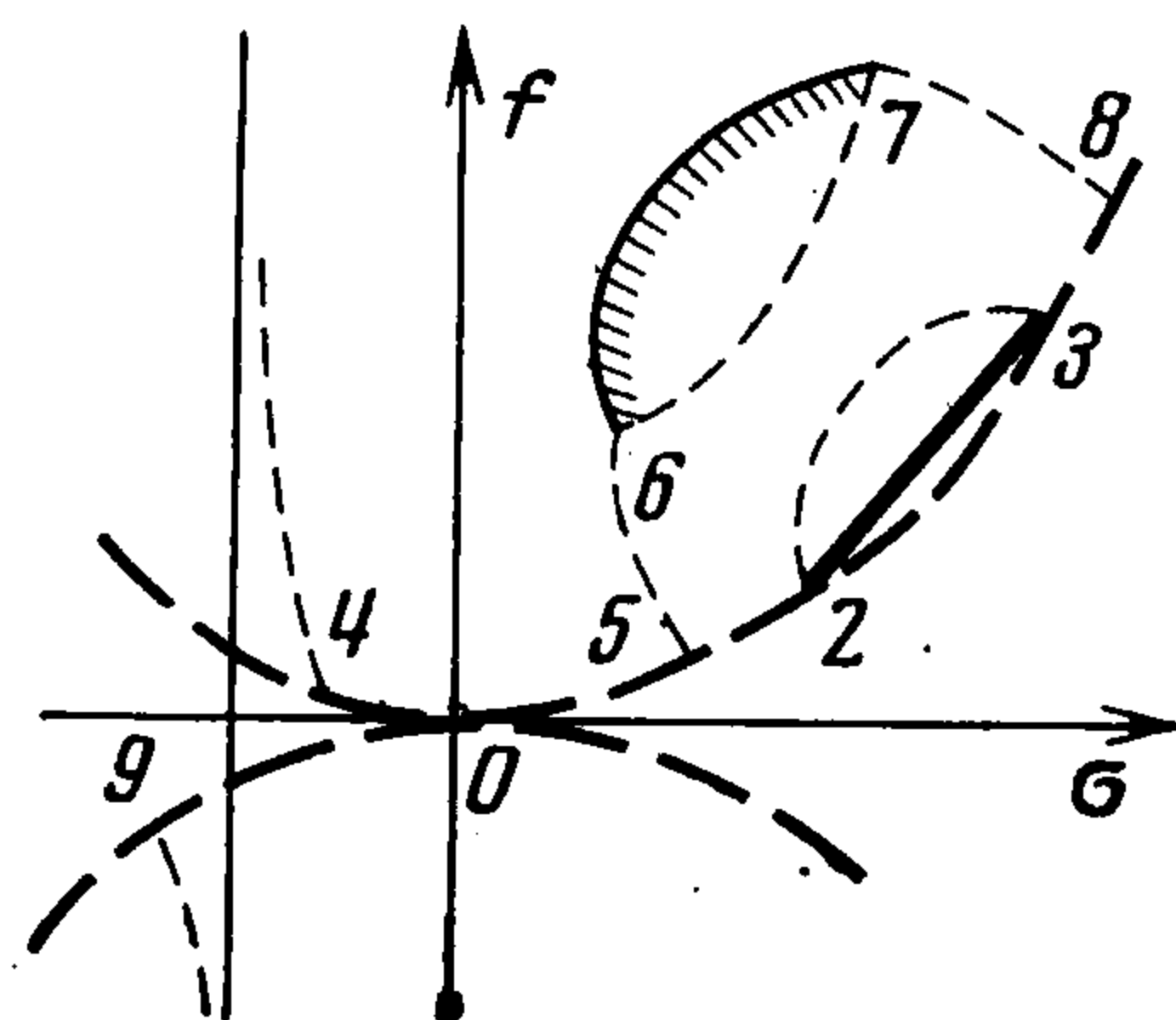
При $m = 2$ область фокусов ограничена гиперболой с асимптотами

$2\rho = 1 - \sigma [1/\eta \pm (1 + 1/\eta^2)^{1/2}]$ и с квадратом полуоси $1/8 (25 + 16/\eta^2)^{1/2} - 3/8$.

При $m = 3$ область фокусов ограничена эллипсом (гиперболой при $\eta > 1/2$) с центром $(\eta, 2) / (1 - 4\eta^2)$, с квадратами полуосей $2\eta^2 (4 + \eta^2 \pm \pm g) / (1 - 4\eta^2)^2$ и с направлением большой (действительной) оси $(7\eta^2 + 2 + g) / (4\eta)$, где $g = [16\eta^2 + (7\eta^2 + 2)^2]^{1/2}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для равновесия $R = 0$ вместо (2.3) будет: $a_0 = a(1 + \sigma\eta)$, $b_0 = (1 + \eta^2) [1 + \sigma^2 - F^2(m - 3)]$.

При $m = 2$ кривые $b_0 = 0$ показаны на фиг. 3 тонким пунктиром; точкам верхней кривой соответствуют седла, точкам нижней кривой — узлы.

Бесконечно удаленная точка неустойчива; ее индекс (и суммарный индекс конечных точек) равен единице.

3. Рассмотрим характер разбиения плоскостей параметров (фиг. 3, 4) на области с неизменной (или слабо меняющейся) структурой фазовой плоскости уравнения (2.1). Зная такое разбиение, нетрудно определить поведение системы при изменении параметров.

Согласно критерию Бендиксона предельные циклы отсутствуют во втором и четвертом квадрантах (образованных осью σ и прямой $\sigma = \sigma_1$),

так как там $a = \dot{\alpha} (1 + \sigma\eta) - 2R\bar{R} \leq 0$. Интегральные кривые идут из бесконечности в одну из устойчивых особых точек.

Предельные циклы существуют в первом и третьем квадрантах. Они охватывают одну особую точку или все, так как суммарный индекс точек равен единице и фазовая плоскость периодическая по $\arg R$.

Устойчивые циклы охватывают неустойчивые и точку $R = 0$. На фиг. 3 (случай $m = 2$) устойчивый цикл существует между осью σ и кривой $14056 \infty 1$ (проходящая через бесконечно удаленную точку кривая $6 \infty 1$ заштрихована).

При пересечении кривой 14 (56) цикл исчезает, сливаясь с сепаратрисами седел вне (внутри) цикла. При пересечении 405 цикл исчезает из-за возникновения на нем седло-узлов. При пересечении заштрихованной кривой $6 \infty 1$ цикл исчезает, сливаясь с неустойчивым циклом, охватывающим все особые точки. Этот неустойчивый цикл существует в области $6 \infty 1 \infty 36$; при пересечении 63 он сливается с сепаратрисами седел, при пересечении $3 \infty 1$ он сливается с сепаратрисами седла $R = 0$ и затем распадается на два неустойчивых цикла (каждый из них охватывает только одну точку $R \neq 0$). Эти циклы существуют в области $3 \infty 1 \infty 23$; при пересечении 23 они сливаются с сепаратрисами седел, при пересечении $2 \infty 1$ они стягиваются в фокусы.

Фиг. 2, 4 соответствуют случаю $\sqrt{3} < \eta < 2$, когда $\sigma_3 > 0$. Точка 1 на фиг. 4 является бесконечно удаленной. Устойчивый предельный цикл существует между осью σ и кривой $\infty 405678 \infty 9 \infty$ (кривая 67 заштрихована). При пересечении кривых $\infty 4$, $\infty 9$ (56 , 78) цикл исчезает, сливаясь с сепаратрисами седел вне (внутри) цикла. При пересечении 405 , $8 \infty 9$ на цикле возникают седло-узлы. При пересечении заштрихованной кривой 67 он сливается с неустойчивым циклом, охватывающим все особые точки. Этот цикл существует в области 67 ; при пересечении пунктирной кривой 67 он сливается с сепаратрисами седел. В области 23 между сплошной и верхней пунктирной кривой существуют три неустойчивых цикла (каждый из них охватывает только одну точку $R \neq 0$). При пересечении пунктирной кривой 23 они сливаются с сепаратрисами седел, при пересечении сплошной кривой 23 циклы стягиваются в фокусы.

При переходе η через значение 2 точки 7, 8, 3 переходят в область $\sigma < \sigma_3$; при переходе η через значение $\sqrt{3}$ область 5678325 исчезает, стягиваясь к точке $\sigma = \sqrt{3}$.

Концам заштрихованных кривых на фиг. 3, 4 соответствуют седла на фиг. 1, 2, лежащие на прямых 12 . Можно показать [2, 4], что при увеличении η двукратный цикл распадается на два и что заштрихованные кривые лежат вне области $\sigma_1 < \sigma < 0$. Результаты [3] получаются при $\eta \rightarrow 0$, когда $|\sigma_n| \rightarrow \infty$.

Выше предполагалось $\gamma_2 < 0$, $\eta \geq 0$. Случай $\gamma_2 < 0$, $\eta \leq 0$ не нуждается в пояснениях. Случай $\gamma_2 = 0$ обсуждается ниже. Случай $\gamma_2 > 0$ отличается от рассмотренного направлением траекторий уравнения (2.1).

4. Рассмотрим случаи нарушения некоторых вводимых ограничений.

Выше предполагалось, что γ_2 не мало. Если это не так, то стационарное решение Q (по-прежнему определяемое из (2.1), (2.2)) устойчиво при $\gamma_0 < \gamma_* < 0$, где $\gamma_* \sim \varepsilon^2$ определяется асинхронным эффектом.

При больших вещественных расстройках уравнение (1.4) применимо, но неэффективно, так как нуждается в дополнительных преобразованиях. Пусть, например, резонанс с числом $\zeta = n/m \neq 1$ рассматривается на основе уравнения

$$dQ_1 / dt = Q_1 (p_0 - i\omega) + \varepsilon p_1 + \dots$$

для $\zeta = 1$. После замены $Q_1 = Q_0 + Q_2$, где Q_0 — стационарное решение этого уравнения, величина Q_2 ищется в виде

$$Q_2 = Q \exp i\nu + f(Q, \varepsilon, \nu)$$

где f — периодическая по $\nu = (\zeta - 1)\omega t$ функция, а $Q(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4) с числом $\zeta = n/m$.

Разложения (1.3), (1.4) применимы к задачам, содержащим в уравнениях и граничных условиях производные по t высокого порядка, зависящие от X неавтономные члены, нелинейные по ε , X и негармонические по явному t (см. п. 5). В частности, свободные от X неавтономные члены могут отсутствовать (соответствующие резонансы называются параметрическими).

Не вызывает затруднений также случай, когда неавтономные члены содержат несколько гармоник с амплитудами $\sim \varepsilon$ и частотами ω_n , такими, что $|\omega_i - \omega_k| \gg |\gamma_0|$ при $i \neq k$. Условие резонанса есть $m\Omega_0 \approx n_i\omega_i + \dots + n_k\omega_k$; эффективное число $n = |n_i| + \dots + |n_k|$.

Выше предполагалось, что задача (1.2) имеет только одно критическое значение p_0 . Пусть p_4 — другое такое значение (γ_4 мало); тогда имеет место внутренний резонанс, т. е. существуют взаимно-простые числа m_0, n_0 , для которых $p_4 \approx (n_0/m_0)p_0$, и числа m_4, n_4 , для которых $p_4 \approx (n_4/m_4)\omega$. Из совместного рассмотрения уравнений для Q, Q_4 можно найти, что приближение (1.4) для Q применимо, если $m_0 + n_0 > 4$, $\chi < \chi_4$, $\gamma_4 < \gamma_* < 0$, где $\gamma_* \sim Q^2 \sim \varepsilon^{2\chi}$; если возмущение почти периодическое, то здесь следует использовать эффективные числа n .

Отметим, что все сказанное выше применимо к системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями.

5. В качестве примера рассмотрим задачу для $X = (\xi, w)$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} X' + BX' + T &= 0, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = (0, \lambda w + \Phi') \\ \Phi &= w^2 / (1 + \xi) - \xi + [(1 + \xi)^\beta - 1] / \beta = w^2 + h\xi^2 + \dots, \\ (h &= 1/2 (\beta - 1)) \\ (d\xi + w)_0 &= 0, \quad (w_1) = (1 + \xi)_1 2\varepsilon \cos \omega t \\ 0 \leq x \leq l &= 1 + 2(\varepsilon / \omega) \sin \omega t, \quad a > 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , штрих — по x ; в граничных условиях индексы 0, 1 после скобки относятся к значениям $x = 0, l$. Задача (5.1) описывает колебания газа в трубе с емкостью, возбуждаемые жестким поршнем [2].

После введения координаты $y = x/l$ получается задача

$$(5.2) \quad X' - (l/l)yX' + BX'/l + T_+ = 0, \quad T_+ = (0, \Phi'/l + \lambda w)$$

В граничных условиях индексы 0,1 теперь относятся к значениям $y = 0,1$.
Решение линейной автономной задачи определяется соотношениями

$$(5.3) \quad \begin{aligned} p_0 &= ik, \quad k = \frac{1}{2}i\lambda + (\kappa^2 - \frac{1}{4}\lambda^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \kappa = -a\kappa \\ X_1 &= (\cos \theta, -i \sin \theta), \quad \theta = \kappa(y - 1) \end{aligned}$$

Здесь X_1 взято при $\lambda = 0$; в этом приближении собственная функция сопряженной задачи $Z = X_1$.

В дальнейшем величина $\frac{1}{2}\omega$ считается близкой к первому корню $\kappa = \kappa_1$ уравнения (5.3). Значение a берется таким, что внутренние резонансы не нарушают приближения (1.4) для $\zeta = \frac{1}{2}$; такие значения a существуют [2].

В (1.3) входит член $\bar{Q}\varepsilon E^{1/2}Y(x)$; из задачи для Y определяется коэффициент p_1 (достаточно найти его при $\lambda = 0, \omega = 2\kappa$). Предварительно необходимо найти X_2 из задачи

$$2\kappa i X_2 + B X_2' = 0, \quad (w)_1 = 1, \quad (2i\kappa \xi + w)_0 = 0$$

Ее решение

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= -i(\sin 2\theta + b \cos 2\theta), \quad w_2 = \cos 2\theta - b \sin 2\theta \\ b &= (1 + 3a^2\kappa^2) / (2a^3\kappa^3) \end{aligned}$$

Задача для Y имеет вид

$$(5.5) \quad \begin{aligned} i\kappa Y + B Y' + S &= 0, \quad (w)_1 = 1, \quad (i\kappa \xi + a p_1 \cos \kappa + w)_0 = 0 \\ S &= p_1 X_1 - y \bar{X}_1' - B \bar{X}_1' / (2i\kappa) + (0, \Phi_0') \\ \Phi &= 2(\bar{w}_1 w_2 + h \bar{\xi}_1 \xi_2) \end{aligned}$$

Подстановка

$$Y = Y_* + A / (i\kappa), \quad A = (-1/a - ip_1 \cos \kappa, i\kappa)$$

сводит (5.5) к задаче для Y_* с однородными условиями и свободным членом $\Psi = A + S$. Решение этой задачи существует, если $\langle \Psi, Z \rangle = 0$; отсюда получается

$$(5.6) \quad (1 + a \cos^2 \kappa) p_1 = -i \int_0^1 \Phi_0' \sin \theta dy - \frac{1}{2}$$

Из (5.3) — (5.6) видно, что p_1 вещественно; если $l = 1$ в задаче (5.1), то правая часть в (5.6) уменьшается на $\frac{1}{2}$.

Для задачи (5.1) коэффициент p_2 в (1.4) оказывается мнимым [2]. Согласно изложению в п. 4 стационарное решение Q определяется из (1.4), если величины $p_{1,2}$ не малы; при $\lambda > \lambda_* \sim \varepsilon^2$ решение устойчиво.

Поступила 18 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев А. А. Автоколебательные режимы и бегущие слои в разряде. Докл. АН СССР, 1952, т. 84, № 1.
2. Пономаренко Ю. Б. О главном резонансе в гидродинамике. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
3. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
4. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.