Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. Б. Колмановский, Т. Л. Майзенберг

(Москва)

Рассматриваются задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции для случая, когда наблюдаемая и ненаблюдаемая компоненты процесса описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с последействием. Изучение этих задач сведено с помощью принципа двойственности [1] к исследованию управляемых систем с последействием, для которых получен синтез оптимального управления, установлены условия существования и единственности решения уравнения Беллмана, приведены точные его решения.

Решение задачи экстраполяции легко вытекает из решения задачи фильтрации, а исследование задачи интерполяции осуществляется подобно фильтрации [2]. Поэтому изложим подробно лишь обоснование формул оптимальной фильтрации, ограничиваясь в отношении экстраполяции и интерполяции указанием на необходимые модификации в рассуждениях.

Предположим, что система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = (A(t)\,x(t) + B(t)x(t-h_1))\,dt + \sigma_1(t)\,d\xi_1(t) \tag{1.1}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(s)=0, \quad s<0, \quad x(0)=x_0$$

описывает некоторый ненаблюдаемый случайный процесс $x(t)$. Доступный наблюдению процесс $y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$dy(t) = [g(t)\,x(t-h_2) + k(t)\,x(t-h_3)]\,dt + \sigma_2(t)\,d\xi_2(t) \tag{1.2}$$
$$y(0) = 0$$

Здесь $T \geqslant 0$ — произвольный фиксированный момент времени, $x(t)$ принадлежит n-мерному евклидову пространству E_n, а $y(t) \in E_l$. Элементы матриц $A(t)$, $g(t)$, $k(t)$, $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными функциями, а элементы матрицы $B(t)$ — кусочно-непрерывно дифференцируемыми. Случайный вектор x_0 независим от взаимнонезависимых многомерных стандартных винеровских процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ и имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей H. Размерности векторов ξ_1, ξ_2 произвольны. Матрица $N_1(t) = \sigma_2(t)\,\sigma_2'(t)$ равномерно положительно определена на $[0, T]$; здесь штрих — знак транспонирования. Постоянные h_1, h_2, h_3 неотрицательны, причем $h_2 \leqslant h_3$.

Заметим, что системы вида (1.1), (1.2) рассматриваются только для простоты записи. Весь ход дальнейших рассуждений справедлив и для уравнений с несколькими дискретными запаздываниями и распределенным запаздыванием.

При сделанных предположениях существование и единственность решения уравнения (1.1) следует из [3]. Обозначим через $m(T)$ и $D(T)$ соответственно условные математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора $x(T)$ при условии $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Как известно [3], $m(T)$ есть наилучшая в смысле среднего квадратического оценка $x(T)$, а $D(T)$ — корреляционная матрица вектора $x(T) - m(T)$. Выражения для $m(T)$ и $D(T)$ и представляют собой формулы оптимальной фильтрации.

Введем в рассмотрение n векторов $\alpha_i(t) \in E_n (i = 1, 2, \ldots, n)$, каждый из которых определяется на отрезке $[0, T]$ как решение системы уравнений

$$(1.3)\qquad \alpha_i^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = -A'(t)\alpha_i(t) - B'(t+h_1)\alpha_i(t+h_1) + g'(t+ \\ + h_2)u_i(t+h_2) + k'(t+h_3)u_i(t+h_3)$$

Здесь управление $u_i(t)$ должно минимизировать на траекториях системы (1.3) квадратичный функционал

$$(1.4)\qquad J(u_i) = \alpha_i'(0)H\alpha_i(0) + \int_0^T [u_i'(t)N_1(t)u_i(t) + \\ + \alpha_i'(t)N_2(t)\alpha_i(t)]\,dt, \quad N_2 = \sigma_1\sigma_1'$$

Задача (1.3), (1.4) решается при следующих начальных условиях: $\alpha_i(t) = 0$ при $t > T$, вектор $\alpha_i(T)$ имеет i-ю компоненту, равную единице, а все остальные равны нулю: $u_i(t) = 0$ для $t > T$.

Кроме того, $B(t)$, $g(t)$, $k(t)$ полагаются равными нулю вне отрезка $[0, T]$.

Отметим, что уравнение фильтрации при $g(t) = 0$, когда система (1.3), (1.4), в сущности, не содержит запаздывания в управлении, получены в [4]. Существенной особенностью рассматриваемой в данной работе задачи (1.3), (1.4) является наличие запаздывания как в фазовых координатах, так и в управлении, что, видимо, представляет и самостоятельный интерес.

Обозначим через $m_i(T)$ i-ю компоненту вектора $m(T)$, а через $d_{ij}(T)$ — элемент матрицы $D(T)$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, используя модификацию принципа двойственности Калмана между управлением и наблюдением (см. [1]) для систем с запаздыванием, имеющуюся в [4], заключаем, что (M — знак математического ожидания)

$$(1.5)\qquad m_i(T) = \int_0^T u_i'(t)\,dy(t)$$

$$d_{ii}(T) = J(u_i) = M\left[x_i(T) - \int_0^T u_i'(t)\,dy(t)\right]^2$$

$$d_{ij}(T) = M\left[x_i(T) - \int_0^T u_i'(t)\,dy(t)\right]\left[x_j(T) - \int_0^T u_j'(t)\,dy(t)\right]$$

Отметим, что развитие принципа двойственности между управлением и наблюдением в минимаксной постановке содержится в работах [5, 6] для обыкновенных систем и в [7] для систем с запаздыванием.

Для определения остальных элементов $d_{ij}(T)$ достаточно решить оптимальную задачу (1.3), (1.4), выбирая в качестве начальных при $t = T$ условий векторы $\alpha_i(T)$, у которых ij-я компоненты равны единице, а остальные — нулю.

Итак, в силу (1.4), (1.5) построение оптимального фильтра сведено к исследованию задачи управления (1.3), (1.4). Произведем в (1.3), (1.4) некоторые упрощающие преобразования. Сделаем замену переменных $t \to T - t$. Тогда, сохраняя прежние обозначения для всех функций и опуская индекс i, получим

$$\dot\alpha(t) = A'(T-t)\alpha(t) + B'(T-t+h_1)\alpha(t-h_1) - \tag{1.6}$$
$$- g'(T-t+h_2)u(t-h_2) + k'(T-t+h_3)u(t-h_3)$$

$$J(u) = \alpha'(T)H\alpha(T) + \int_0^T [u'(t)N_1(t)u(t) + \alpha'(t)N_2(t)\alpha(t)]\,dt \tag{1.7}$$

Начальные условия задачи (1.6), (1.7) при $t \leqslant 0$, очевидно, совпадают с соответствующими условиями задачи (1.3), (1.4) при $t \geqslant T$.

Будем далее считать в (1.6) матрицу $A(t) \equiv 0$. Этого всегда можно добиться с помощью замены переменных $\alpha(t) \to z(0, t)\alpha(t)$, где $z(s, t)$ — фундаментальное решение системы (1.6) при $B(t) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$, $k(t) \equiv 0$. В результате этого и простых переобозначений система (1.6)′ представима в виде

$$\alpha^{\cdot}(t) = B(t)\alpha(t-h_1) + g(t)u(t) + k(t)u(t-h) \tag{1.8}$$

Критерий качества сохраняет прежний вид (1.7). При этом параметры задачи (1.7), (1.8) легко выражаются описанным образом через коэффициенты соотношений исходной задачи управления (1.6), (1.7).

Задача (1.8), (1.7) решается при начальных условиях: $\alpha = a(\tau)$ $(\tau \leqslant 0)$, $u = b(\tau)$, $(\tau < 0)$; $a(\tau)$, $b(\tau)$ — некоторые измеримые ограниченные функции. Ход рассуждений и методы, которые будут использоваться при исследовании этой задачи, подобны в некоторых местах методам, использованным в [8]. Поэтому в дальнейшем при построении синтеза будем останавливаться лишь на отличительных моментах. Отметим, что обоснованию необходимых условий оптимальности в системах с запаздыванием в управлении посвящены работы [9–11].

Обозначим через $V_0(t, \alpha, \alpha(t+\tau), u(t+\rho))$ минимальное значение функционала

$$V(t, \alpha, \alpha(t+\bar\tau), u(t+\rho)) = \alpha'(T)H\alpha(T) + \tag{1.9}$$
$$+ \int_t^T [u'(s)N_1(s)u(s) + \alpha'(s)N_2(s)\alpha(s)]\,ds$$

Здесь $\alpha = \alpha(t)$; $\alpha(t+\tau)$, $u(t+\rho)$ $(-h_1 \leqslant \bar\tau < 0,\ -h \leqslant \rho \leqslant 0)$ — отрезки траектории системы (1.7) и управление на интервалах $(t - h_1, t)$ и $(t - h, t)$ соответственно. Рассматривая функционалы V как функции вида $v(t, \alpha)$, можно показать [12], что для нахождения оптимальных значений функционала критерия качества и управления достаточно решить уравнение Беллмана

$$\min_{u \in E_l} \left\{ \frac{dv(t, \alpha)}{dt} + u' N_1(t) u + \alpha' N_2(t) \alpha \right\} = 0 \tag{1.10}$$

Здесь dv / dt — полная производная вдоль траекторий системы (1.7) при управлении u (см. [13]).

Будем искать решение уравнения (1.10) в виде

$$\begin{aligned} v(t, \alpha) &= V_0(t, \alpha, \alpha(t + \bar{\tau}), u(t + \rho)) = \alpha'(t) P_1(t) \alpha(t) + \\ &+ \alpha'(t) \int_{-h_1}^{0} P_2(t, s) \alpha(t + s) ds + \int_{-h_1}^{0} \alpha'(t + s) P_2'(t, s) \alpha(t) ds + \\ &+ \alpha'(t) \int_{-h}^{0} P_4(t, r) u(t + r) dr + \int_{-h}^{0} u'(t + r) P_4'(t, r) \alpha(t) dr + \\ &+ \int_{-h_1}^{0} \int_{-h_1}^{0} \alpha'(t + s) P_3(t, s, s_1) \alpha(t + s_1) ds_1 ds + \\ &+ \int_{-h_1}^{0} \int_{-h}^{0} \alpha'(t + s) P_5(t, s, r) u(t + r) dr ds + \\ &+ \int_{-h_1}^{0} \int_{-h}^{0} u'(t + r) P_5'(t, s, r) \alpha(t + s) dr ds + \\ &+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} u'(t + r) P_6(t, r, r_1) u(t + r_1) dr dr_1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где P_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ — некоторые матрицы с достаточно гладкими элементами, причем $P_0(t)$ неотрицательно определена, а при $i = 3,6$ выполняется условие $P_i'(t, s, r) = P_i(t, r, s)$.

Подставляя (1.8), (1.11) в (1.10), после преобразований находим, что синтез оптимального управления $u_0(t) = u_0(t, \alpha, \alpha(t + \bar{\tau}), u(t + \rho))$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -N_1^{-1}(t)([g'(t) P_1(t) + P_4'(t, 0)] \alpha(t) + \\ &+ \int_{-h_1}^{0} [g'(t) P_2(t, s) + P_5'(t, s, 0)] \alpha(t + s) ds + \\ &+ \int_{-h}^{0} [g'(t) P_4(t, r) + P_6(t, 0, r)] u_0(t + r) dr \end{aligned} \tag{1.12}$$

Синтез управления (1.12) задает его в виде функционала от реализовавшихся значений траектории и управления. Заметим, что равенство (1.12) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра относительно $u_0(t)$. Поэтому, определяя из него стандартным образом $u_0(t)$, можно получить оптимальное управление в виде функционала, зависящего только от фазовых координат.

Объединяя (1.9) — (1.12) и используя метод неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений в частных производных для определения неизвестных функций P_i

(1.13)
$$P_1^{\bullet}(t) + P_2(t, 0) + P_2'(t, 0) + N_2(t) = [P_1(t)g(t) + P_4(t, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_1(t) + P_4'(t, 0)]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right)P_2(t, s) + P_3(t, 0, s) = [P_1(t)g(t) + P_4(t, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_2(t, s) + P_5'(t, s, 0)]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s_1}\right)P_3(t, s, s_1) = [P_2'(t, s)g(t) + P_5(t, s, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_2(t, s_1) + P_5'(t, s_1, 0)]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\right)P_4(t, r) + P_5(t, 0, r) = [P_1(t)g(t) + P_4(t, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_4(t, r) + P_6(t, 0, r)]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial r}\right)P_5(t, s, r) = [P_2'(t, s)g(t) + P_5(t, s, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_4(t, r) + P_6(t, 0, r)]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r_1}\right)P_6(t, r, r_1) = [P_4'(t, r)g(t) + P_6(t, r, 0)]N_1^{-1}(t)[g'(t)P_4(t, r_1) + P_6'(t, r_1, 0)]$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad -h_1 \leqslant s, s_1 \leqslant 0, \quad -h \leqslant r, r_1 \leqslant 0$$

Точно так же получим систему граничных условий. Для любых $-h_1 < s$, $s_1 \leqslant 0$, $-h < r$, $r_1 \leqslant 0$.

(1.14)
$$P_1(T) = H, \quad P_2(T, s) = P_3(T, s, s_1) = P_4(T, r) = P_5(T, s, r) = P_6(T, r, r_1) = 0$$

Для $t < T$

(1.15)
$$P_1(t)k(t) - P_4(t, -h) = 0$$
$$k'(t)P_2(t, s) - P_5'(t, s, -h) = 0$$
$$B'(t)P_1(t) - P_2'(t, -h_1) = 0$$
$$2B'(t)P_2(t, s) - P_3(t_3 - h_1, s) - P_3'(t, s, -h_1) = 0$$
$$B'(t)P_4(t, r) - P_5(t, -h_1, r) = 0$$
$$2k'(t)P_4(t, r) - P_6(t, -h, r) - P_6'(t, r, -h) = 0$$

Таким образом, если оптимальное значение функционала (1.9) имеет вид (1.11) при достаточно гладких коэффициентах P_i, то эти функции являются единственным (почти всюду) решением задачи (1.13) — (1.15). Напротив, если существует решение задачи (1.13) — (1.15), то оно единственно для почти всех значений аргументов и по формулам (1.8), (1.11), (1.12), определяет оптимальное управление, траекторию системы и оптимальное значение критерия качества.

Доказательство существования решения системы уравнений (1.13) — (1.15) проводится путем обоснования алгоритма последовательных приближений, предложенного для иных задач управления в [12].

Пусть $u_1 = u_1(t)$ (первое приближение к оптимальному управлению) удовлетворяет при $t \geqslant 0$ соотношению

(1.16)
$$u_1(t) = q_1(t)\alpha_1(t) + \int_{-h_1}^{0} q_2(t, s)\alpha_1(t+s)\,ds + \int_{-h}^{0} q_3(t, r)u_1(t+r)\,dr$$

где матрицы $q_1(t)$, $q_2(t, s)$, $q_3(t, r)$ — ограниченные кусочно-непрерывно дифференцируемые по t, s, r функции; $u_1(\tau) = \omega(\tau)$ при $\tau < 0$, где $\omega(\tau)$ — некоторая заданная измеримая ограниченная функция; $\alpha_1(t)$ — решение (1.8) при $u = u_1$. Пусть даны два произвольных момента времени t, s, причем $s > t$. Установим формулу, выражающую $\alpha_1(s)$, $u_1(s)$ через $\alpha_1(t)$, $u_1(\tau)$, $\tau \leqslant t$. С этой целью будем интерпретировать соотношения (1.8), (1.16) как систему $n + l$ уравнений для определения $n + l$ компонент вектора $z(t) = \{\alpha_1(t), u_1(t)\}$. Нетрудно видеть, что решения этой системы совпадают с решениями системы, образованной (1.8) и уравнением, получающимся при почленном дифференцировании правой и левой частей (1.16), имеющим вид

(1.17)
$$u_1^{\bullet}(t) = [q_1^{\bullet}(t) + q_2(t, 0)]\,\alpha_1(t) + [q_1(t)g(t) + q_3(t, 0)]\,u_1(t) + [q_1(t)B(t) - q_2(t, -h_1)]\,\alpha_1(t - h_1) + [q_1(t)k(t) - q_3(t, -h)]\,u_1(t - h) + \int\limits_{-h_1}^{0}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right] q_2(t, s)\,\alpha_1(t + s)\,ds + \int\limits_{-h}^{0}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\right] q_3(t, r)\,u_1(t + r)\,dr$$

Граничные условия для (1.17) имеют вид

$$u_1 = \omega(\tau), \quad \tau < 0, \quad u_1(0) = q_1(0)\,\alpha_1(0) + \int\limits_{-h_1}^{0} q_2(0, s)\,\alpha_1(s)\,ds + \int\limits_{-h}^{0} q_3(0, r)\,\omega(r)\,dr$$

Объединяя (1.8) и (1.17), получим обычную систему $n + l$ дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

(1.18)
$$z^{\bullet}(t) = C(t)z(t) + \sum_{i=1}^{2} D_i(t)z(t - h_i) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-h_i}^{0} G_i(t, \sigma)\,z(t + \sigma)\,d\sigma$$
$$(z(\tau) = \{a(\tau),\ u_1(\tau)\},\quad \tau \leqslant 0)$$

где обозначено $h_2 = h$. Матрицы $C(t)$, $D_i(t)$ определяются по коэффициентам (1.8), (1.16), (1.17) следующим образом:

$$C(t) = \begin{Vmatrix} 0 & g(t) \\ q_1^{\bullet}(t) + q_2(t, 0) & q_1(t)g(t) + q_3(t, 0) \end{Vmatrix}$$

$$D_1(t) = \begin{Vmatrix} B(t) & 0 \\ q_1(t)B(t) - q_2(t, -h_1) & 0 \end{Vmatrix}$$

$$D_2(t) = \begin{Vmatrix} 0 & k(t) \\ 0 & q_1(t)k(t) - q_3(t, -h) \end{Vmatrix}$$

Матрицы $G_i(t, \sigma)$ $(i = 1, 2, -h_i \leqslant \sigma_i \leqslant 0)$ имеют такой вид:

$$G_1(t, \sigma_1) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial \sigma_1}\right) q_2(t, \sigma_1) & 0 \end{Vmatrix}$$

$$G_2(t, \sigma_2) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial \sigma_2}\right) q_3(t, \sigma_2) \end{Vmatrix}$$

Согласно формуле Коши [14] решение системы (1.18) удовлетворяет для всех $s \geqslant t$ соотношению

$$(1.19)\qquad z(s) = K(s, t) z(t) + \sum_{i=1}^{2} \int_{-h_i}^{0} K_i(s, t, \sigma) z(t+\sigma) d\sigma$$

$$K_i(s, t, \sigma) = K(s, t+\sigma+h_i) D_i(t+\sigma+h_i) + $$
$$+ \int_{-h_i}^{\sigma} K(s, t+\sigma-\rho) G_i(t+\sigma-\rho, \rho) d\rho$$

где $K(s, t)$ — фундаментальное решение системы (1.18). В силу (1.16), а также вида матриц D_i, G_i соотношение (1.19) распадается на два следующих:

$$(1.20)\qquad \alpha_1(s) = \beta_1(s, t)\alpha_1(t) +$$
$$+ \int_{-h_1}^{0} \beta_2(s, t, \tau)\alpha_1(t+\tau) d\tau + \int_{-h}^{0} \beta_3(s, t, \sigma) u_1(t+\sigma) d\sigma$$
$$u_1(s) = \gamma_1(s, t)\alpha_1(t) +$$
$$+ \int_{-h_1}^{0} \gamma_2(s, t, \tau)\alpha_1(t+\tau) d\tau + \int_{-h}^{0} \gamma_3(s, t, \sigma) u_1(t+\sigma) d\sigma$$

Здесь β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) — некоторые матрицы с кусочно-непрерывно дифференцируемыми элементами. Их выражения через элементы K, K_i и q_i можно получить указанным выше образом. Соотношения (1.20) определяют управление $u_1(s)$ и соответствующую траекторию $\alpha_1(s)$ системы (1.8) при всех $t \leqslant s \leqslant T$, если для последних произвольно заданы начальные значения $u(t+\rho)$ $(-h < \rho < 0)$, $\alpha(t+\tau)$ $(-h_1 < \tau < 0)$ и $\alpha(t)$.

Заменим в правой части (1.9) функции $\alpha(s)$ и $u(s)$ по формулам (1.20), полагая $\alpha(s) = \alpha_1(s)$, $u(s) = u_1(s)$, и обозначим результат подстановки через V_1. После преобразований находим, что функционал $V_1 = V_1(t, \alpha, \alpha(t+\tau), u(t+\rho))$ имеет вид (1.11) с некоторыми коэффициентами P_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Рассматривая V_1 как функцию аргументов t и α, т. е. $V_1 = v_1(t, \alpha)$, где $\alpha = \alpha(t)$, получим, что производная

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}\alpha^{\bullet}(t)$$

есть некоторый функционал $l_1(t, \alpha(t), u(t), \alpha(t+\tau), u(t+\rho))$, причем для всех $t \leqslant T$ по построению выполняется равенство

$$(1.21)\qquad l_1(t, \alpha_1(t), u_1(t), \alpha_1(t+\tau), u_1(t+\rho)) +$$
$$+ u_1'(t) N_1(t) u_1(t) + \alpha_1'(t) N_2(t) \alpha_1(t) = 0$$

Определим теперь $u_2 = u_2(t)$ (второе приближение к оптимальному управлению) так, чтобы для любых t, α, $\alpha(t+\tau)$ и $u(t+\rho)$ выполнялось условие

$$(1.22)\qquad \min_{u\in R_l} \{l_1(t, \alpha, u, \alpha(t+\tau), u(t+\rho)) + u'N_1(t) u +$$
$$+ \alpha' N_2(t) \alpha\} = l_1(t, \alpha, u_2(t), \alpha(t+\tau), u(t+\rho)) +$$
$$+ u_2'(t) N_1(t) u_2(t) + \alpha' N_2(t) \alpha$$

Из (1.22) получим, что $u_2(t)$ удовлетворяет соотношению вида (1.12), если в нем заменить функции u_0, α и P_i на u_2, α_2 и P_{i1} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ соответственно, причем $\alpha_2 = \alpha_2(t)$ —траектория системы (1.8), соответствующая управлению u_2. Таким образом, $u_2(t)$ определяется уравнением, аналогичным (1.16), и, следовательно, останутся справедливыми все результаты, полученные выше для управления $u_1(t)$.

Действуя аналогичным образом, находим последовательность управлений $u_k(t) = u_k(t, \alpha, \alpha(t + \bar{\tau}), u(t + \rho))$ из соотношений, подобных (1.21), (1.22)

$$(1.23)\qquad \min_{u\in R_l}\left\{\frac{d}{dt}V_{k-1}(t) + u'N_1(t)u + \alpha'(t)N_2(t)\alpha(t)\right\} = \\ = \frac{d}{dt}V_{k-1}(t) + u_k'(t)N_1(t)u_k(t) + \alpha'(t)N_2(t)\alpha(t)$$

При этом последовательность функционалов V_k есть результат подстановки в правую часть (1.9) выражений для $u_k(s)$ и $\alpha_k(s)$, где $\alpha_k(s)$ — решение уравнения (1.8) при $u(s) = u_k(s)$. Так же, как в случае V_1, u_2, устанавливается, что V_k имеет вид (1.11) с некоторыми коэффициентами P_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Управление $u_k(t)$ удовлетворяет уравнению типа (1.12), если в нем положить $u_0 = u_k$, $\alpha = \alpha_k$, $P_i = P_{i,k-1}$. Коэффициенты функционалов u_k, V_k обладают теми же свойствами, что и коэффициенты первых приближений, и при всех k справедливо равенство, понимаемое в смысле (1.21), т. е.

$$(1.24)\qquad \frac{d}{dt}V_k + u_k'(t)N_1(t)u_k(t) + \alpha_k'(t)N_2(t)\alpha_k(t) = 0$$

В силу произвольности задания траектории системы и управления на интервалах $(t - h_1, t]$ и $(t - h, t)$ соответственно, методом неопределенных коэффициентов из (1.24) получим систему линейных уравнений в частных производных, которой удовлетворяют функции P_{ik}. Левые части этих уравнений и граничные условия имеют тот же вид, что и в (1.13) — (1.15) с заменой P_i на P_{ik}, а правые части, которые можно представить как произведение матриц $RN_1^{-1}(t)S$, заменяются на

$$R_kN_1^{-1}(t)S_{k-1} + R_{k-1}N_1^{-1}(t)S_k - R_{k-1}N_1^{-1}(t)S_{k-1}$$

где R_k, S_k — двучлен, соответствующий R или S и получающийся при замене P_i на P_{ik}.

Предельный переход при $k \to \infty$ в соотношениях (1.23), (1.24) и системе дифференциальных уравнений относительно функций P_{ik} обосновывается подобно [8]. Тем самым установлена следующая

Теорема 1. Предположим, что матрицы $g(t)$, $k(t)$ из (1.8) и $N_1(t)$, $N_2(t)$ из (1.9) имеют кусочно-непрерывные элементы, а $B(t)$ — кусочно-непрерывно дифференцируемые. Тогда решение задачи оптимального управления системой (1.8) с критерием качества (1.9) представляется в виде (1.11), (1.12) причем коэффициенты оптимальных функционалов u_0, V_0 — единственное решение системы уравнений (1.13) — (1.15).

Замечание. При $k(t) = 0$, $h = 0$ утверждения теоремы переходят в соответствующие результаты работы [8]. Укажем еще, что последовательные приближения P_{ik}, использованные при доказательстве теоремы, могут служить приближенным решением задачи (1.13) — (1.15). При этом подобно [15] можно установить, что при некоторой постоянной c

$$\| P_i(t) - P_{ik}(t) \| \leqslant c^i/i!$$

2. Точные решения. Приведем здесь формулы, дающие решение краевой задачи (1.13) — (1.15) при дополнительном предположении о том, что $N_2(t) \equiv 0$, матрицы $B(t)$, $k(t)$ абсолютно непрерывны. Отметим, что при $N_2(t) \neq 0$ задача (1.13) — (1.15) не интегрируется, вообще говоря, в явном виде даже для управляемых систем без запаздывания, т. е. для систем (1.8) с $h = h_1 = 0$.

Определим матрицу $\gamma(t)$ соотношениями (I — единичная матрица)

$$\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = -\gamma(t + h_1) B(t + h_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$\gamma(T) = I, \quad \gamma(s) \equiv 0, \quad s > T$$

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться в том, что задача (1.13) — (1.15) имеет почти всюду следующее решение;

$$\begin{aligned}
(2.1)\qquad & P_1(t) = \gamma'(t) P(t) \gamma(t) \\
& P_2(t, s) = \gamma'(t) P(t) \gamma(t + h_1 + s) B(t + h_1 + s) \\
& P_3(t, s, s_1) = B'(t + h_1 + s) \gamma'(t + h_1 + s) P(t) \gamma(t + h_1 + \\
& + s) B(t + h_1 + s) \\
& P_4(t, r) = \gamma'(t) P(t) k_1(t + r + h) \\
& P_5(t, s, r) = B'(t + h_1 + s) \gamma'(t + h_1 + s) P(t) k_1(t + r + h) \\
& P_6(t, r, r_1) = k_1'(t + r + h) P(t) k_1(t + r_1 + h) \\
& (t \leqslant T; \quad -h < s; s_1; r; r_1 \leqslant 0)
\end{aligned}$$

Здесь

$$k_1(t + r + h) = \\ = \begin{cases} \gamma(t + r + h) k(t + r + h), & t + r + h \leqslant \min(T, \quad r + h) \\ 0, & t + r + h > \min(T, \quad r + h) \end{cases}$$

Далее, $P(t)$ удовлетворяет матричному уравнению Бернулли $P^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = P(t) \; G(t) N_1^{-1}(t) G'(t) P(t)$, $P(T) = H$

$$G(t) = \begin{cases} \gamma(t) g(t), & T - h < t \leqslant T \\ \gamma(t) g(t) + \gamma(t + h) k(t + h), & 0 \leqslant t \leqslant T - h \end{cases}$$

Можно проверить, что при $H > 0$

$$P(t) = \left[I + H \int_t^T G(s) N_1^{-1}(s) G'(s)\, ds \right]^{-1} H$$

Отметим, что при $k(t) \equiv 0$ решение (2.1) задачи (1.13) — (1.15) получено в статье [16], в которой также изложен метод, с помощью которого установлены формулы (2.1).

3. Приведенное выше решение задачи фильтрации основывалось на сведении ее с помощью принципа двойственности к некоторой задаче оп-

тимального управления и исследовании этой последней. Подобный же алгоритм имеет место и для задач экстраполяции и интерполяции, причем специфика каждой из них проявляется лишь в конкретном виде двойственной задачи оптимального управления.

Рассмотрим подробнее сначала задачу экстраполяции. Эта задача состоит в построении оптимальной оценки процесса (1.1) в момент $\tau > T$ при условии, что на отрезке $[0, T]$ наблюдается величина (1.2). Обозначим через $g_0(t)$, $k_0(t)$ функции, совпадающие соответственно с $g(t)$ и $k(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и равные нулю при $t > T$.

Рассмотрим далее вспомогательную задачу фильтрации вектора $x(\tau)$, удовлетворяющего соотношениям (1.1), по результатам наблюдений за процессом $y_0(t)$, описываемым уравнением (1.2), в котором вместо $g(t)$ и $k(t)$ стоят соответственно $g_0(t)$ и $k_0(t)$. Тогда в силу независимости x_0, ξ_1, ξ_2 решение этой вспомогательной задачи фильтрации будет решением также и задачи экстраполяции. Поэтому двойственная экстраполяции задача оптимального управления имеет тот же вид, что и в п. 1 с заменой T на τ и $g(t)$, $k(t)$ на $g_0(t)$, $k_0(t)$. Отметим еще, что оптимальное управление в этой двойственной задаче равняется нулю при $t > T$ на основании определения функций g_0, k_0.

Обратимся теперь к интерполяции, состоящей в оптимальной оценке процесса (1.1) в момент $\tau \in [0, T)$ по результатам наблюдения $y(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, где $y(t)$ описывается соотношениями (1.2). Рассмотрим двойственную задачу оптимального управления системой

$$
\begin{aligned}
&\alpha_i^{\boldsymbol\cdot}(t) = -A'(t)\,\alpha_i(t) - B'(t+h_1)\,\alpha_i(t+h_1) + g'(t+h_2)\,u_i(t+h_2) + \\
&+ k'(t+h_3)\,u_i(t+h_3) - \delta_i(t-\tau_0) \qquad (3.1)\\
&\alpha_i(s) = 0,\quad u_i(s) = 0,\quad s \geqslant T
\end{aligned}
$$

Здесь $\delta_i(t)$ — вектор, i-я компонента которого — дельта-функция в нуле, а остальные равны нулю. Уравнение (3.1) понимается в смысле соответствующего интегрального тождества.

Минимизируемый функционал $J(u_i)$ имеет вид (1.4). Подобно (1.5) заключаем, что оптимальная оценка i-й компоненты вектора $x(\tau_0)$ есть

$$\int_0^T u_i'(t)\,dy(t)$$

причем

$$J(u_i) = M\left[x_i(\tau_0) - \int_0^T u_i'(t)\,dy(t)\right]^2$$

Для решения задачи синтеза (3.1), (1.4) приведем систему (3.1) к виду, аналогичному (1.8)

$$\alpha^{\boldsymbol\cdot}(t) = B(t)\,\alpha(t-h_1) + g(t)\,u(t) + k(t)\,u(t-h) + \delta_i(t-\tau_0) \qquad (3.2)$$

Как и в задаче (1.8), (1.4), оптимальное значение функционала в задаче (3.2), (1.4) представимо в виде $V_1 + V_2$, где V_1 имеет вид (1.11), а V_2 задается линейным по u и α соотношением

$$
\begin{aligned}
V_2 &= V_2(t, \alpha, \alpha(t+\bar\tau), u(t+\rho)) = P_7'(t)\,\alpha(t) + \alpha'(t)\,P_7(t) + \\
&+ \int_{-h_1}^{0} P_8'(t,s)\,\alpha(t+s)\,ds + \int_{-h_1}^{0} \alpha'(t+s)\,P_8(t,s)\,ds + \\
&+ \int_{-h}^{0} P_9'(t,r)\,u(t+r)\,dr + \int_{-h}^{0} u'(t+r)\,P_9(t,r)\,dr + P_{10}(t) \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Аналогично (1.12) оптимальное управление можно записать в форме $u = u_1 + u_2$. Здесь u_1 определяется формулой (1.12), а

$$u_2(t) = -N^{-1}(t)[g'(t)\;P_7(t) + P_9(t,\,0)]$$

Функции P_i, $i = 7, 8, 9$ удовлетворяют уравнениям, понимаемым в смысле интегрального тождества

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &P'_7(t) + P_8(t, 0) + P_1(t)\,\delta_i(t-\tau_0) = \\ &= [P_1(t)\,g(t) + P_4(t, 0)]N^{-1}(t)\,[g'(t)\,P_7(t) + P_9(t, 0)] \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right) P_8(t, s) + P_2'(t, s)\,\delta_i(t-\tau_0) = [P_2'(t, s)\,g(t) + \\ &+ P_5(t, s, 0)]\,N^{-1}(t)\,[g'(t)\,P_7(t) + P_9(t, 0)] \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\right) P_9(t, r) + P_4'(t, r)\,\delta_i(t-\tau_0) = \\ &= [P_4'(t, r)\,g(t) + P_5(t, r, 0)]\,N^{-1}(t)\,[g'(t)\,P_7(t) + P_9(t, 0)] \end{aligned}$$

Наконец, $P_{10}(t)$ определяется формулой

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} &P_{10}(t) = -P_7'(\tau_0)\,f_i(t-\tau_0) + \int_T^t [P_7'(s)\,g(s) + \\ &+ P_9'(s, 0)]\,N^{-1}(s)\,[g'(s)\,P_7(s) + P_9(s, 0)]\,ds \end{aligned}$$

Здесь вектор $f_i(t-\tau_0)$ равен нулю при $t \neq \tau_0$; при $t = \tau_0$ его i-я компонента равна единице, а все прочие — нулю.

Граничные условия для системы (3.4) имеют вид

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} &P_7(T) = P_8(T, s) = P_9(T, r) = 0 \qquad (-h_1 \leqslant s \leqslant 0,\ -h \leqslant r \leqslant 0) \\ &B'(t)\,P_7(t) - P_8(t, -h_1) = 0 \\ &k'(t)\,P_7(t) - P_9(t, -h) = 0, \quad 0 < t < T \end{aligned}$$

Соотношения (3.4) — (3.6), (1.13) — (1.15) образуют замкнутую систему уравнений, определяющих синтез управления в задаче (3.1), (1.4), а следовательно, и формулы оптимальной интерполяции. При этом подобно доказательству теоремы 1 устанавливается, что при выполнении ее требований о коэффициентах соотношений (1.8), (1.9) существует единственное решение задачи (3.4) — (3.6), (1.13) — (1.15).

Поступила 6 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. *Ройтенберг Я.* Н. Гироскопы. М., «Наука», 1975.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
4. *Колмановский В. Б.* О фильтрации некоторых стохастических процессов с последействием. Автоматика и телемеханика, 1974, № 1.
5. *Куржанский А. Б.* О двойственности задач оптимального управления и наблюдения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения. Автоматика и телемеханика, 1971, № 3.
7. *Ананьев Б. И.* О двойственности задач оптимального наблюдения и управления для линейных систем с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 7.
8. *Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием. Автоматика и телемеханика, 1973, № 1.
9. *Alekal Jogish, Brunovsky P., Chyung Dong H., Hee E. B.* The quadratic problem for systems with time delays. IEEE Trans., Autom, Control, Vol. 16, No 6, 1971.
10. *Вержбизки А.* Принцип максимума для процессов с нетривиальным запаздыванием управления. Автоматика и телемеханика, 1970, № 10.
11. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1972.
12. *Беллман Р.* Динамическое программирование М., Изд-во иностр. лит., 1954.
13. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
14. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М., «Мир», 1967.
15. *Колмановский В. Б.* Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием. Problems of control and information theory, 1974, vol. 3, № 1.
16. *Колмановский В. Б.* Точные формулы в задаче управления некоторыми системами с последействием. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.