Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

МИНИМАКСНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ

Б. И. Ананьев

(Свердловск)

Для линеаризованной модели управляемого возмущенного движения рассматривается минимаксная задача коррекции при условии, что доступная информация ограничена измерением функции координат системы [1–6]. Решение этой задачи, основанное на методах минимаксной квадратичной фильтрации [7] и оптимального управления по неполным данным [8], доведено до процедур, реализуемых на ЭВМ.

1. Постановка задачи. Дана n-векторная управляемая система и m-векторная система измерения

$$x^{\cdot}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \quad t_0-\delta \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad \delta > 0 \tag{1.1}$$

$$y(t) = G(t)x(t) + \xi \tag{1.2}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $G(t)$ — известные непрерывные матрицы соответствующих размерностей; $u = u(t)$ — q-векторное управление, стесненное ограничением

$$\langle u'(\cdot)Q(\cdot)u(\cdot)\rangle^{\vartheta} \leqslant \mu^2, \quad Q'(t) = Q(t) > 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\langle f(\cdot)\rangle^t = \int\limits_{t_0-\delta}^{t} f(s)\,ds\right)$$

где $Q(t)$ — непрерывная и положительно-определенная $q \times q$-матрица; штрих означает транспонирование.

Здесь и ниже символ $\langle\cdot\rangle^t$ означает интеграл, взятый по отрезку $[t_0 - \delta, t]$ от соответствующего векторного или скалярного подынтегрального выражения, как пояснено в круглых скобках в (1.3). В тех случаях, когда отрезок интегрирования $[t, \tau]$ отличается от $[t_0 - \delta, t]$, будем писать $\langle\cdot\rangle_t^\tau$. Все рассмотрения в работе, отличающиеся от конечномерных, проводятся в пространствах суммируемых с квадратом функций, снабженных, быть может, различными метриками, и это далее специально не оговаривается.

Предполагается, что неопределенные возмущения $v(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ в системах (1.1), (1.2) стеснены ограничениями

$$I^{\vartheta}(v(\cdot), \xi(\cdot)) = \langle v'(\cdot)R(\cdot)v(\cdot) + \xi'(\cdot)H(\cdot)\xi(\cdot)\rangle^{\vartheta} \leqslant \nu^2 \tag{1.4}$$

$$R'(t) = R(t) > 0, \quad H'(t) = H(t) > 0$$

Введем ряд определений. Будем использовать символы $f_t(\cdot)$ и $f(\cdot \mid t)$ в случаях, когда необходимо подчеркнуть, что функция $f = f(\tau)$, $t_0 - \delta \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ рассматривается на отрезках $[t_0 - \delta, t]$ и $[t, \vartheta]$ соответственно.

Определение 1.1. Информационным множеством $X^*(t) = X(t, y^*(\cdot))$ назовем совокупность тех и только тех векторов $x = x(t)$, которые являются концами траекторий системы (1.1), порождающих в силу (1.2) заданный сигнал $y^*(\tau)$, $t_0 - \delta \leqslant \tau \leqslant t$ при заданном управлении $u^*(\tau) \equiv 0$, $\tau < t$ и при ограничениях (1.4) на неопределенные возмущения.

Отметим, что вектор $x \in X^*(t)$ может реализоваться, вообще говоря, не при единственных возмущениях $v_t^*(\cdot)$, $\xi_t^*(\cdot)$. Совокупность всех возможных функций $\{v_t^*(\cdot), \xi_t^*(\cdot)\}$, порождающих в силу систем (1.1), (1.2) именно сигнал $y_t^*(\cdot)$ и вектор x, обозначим символом $W(y_t^*(\cdot), x)$. Определим величину

$$(1.5)\qquad \nu^2(y_t^*(\cdot), x) = \min_{v(\cdot),\,\xi(\cdot)} I^t(v(\cdot), \xi(\cdot)), \qquad \{v(\cdot), \xi(\cdot)\} \in W(y_t^*(\cdot), x)$$

и рассмотрим ограничения

$$(1.6)\qquad \langle v'(\cdot)\ R(\cdot)\, v(\cdot) + \xi'(\cdot)\ H(\cdot)\ \xi(\cdot)\rangle_t^{\vartheta} \leqslant \nu^2 - \nu^2(y_t^*(\cdot), x)$$

Далее, введем в рассмотрение множество

$$(1.7)\qquad X^{\vartheta}(u(\cdot\,|\,t)\,|\,X^*(t)) = \bigcup \{G(t, x, \vartheta, u(\cdot\,|\,t))\,|\,x \in X^*(t)\}$$

где G — область достижимости ([1], стр. 399) системы (1.1) из состояния $x = x(t)$ к моменту ϑ по всевозможным $v(\cdot\,|\,t)$, подчиненным ограничению (1.6) при $\xi(\cdot\,|\,t) = 0$, при фиксированном управлении $u(\cdot\,|\,t) \in U(t)$. Здесь и ниже $U(t)$ — множество функций $\{u(\cdot\,|\,t)\}$, подчиненных ограничению

$$(1.8)\qquad \langle u'(\cdot)\, Q(\cdot)\, u(\cdot)\rangle_t^{\vartheta} \leqslant \mu^2, \quad t \geqslant t_0$$

Определение 1.2. Множеством допустимых продолжений $Y(\tau, y_t^*(\cdot))$ сигнала $y_t^*(\cdot)$, будем называть совокупность тех и только тех функций $y_\tau(s)$, которые совпадают с сигналом $y_t^*(s)$ при $s \leqslant t$ и при $s > t$ порождаются в силу систем (1.1), (1.2) (при $u(\cdot\,|\,t) = 0$) некоторыми величинами x, $v(\cdot\,|\,t)$, $\xi(\cdot\,|\,t)$, где $x \in X^*(t)$ и $v(\cdot\,|\,t)$, $\xi(\cdot\,|\,t)$ стеснены ограничениями (1.6).

Под позицией системы (1.1) будем понимать сигнал $y_t^*(\cdot)$, реализовавшийся к моменту $t \leqslant \vartheta$ (при $u_t(\cdot) = 0$).

Определение 1.3. Стратегией корректирования $U_k = U_k(y_t^*(\cdot))$ назовем правило, согласно которому в каждой известной позиции $y_t^*(\cdot)$ принимается лишь одно из двух решений:

а) продолжить процесс наблюдения при нулевом управлении в системе (1.1);

б) прекратить наблюдение и перейти в системе (1.1) к программному управлению $u_k(\cdot\,|\,t) \in U(t)$, назначаемому стратегией на оставшийся интервал времени.

Процесс принятия решения стратегией U_k начинается с момента времени t_0.

Таким образом, согласно определению 1.3 для каждого сигнала $y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}^*(\cdot))$ и выбранной стратегии U_k существует однозначно-определенный момент времени $\tau_* = \tau_*(y^*(\cdot), U_k) \in [t_0, \vartheta]$ и соответствующая позиция $y_{\tau_*}{}^*(\cdot)$, в которой стратегия U_k впервые принимает решение б). Указанный момент τ_*, очевидно, один и тот же для всех $y(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{\tau_*}{}^*(\cdot))$.

Пусть задан функционал $\Phi(X)$, определенный на компактных множествах $X \subset R^n$ условием

$$\Phi(X) = \max\{\varphi(Dx) \mid x \in X\} \tag{1.9}$$

где $\varphi(\cdot)$ — некоторая выпуклая неотрицательная функция на R^d и D — постоянная $d \times n$-матрица. Введем обозначения

$$\Psi(u(\cdot \mid t);\ y_t{}^*(\cdot)) = \Phi(X^\vartheta(u(\cdot \mid t) \mid X^*(t))),\quad u(\cdot \mid t) \in U(t) \tag{1.10}$$

$$r(y^*(\cdot), U_k) = \Psi(u_k(\cdot \mid \tau_*);\ y_{\tau_*}{}^*(\cdot)),\ y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}{}^*(\cdot)) \tag{1.11}$$
$$\tau_* = \tau_*(y^*(\cdot), U_k)$$

В соотношении (1.11) функция $u_k(\cdot \mid \tau_*)$ выбирается стратегией U_k в момент $t = \tau_*$.

Задача. Найти оптимальную минимаксную стратегию $U_k{}^\circ$, для которой при любом $y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}{}^*(\cdot))$ справедливы неравенства

$$r(y^*(\cdot), U_k{}^\circ) \leqslant \Psi(u(\cdot \mid t);\ y_t{}^*(\cdot)),\ \forall\, u(\cdot \mid t) \in U(t) \tag{1.12}$$
$$\forall t \in [t_0, \tau_*],\quad \tau_* = \tau_*(y^*(\cdot), U_k{}^\circ)$$

$$r(y^*(\cdot), U_k{}^\circ) \leqslant \max_{y_t(\cdot)} \min_{u(\cdot \mid t)} \Psi(u(\cdot \mid t);\ y_t(\cdot)) \tag{1.13}$$
$$y_t(\cdot) \in Y(t, y_{\tau_*}{}^*(\cdot)),\ u(\cdot \mid t) \in U(t),\qquad t \in [\tau_*, \vartheta]$$

Если $U_k{}^\circ$ — оптимальная стратегия, то любое число r° такое, что

$$r^\circ \geqslant r(y^*(\cdot), U_k{}^\circ),\quad \forall\, y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}{}^*(\cdot)) \tag{1.14}$$

будем называть гарантируемым результатом стратегии $U_k{}^\circ$. Ниже будет показано, что оптимальная стратегия $U_k{}^\circ$, удовлетворяющая неравенствам (1.12), (1.13), всегда может быть построена.

Отметим, что из условия (1.13), рассмотренного при $t = \tau_*$, вытекает равенство

$$r(y^*(\cdot), U_k{}^\circ) = \min_{u(\cdot \mid \tau_*)} \Psi(u(\cdot \mid \tau_*);\ y_{\tau_*}{}^*(\cdot)) \tag{1.15}$$
$$u(\cdot \mid \tau_*) \in U(\tau_*)$$

2. Апостериорная оценка состояния и программное управление по неполным данным. Приведем аналитическое описание информационного множества $X^*(t)$. Будем предполагать далее, что система (1.1) ($u(\cdot) = v(\cdot) = 0$) вполне наблюдаема по сигналу (1.2) ($\xi(\cdot) = 0$) на любом отрезке $[t_1, t_2] \subseteq [t_0 - \delta, \vartheta]$. Данное предположение, в свою очередь, эквивалентно полной управляемости сопряженной к (1.1) системы

$$s^\cdot = -sA(t) + \lambda'(t)G(t),\quad t_0 - \delta \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.1}$$

Введем оператор

$$J^t\lambda(\tau) = G(\tau)\langle S(\cdot, \tau)\, C(\cdot)\, R^{-1}(\cdot)\, C'(\cdot)\, s'(\cdot;\ \lambda(\cdot))\rangle_\tau{}^t + \tag{2.2}$$
$$+ H^{-1}(\tau)\,\lambda(\tau),\ t_0 - \delta \leqslant \tau \leqslant t$$

где $S(t, \tau)$ — фундаментальная матрица сопряженной системы (2.1) и $s(\tau; \lambda(\cdot))$ — решение системы (2.1) с начальным условием $s(t_0 - \delta; \lambda(\cdot)) = 0$. Нетрудно проверить, что J^t — линейный самосопряженный и строго положительно-определенный (коэрцитивный) оператор, переводящий пространство суммируемых с квадратом m-векторных функций на отрезке $[t_0 - \delta, t]$ в себя. Тогда из известной теоремы функционального анализа ([9], стр. 52) будет следовать, что J^t имеет ограниченный обратный оператор, и, следовательно, уравнение $J^t\lambda(\cdot) = \mu(\cdot)$ однозначно разрешимо для любой правой части $\mu(\cdot)$.

Введем новое скалярное произведение функций, полагая

$$[\lambda(\cdot), \mu(\cdot)]^t = \langle \lambda_t'(\cdot) J^t \mu_t(\cdot) \rangle^t \tag{2.3}$$

Пусть $f^*(t, \cdot)$ и $F(t, \cdot)$ — решения уравнений

$$J^t f^*(t, \cdot) = y_t^*(\cdot), \qquad J^t F(t, \cdot) = G(\cdot) S(t, \cdot) \tag{2.4}$$

где $y_t^*(\cdot)$ — позиция, сложившаяся к моменту $t \geqslant t_0$. Во втором равенстве (2.4) $F(t, \cdot)$ — $m \times n$-матричная функция, столбцы которой $f^i(t, \cdot)$ служат решениями уравнений

$$J^t f^i(t, \cdot) = g^i(t, \cdot), \quad i = 1, \ldots, n$$

где $g^i(t, \cdot)$ — столбцы матрицы $G(\cdot) S(t, \cdot)$.

Справедливо следующее утверждение (см. [7]).

Лемма 2.1. Включение $x \in X(t, y^*(\cdot))$ эквивалентно неравенству

$$(x - x_0(t))' P(t) (x - x_0(t)) \leqslant \nu^2 - h^2(t) \tag{2.5}$$

$$P(t) = [F'(t, \cdot), F(t, \cdot)]^t \tag{2.6}$$

$$h^2(t) = [f^*(t, \cdot), f^*(t, \cdot)]^t - x_0'(t) P(t) x_0(t)$$

где $x_0(t)$ — вектор, определяемый по формуле

$$x_0(t) = P^{-1}(t) d(t), \; d'(t) = [f^*(t, \cdot), F(t, \cdot)]^t = s(t; f^*(t, \cdot)) \tag{2.7}$$

Утверждение леммы 2.1 вытекает из следующего результата.

Лемма 2.2. Из всех функций $v_t(\cdot)$, $\xi_t(\cdot)$, которые удовлетворяют тождеству (почти всюду на $[t_0 - \delta, t]$)

$$-G(\tau) \langle S(\cdot, \tau) C(\cdot) v(\cdot) \rangle_\tau^t + \xi(\tau) = J^t b(t, \tau), \quad t_0 - \delta \leqslant \leqslant \tau \leqslant t$$

где $b(t, \cdot) = f^*(t, \cdot) - F(t, \cdot) x$, именно функции вида

$$v_t^1(\tau) = -R^{-1}(\tau) C'(\tau) s'(\tau; b(t, \cdot)), \qquad \xi_t^1(\tau) = = H^{-1}(\tau) b(t, \tau)$$

доставляют выражению (1.5) минимум, равный $[b(t, \cdot), b(t, \cdot)]^t$.

Доказательство. Рассмотрим тождество по $\lambda_t(\cdot)$

$$\langle (v'(\cdot) R(\cdot) + s(\cdot; \lambda_t(\cdot)) C(\cdot)) R^{-1}(\cdot) (R(\cdot) v(\cdot) + C'(\cdot) s'(\cdot; \lambda_t(\cdot))) \rangle^t + \langle (\xi'(\cdot) H(\cdot) - \lambda_t'(\cdot)) H^{-1}(\cdot) (H(\cdot) \xi(\cdot) - \lambda_t(\cdot)) \rangle^t \equiv \equiv I^t(v(\cdot), \xi(\cdot)) - 2[\lambda_t(\cdot), b(t, \cdot)]^t + [\lambda_t(\cdot), \lambda_t(\cdot)]^t \geqslant 0$$

Полагая здесь $\lambda_t(\cdot) = b(t, \cdot)$, получаем неравенство

$$I^t(v(\cdot), \xi(\cdot)) \geqslant [b(t, \cdot), b(t, \cdot)]^t$$

которое функции $v_t^1(\cdot)$, $\xi_t^1(\cdot)$ обращают, очевидно, в равенство. Лемма установлена.

Из леммы 2.2 и формул (2.6), (2.7) вытекает равенство

(2.8) $$\nu^2(y_t^*(\cdot),\ x) = h^2(t) + (x - x_0(t))'\ P(t)\,(x - x_0(t))$$

Отметим, что ввиду полной наблюдаемости системы (1.1) по сигналу (1.2) матрица $P(t)$ (см. (2.6)) оказывается невырожденной, и информационное множество $X^*(t)$, таким образом,— невырожденный n-мерный эллипсоид с центром в точке $x_0(t)$. Величины $F(t, \tau)$, $f^*(t, \tau)$ (2.4), $P(t)$, $h^2(t)$ (2.6) и $d(t)$, $x_0(t)$ (2.7) оказываются дифференцируемыми функциями времени t (см. [7]) и удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

(2.9) $$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t} = -F(t,\tau)(A(t) + C(t)R^{-1}(t)C'(t)P(t)), \quad t \geqslant \tau$$
$$F(\tau, \tau) = H(\tau)\,G(\tau)$$

(2.10) $$P^{\boldsymbol\cdot}(t) = -A'(t)P(t) - P(t)A(t) - P(t)C(t)R^{-1}(t)C'(t)\times$$
$$\times P(t) + G'(t)H(t)G(t),\ P(t_0 - \delta) = 0$$

(2.11) $$d^{\boldsymbol\cdot}(t) = -(A'(t) + P(t)\ C(t)R^{-1}(t)C'(t))\,d(t) +$$
$$+ G'(t)\ H(t)\,y^*(t),\quad d(t_0 - \delta) = 0$$

(2.12) $$\frac{\partial f^*(t,\tau)}{\partial t} = -F(t,\tau)C(t)R^{-1}(t)C'(t)d(t), \quad t \geqslant \tau$$
$$f^*(\tau, \tau) = H(\tau)\,y^*(\tau)$$

(2.13) $$\frac{dh^2(t)}{dt} = f_1^{*\prime}(t)H^{-1}(t)f_1^*(t), \quad h^2(t_0 - \delta) = 0$$
$$f_1^*(t) = H(t)\,(y^*(t) - G(t)\,x_0(t))$$

(2.14) $$x_0^{\boldsymbol\cdot}(t) = A(t)\,x_0(t) + P^{-1}(t)\,G'(t)\,f_1^*(t), \quad t \geqslant t_0$$

Уравнения (2.10), (2.11) и (2.13), (2.14) полностью описывают динамику изменения информационного множества $X^*(t)$ (2.5).

Таким образом, можно заметить, что операторные уравнения (2.4) играют лишь вспомогательную роль. Вычисление параметров эллипсоида (2.5) можно производить прямым интегрированием уравнений (2.10), (2.11), исходя из поступающей информации $y^*(\tau)$, $t_0 - \delta \leqslant \tau \leqslant t$. При этом функции $x_0(t)$, $h^2(t)$ следует вычислять по формулам

(2.15) $$x_0(t) = P^{-1}(t)\ d(t), \quad h^2(t) = \langle f_1^{*\prime}(\cdot)\,H^{-1}(\cdot)\,f_1^*(\cdot)\rangle^t$$

Перейдем к решению программной задачи наведения, а именно, будем искать управление $u^\circ(\tau)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ такое, что

(2.16) $$\min\{\Psi(u(\cdot);\ y_t^*(\cdot))\mid u(\cdot)\in U(t)\} = \Phi^\circ(y_t^*(\cdot))$$

Из соотношений (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (2.5) и (2.8) вытекает равенство

(2.17) $$\Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U(t)}\max\{s(t;l)\,x_0(t) + \langle s(\cdot;\ l)\,B(\cdot)\,u(\cdot)\rangle_t^\vartheta +$$
$$+ s(t;\ l)\,x + (\nu^2 - h^2(t) - x'\,P(t)\,x)^{1/2}\,(\alpha(t;\ l))^{1/2} -$$
$$-\varphi^*(l)\mid x'\,P(t)x \leqslant \nu^2 - h^2(t),\ l\in R^n\}$$
$$\alpha(t;\ l) = \langle s(\cdot;\ l)\,C(\cdot)\,R^{-1}(\cdot)\,C'(\cdot)\,s'(\cdot;\ l)\rangle_t^\vartheta$$
$$s(t;\ l) = l'DS(t,\ \vartheta)$$

где $\varphi^*(\cdot)$ — сопряженная к $\varphi(\cdot)$ выпуклая функция [10]. Для того чтобы вычислить внутренний максимум по x в (2.17), воспользуемся соотношением

$$\max\{s'x + (\beta^2 - x'Px)^{1/2} r \mid x'Px \leqslant \beta^2\} = |\beta| (r^2 + s'P^{-1}s)^{1/2} \tag{2.18}$$
$$r \geqslant 0,\ P' = P > 0,\ x \in R^n$$

Максимум достигается здесь на элементе $x^\circ = |\beta| (r^2 + s'P^{-1}s)^{-1/2} P^{-1}s$. Используя (2.18) и переставляя минимум по $u(\cdot)$ и максимум по l в (2.17) окончательно получаем

$$\Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) = \max_l \{s(t;l)\, x_0(t) - \mu(\beta(t;l))^{1/2} + (\mathrm{conc}\, g)(t;l)\},\ l \in R^d \tag{2.19}$$

$$\beta(t;l) = \langle s(\cdot;l) B(\cdot) Q^{-1}(\cdot) B'(\cdot) s'(\cdot;l)\rangle_t^\vartheta \tag{2.20}$$
$$g(t;l) = (\nu^2 - h^2(t))^{1/2} (\alpha(t;l) + s(t;l) P^{-1}(t) s'(t;l))^{1/2} - \varphi^*(l)$$

Здесь символ $(\mathrm{conc}\, g)(t;l)$ означает верхнюю огибающую функции $g(t;l)$, т. е. наименьшую замкнутую вогнутую функцию, мажорирующую $g(t;l)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Оптимальное управление $u^\circ(\cdot)$ в задаче (2.16) всегда существует и удовлетворяет принципу минимума

$$\langle s(\cdot;l^\circ) B(\cdot) u^\circ(\cdot)\rangle_t^\vartheta = \min\{\langle s(\cdot;l^\circ) B(\cdot) u(\cdot)\rangle_t^\vartheta \mid u(\cdot) \in U(t)\} \tag{2.21}$$

где l° — экстремальный элемент в задаче (2.19).

Из условия (2.21) находим оптимальное управление

$$u^\circ(\tau) \equiv -\mu Q^{-1}(\tau) B'(\tau) s'(\tau; l^\circ) (\beta(t;l^\circ))^{-1/2} \tag{2.22}$$

если $\beta(t;l^\circ) \neq 0$.

Одна из трудностей при решении задачи (2.16) состоит в нахождении величины $(\mathrm{conc}\, g)(t;l)$. Лишь в некоторых случаях верхнюю огибающую функции $g(t;l)$ удается вычислить в явном виде. Пусть, например, функция $\varphi(\cdot)$ — евклидова норма. Тогда можно показать, что

$$(\mathrm{conc}\, g)(t;l) = (\nu^2 - h^2(t))^{1/2} (\pi_0^2(t)(1 - l'l) + l' P_1(t) l)^{1/2},\ l'l \leqslant 1$$

где $\pi_0^2(t)$ — наибольшее собственное число матрицы

$$P_1(t) = \langle DS(\cdot,\vartheta) C(\cdot) R^{-1}(\cdot) C'(\cdot) S'(\cdot,\vartheta) D'\rangle_t^\vartheta + DS(t,\vartheta) P^{-1}(t) S(t,\vartheta) D'$$

Формула (2.19) в этом случае примет вид

$$r^*(t) = \Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) = \max_{l'l\leqslant 1} \{s(t;l)\, x_0(t) - \mu(\beta(t;l))^{1/2} + (\nu^2 - h^2(t))^{1/2} (\pi_0^2(t)(1 - l'l) + l' P_1(t) l)^{1/2}\} \tag{2.23}$$

3. Решение задачи коррекции. Вернемся к задаче, сформулированной в п. 1. Будем предполагать далее, что функция $\varphi(\cdot)$ (см. (1.9)) — евклидова норма.

Пусть к моменту $t \geqslant t_0$ реализовалась позиция $y_t^*(\cdot)$. Находясь в данной позиции, можно подсчитать помимо гарантируемого результата $r^*(t)$ (2.23) еще одно число

$$r^*(\tau, t) = \max\{\Phi^\circ(y_\tau(\cdot)) \mid y_\tau(\cdot) \in Y(\tau, y_t^*(\cdot))\}, \quad \tau \geqslant t \tag{3.1}$$

характеризующее прогноз гарантируемого результата управления на основе информации, полученной к моменту t. Вычисляя $r^*(\tau, t)$ вперед для всех $\tau \in [t, \vartheta]$, можем, наконец, определить

$$r_*^\circ(t) = \min\{r^*(\tau, t) \mid t \leqslant \tau \leqslant \vartheta\} \tag{3.2}$$

и сравнить эту величину с $r^*(t)$.

Составим уравнение

$$r^*(t) - r_*^\circ(t) = 0, \quad t \geqslant t_0 \tag{3.3}$$

Стратегию корректирования U_k^e назовем экстремальной, если за момент окончания наблюдения $\tau_* = \tau_*(y^*(\cdot), U_k^e)$ для каждого из сигналов $y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}^*(\cdot))$ принимается минимальный корень уравнения (3.3) и в качестве управления $u_k(\cdot \mid \tau_*)$, назначаемого стратегией на отрезке $[\tau_*, \vartheta]$, выбирается функция (2.22). Справедливо утверждение:

Теорема 3.1. Экстремальная стратегия U_k^e является оптимальной, гарантирующей результат

$$r(y^*(\cdot), U_k^e) = \Phi^\circ(y_{\tau_*}^*(\cdot)) = r^*(\tau_*) = r_*^\circ(\tau_*) \leqslant r^\circ = \\ = r_*^\circ(t_0), \quad \forall\, y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}^*(\cdot)) \tag{3.4}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из определения стратегии U_k^e, соотношений (3.1), (3.2) и неравенства $\Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) > r^*(\tau_*)$, $\forall t \in [t_0, \tau_*)$. Указанное неравенство, в свою очередь, следует из того, что предположение

$$\min\{\Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) \mid t \in [t_0, \tau_*)\} = r^*(t_1) \leqslant r^*(\tau_*)$$

где $t_1 < \tau_*$, ведет к противоречию с условием $r^*(t_1) > r_*^\circ(t_1)$, выполняющимся по определению стратегии U_k^e. Предположение о том, что $r^*(\tau_*) > r_*^\circ(t_0)$, также приводит к противоречию, ибо тогда $r^*(\tau_*) > r_*^\circ(t_0) = r^*(t^1, t_0)$ для некоторого момента $t^1 \in [t_0, \vartheta]$, что невозможно.

Отметим, что оценка $r_*^\circ(t_0)$, гарантируемая стратегией U_k^e, неулучшаема в том смысле, что для любого момента $t^1 \in [t_0, \vartheta]$ может реализоваться сигнал $y_t^*(\cdot) \in Y(t, y_{t_0}^*(\cdot))$, для которого

$$r^*(t) = \Phi^\circ(y_t^*(\cdot)) = r^*(t, t_0) \geqslant r_*^\circ(t_0)$$

Последнее неравенство означает, что, пронаблюдав сигнал $y^*(\tau)$ вплоть до момента t, далее никаким выбором программного управления $u(\cdot \mid t) \in U(t)$ не сможем добиться результата, лучшего чем $r_*^\circ(t)$. Рассматриваемая задача будет содержательной, если $r_*^\circ(t_0) < r^*(t_0)$.

Итак, получаем, что момент окончания наблюдения $\tau_* = \tau_*(y^*(\cdot), U_k^e)$ достигается путем непрерывного отслеживания сигнала $y^*(t)$, вычисления параметров информационного множества $X^*(t)$, а также непрерывного подсчета чисел $r^*(t)$ (2.23) и $r_*^\circ(t)$ (3.2). Однако гарантированный результат $r_*^\circ(t_0)$ можно всегда обеспечить и более простыми процедурами.

Действительно, если $r_*^\circ(t_0) = r^*(t_0)$, то наблюдать далее не нужно вообще. Если же $r_*^\circ(t_0) < r^*(t_0)$, то можно сразу провести наблюдение вплоть до момента

$$t^1 = \max\{t \mid r^*(t, t_0) = r_*^\circ(t_0)\} > t_0 \tag{3.5}$$

При этом на отрезке $[t_0, t^1]$ может реализоваться не самый плохой для наблюдателя сигнал, и в момент t^1 можем повторить процедуру прогноза, сравнивая числа $r_*^\circ(t^1)$ и $r^*(t^1) \leqslant r_*^\circ(t)$ и т. д. вплоть до достижения равенства (3.3). В последнем случае следует прекратить дальнейшее наблюдение и применить на отрезке $[t, \vartheta]$ программное управление (2.22).

Следует подчеркнуть, что описанная процедура принятия решения направлена, прежде всего, на достижение гарантированного результата $r_*^\circ(t_0)$, в то время как экстремальная стратегия U_k^e позволяет в наибольшей степени использовать неудачный с точки зрения противника выбор сигнала $y^*(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t_0}^*(\cdot))$ и добиться наименьшей возможной реализации величины

$$\Phi^\circ(y_{\tau_*}^*(\cdot)) = \Psi(u^\circ(\cdot \mid \tau_*);\ y_{\tau_*}^*(\cdot))$$

Для того чтобы сделать рассуждения п. 3 вполне строгими, покажем достижимости максимума в (3.1) и вычислим этот максимум. Обратимся к уравнениям (2.9) — (2.14), описывающим динамику изменения множества $X^*(t)$. Для уравнений (2.13), (2.14) известны начальные условия $x_0(t_0) = P^{-1}(t_0)\, d(t_0)$, $h^2(t_0)$, полученные из наблюдения сигнала (1.2) на начальном отрезке $[t_0 - \delta, t_0]$, и нетрудно заметить, что дальнейшая эволюция этих величин однозначно определяется заданием функции $f_1^*(t)$. Рассмотрим множество всех функций $\{f_1(\cdot)\}$, заданных на отрезке $[t, \tau]$, $t \geqslant t_0$ и подчиненных ограничению

$$\langle f_1'(\cdot) H^{-1}(\cdot)\, f_1(\cdot)\rangle_t^\tau \leqslant \nu^2 - h^2(t) \tag{3.6}$$

где величина $h^2(t)$ определяется согласно формулам (2.13), (2.15).

Лемма 3.1. Сигнал $y_\tau(\cdot)$ в том и только в том случае является допустимым продолжением сигнала $y_t^*(\cdot)$ (т. е. $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau, y_t^*(\cdot))$), если существует функция $f_1(\cdot)$, удовлетворяющая неравенству (3.6) и такая, что

$$y_\tau(\alpha) = G(\alpha)\, x_0(\alpha) + H^{-1}(\alpha)\, f_1(\alpha), \quad t \leqslant \alpha \leqslant \tau \tag{3.7}$$

где $x_0(\alpha)$ — решение уравнения

$$x_0^{\boldsymbol\cdot}(\alpha) = A(\alpha)\, x_0(\alpha) + P^{-1}(\alpha)\, G'(\alpha)\, f_1(\alpha), \quad t \leqslant \alpha \leqslant \tau \tag{3.8}$$

с известным начальным условием $x_0(t) = P^{-1}(t)\, d(t)$.

Доказательство. Из (3.7) и (3.8) получаем

$$y_\tau(\alpha) = G(\alpha)\, S(\tau, \alpha)\, x_0(\tau) - \langle G(\alpha)\, S(\cdot, \alpha)\, P^{-1}(\cdot)\, G'(\cdot)\, f_1(\cdot)\rangle_\alpha^\tau + H^{-1}(\alpha)\, f_1(\alpha),\ t_0 - \delta < \alpha \leqslant \tau \tag{3.9}$$

причем функция $y_\tau(\alpha)$ совпадает с реализовавшимся сигналом $y^*(\alpha)$ при $\alpha \leqslant t$. Отсюда, используя лемму 2.2 и соотношения (2.8) — (2.14), (3.6), выводим, что сигнал (3.9) и вектор $x_0(\tau)$ в действительности могут быть реализованы в системе (1.1), (1.2), например, при возмущениях $v_t^1(\cdot)$, $\xi_t^1(\cdot)$, указанных в лемме 2.2, где $t = \tau$ и функция $b(\tau, \cdot)$ определяется как решение уравнения

$$J^\tau b(\tau, \cdot) = y_\tau(\cdot) - G(\cdot)\, S(\tau, \cdot)\, x_0(\tau)$$

Следовательно, если продолжение сигнала $y_t^*(\cdot)$ задано соотношениями (3.7), (3.8), то оно является допустимым. Обратное утверждение леммы очевидно.

Из леммы 3.1 следует, что соответствие между сигналами $y_\tau(\cdot) \in \in Y(\tau, y_t^*(\cdot))$ и функциями $f_1(\alpha)$, $t \leqslant \alpha \leqslant \tau$ является взаимно-однозначным. Учитывая этот факт и принимая во внимание (2.23), перепишем формулу (3.1) в виде

$$r^*(\tau, t) = \max_{f_1(\cdot)} \max_{l'l \leqslant 1} \{s(t; l)\, x_0(t) + \langle s(\cdot; l) \times \times P^{-1}(\cdot)\, G'(\cdot)\, f_1(\cdot)\rangle_t^\tau - \mu\,(\beta(\tau; l))^{1/2} + (\nu^2 - h^2(t) - - \langle f_1'(\cdot)\, H^{-1}(\cdot)\, f_1(\cdot)\rangle_t^\tau)^{1/2} (\pi_0^2(\tau)\,(1 - l'l) + l'\, P_1(\tau)\, l)^{1/2}\} \tag{3.10}$$

Используя соотношение, аналогичное конечномерному равенству (2.18), находим

$$r^*(\tau, t) = \max_{l'l \leqslant 1} \{s(t; l)\, x_0(t) - \mu\,(\beta(\tau; l))^{1/2} + + (\nu^2 - h^2(t))^{1/2} (\pi_0^2(\tau)\,(1 - l'l) + l'P_1(\tau)\, l + \langle s(\cdot; l)\, P^{-1}(\cdot) \times \times G'(\cdot)\, H(\cdot)\, G(\cdot)\, P^{-1}(\cdot)\, s'(\cdot; l)\rangle_t^\tau)^{1/2}\} \tag{3.11}$$

Максимум по $f_1(\cdot)$ в соотношении (3.10), очевидно, достигается. Отсюда и следует достижимость максимума в (3.1). Из формулы (3.11) также вытекает непрерывность функции $r^*(\tau, t)$ по переменным τ, t ($t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \leqslant \vartheta$).

Таким образом, процедура принятия решения экстремальной стратегией U_k^e сводится к следующей последовательности операций, которые нужно производить непрерывно по времени.

1°. Нахождение параметров эллипсоида $X^*(t)$, т. е. величин $P^{-1}(t)$, $x_0(t)$, $h^2(t)$, путем решения соответствующих дифференциальных уравнений (2.10), (2.11), (2.13).

2°. Вычисление величин $r^*(t)$ (2.23), $r^*(\tau, t)$ (3.11) и $r_*^\circ(t)$ (3.2).

3°. Нахождение минимального корня уравнения (3.3) путем сравнения величин $r^*(t)$ и $r_*^0(t)$.

Практически указанная процедура реализуется на ЭВМ в виде дискретной схемы с малым шагом по времени.

4. Пример. Рассмотрим одномерную систему, для которой состояние $x(t)$ измеряется с некоторой помехой

$$x^\cdot = u + v, \quad -\delta \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad \delta > 0 \tag{4.1}$$

$$y(t) = x(t) + \xi \tag{4.2}$$

На возмущения $v(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ наложены ограничения (4.3), управление $u(\cdot)$ стеснено условием (4.4)

$$\int_{-\delta}^{\vartheta} (v^2(s) + \xi^2(s))\, ds \leqslant \nu^2 \tag{4.3}$$

$$\int_{-\delta}^{\vartheta} u^2(s)\, ds \leqslant \mu^2 \tag{4.4}$$

Уравнения (2.9) — (2.14) в данном примере принимают вид

(4.5) $$p^{\cdot}(t) = 1 - p^2,\quad p(-\delta) = 0$$
$$d^{\cdot}(t) = -p(t)\,d(t) + y^*(t),\quad d(-\delta) = 0$$
$$dh^2(t)/dt = f_1^{*2}(t),\quad f_1^*(t) = y^*(t) - x_0(t),\quad h^2(-\delta) = 0$$
$$x_0^{\cdot}(t) = p^{-1}(t)\,f_1^*(t),\quad x_0(t) = p^{-1}(t)\,d(t)$$

Отсюда находим $p(t) = \operatorname{th}(t + \delta)$. Формулы (2.23) и (3.11) запишутся здесь следующим образом:

(4.6) $$r^*(t) = \Phi^{\circ}(y_t^*(\cdot)) = \max\{|x_0(t)| - \mu(\vartheta - t)^{1/2},\ 0\} + (\nu^2 - h_2(t))^{1/2}(\vartheta - t + p^{-1}(t))^{1/2}$$
$$r^*(\tau, t) = \max_{|l|\leqslant 1} \times$$
$$\times\left\{lx_0(t) - \mu|l|(\vartheta - \tau)^{1/2} + (\nu^2 - h^2(t))^{1/2}\left(\vartheta - \tau + p^{-1}(\tau) + l^2\int_t^{\tau} p^{-2}(s)\,ds\right)^{1/2}\right\}$$

Выберем конкретные постоянные: $\mu = \nu = 1$, $\vartheta = 3$, $\delta = 1$; и зададим моделируемый сигнал $y^*(s) \equiv 1$, $-1 \leqslant s \leqslant 3$. Тогда из уравнений (4.5) будет вытекать, что $d(t) = \operatorname{th}(t + 1)$, $x_0(t) \equiv 1$ и $h^2(t) \equiv 0$. Формулы (4.6) примут вид

$$r^*(t) = \begin{cases}\lambda(t), & t \leqslant 2\\ 1 - (3 - t)^{1/2} + \lambda(t), & t > 2\end{cases}$$
$$r^*(\tau, t) = \begin{cases}\lambda(\tau), & t \leqslant \tau \leqslant 2\\ 1 - (3 - \tau)^{1/2} + (1 + \operatorname{cth} 3)^{1/2}, & t = 2\end{cases}$$
$$\lambda(t) = (3 - t + \operatorname{cth}(t + 1))^{1/2}$$

Так как функция $\lambda(t)$ монотонно убывает, то из полученных соотношений сразу следует, что минимальный корень уравнения (3.3) равен двум. Максимум по l во второй формуле в (4.6) достигается при $t = \tau = 2$ на элементе $l = 1$. Следовательно, оптимальное программное управление $u^{\circ}(s \mid 2) \equiv -1$ (см. (2.22)).

Итак, если в момент $t = 2$ перейти на управление $u^{\circ}(s \mid 2) \equiv -1$, то в конечный момент $\vartheta = 3$ получаем значение функционала

$$\Psi(u^{\circ}(\cdot \mid 2);\ y_2^*(\cdot)) = (1 - \operatorname{cth} 3)^{1/2}$$

Если же наблюдение будет вестись и дальше до момента $\tau > 2$ (при условии, что $y_2^*(s) \equiv 1$), то тогда даже при наилучшем выборе программного управления $u^{\circ}(\cdot \mid \tau)$ значение функционала $\Psi(u^{\circ}(\cdot \mid \tau);\ y_\tau^*(\cdot))$ может достигнуть величины $(1 + \operatorname{cth} 3)^{1/2} + 1 - (3 - \tau)^{1/2} > (1 + \operatorname{cth} 3)^{1/2}$.

Автор благодарит А. Б. Куржанского за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 7 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красовский Н. Н.* Игровая задача о коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. *Охоцимский Д. Е., Рясин В. А., Ченцов Н. Н.* Оптимальная стратегия при корректировании. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 1.
4. *Черноусько Ф. Л.* Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Шелементьев Г. С.* Об одной задаче коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
6. *Ананьев Б. И., Куржанский А. Б., Шелементьев Г. С.* Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
7. *Куржанский А. Б., Пищулина А. Я.* Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях. I—III. Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 8, 9, 12.
8. *Куржанский А. Б.* Программное управление по неполным данным. Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 12.
9. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.
10. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.