Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. С. Юдаев

(Новочеркасск)

Рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений, для которых при выполнении определенных условий доказываются теоремы об экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной неустойчивости по части переменных [1–3], а также теоремы об экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной неустойчивости по первому приближению [4–7].

1. Экспоненциальная устойчивость по части переменных. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$dx / dt = X [t, x, \xi (t, \omega)] \tag{1.1}$$

где $\xi (t, \omega)$ $(t \geqslant 0)$ — измеримый случайный процесс со значениями из E_k, $X (t, x, u)$ $(x \in E_n,\ t \geqslant 0,\ u \in E_k)$ — измеримая по Борелю относительно (t, x, u) функция, $X (t, 0, u) \equiv 0$. Рассмотрим задачу об устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ по отношению к части переменных, для определенности,— по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ $(m > 0,\ n = m + p,\ p \geqslant 0)$. Обозначим согласно [3] эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а остальные — через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, \ldots, p)$, так что система (1.1) запишется в виде

$$dx / dt = X [t, y, z, \xi (t, \omega)] \tag{1.2}$$

Обозначим $\| y \| = \sup \{| y_i |;\ i = 1, \ldots, m\}$, $\| z \| = \sup \{| z_j |;\ j = 1, \ldots, p\}$, $\| \xi \| = \sup \{| \xi_s |;\ s = 1, \ldots, k\}$.

Предположим, что процесс $\xi (t, \omega)$ и функция X из (1.2) таковы, что система (1.2) вместе с начальным условием $x (t_0) = x_0 (\omega)$ определяются в области

$$t \geqslant 0, \quad \| y \| \leqslant H = \text{const}, \quad \| z \| < \infty, \quad \| \xi \| < \infty \tag{1.3}$$

новый абсолютно-непрерывный с вероятностью единица случайный процесс $x (t, \omega)$ с непрерывным по t математическим ожиданием, продолжимый при $t \geqslant 0$, удовлетворяющий уравнению

$$x (t, \omega) = x_0 (\omega) + \int_{t_0}^{t} X [s, x (s, \omega), \xi (s, \omega)]\, ds \tag{1.4}$$

(см., например, [8], стр. 26, 27). Предположим, что в области (1.3) для первых m уравнений систем (1.1) и (1.4) выполняются условия ($\varphi (t)$ —

непрерывная при $t \geqslant 0$ функция)

$$(1.5)\qquad | X_i (t, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{u}) - X_i (t, \mathrm{y}, 0, \mathrm{u}) | \leqslant \varphi (t) \| \mathrm{y} \| \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$(1.6)\qquad | X_i (t, \mathrm{y}'', 0, \mathrm{u}) - X_i (t, \mathrm{y}', 0, \mathrm{u}) | \leqslant L \| \mathrm{y}'' - \mathrm{y}' \| \quad (L = \mathrm{const};\ i = 1, \ldots, m)$$

Определение. Решение $\mathrm{x} = 0$ системы уравнений (1.1) называется экспоненциально y-устойчивым (см. [3, 4]) в среднем, если можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при $\langle \| \mathrm{y}_0 (\omega) \| \rangle < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$ будет

$$\langle [\| \mathrm{y} (t, \omega) \|; \mathrm{y} (t, \omega) / \mathrm{x}_0, \xi_0] \rangle \leqslant B \langle \| \mathrm{y}_0 (\omega) \| \rangle \exp [-\alpha (t - t_0)]$$

где $\alpha > 0$, $B \geqslant 1$ не зависят от t_0, $\langle\ \rangle$ — математическое ожидание.

Рассмотрим усеченную систему уравнений

$$(1.7)\qquad dx_i / dt = X_i ([t, \mathrm{y}, 0, \xi (t, \omega)] \quad (i = 1, \ldots, m)$$

которая получается из m первых уравнений системы (1.2) при $\mathrm{z} = 0$. Обозначим через $\mathrm{y}^* (t, \omega)$ решение уравнений (1.7)

$$(1.8)\qquad y_i^* (t, \omega) = y_{i0}^* (\omega) + \int_{t_0}^{t} X_i [s, \mathrm{y}^* (s, \omega), 0, \xi (s, \omega)]\, ds \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Предположим, что решение $\mathrm{y}^* (t, \omega)$ экспоненциально устойчиво в среднем, т. е. можно указать $\varepsilon > 0$, такое, что любое решение $\mathrm{y}^* (t, \omega)$ уравнений (1.7) ((1.8)) при $\langle \| \mathrm{y}_0^* (\omega) \| \rangle < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$(1.9)\qquad \langle [\| \mathrm{y}^* (t, \omega) \|; \mathrm{y}^* (t, \omega) / \mathrm{y}_0^*, \xi_0] \rangle \leqslant B \langle \| \mathrm{y}_0^* (\omega) \| \rangle \times \exp [- \alpha (t - t_0)]$$

где $\alpha > 0$, $B \geqslant 1$ не зависят от t_0.

Теорема 1.1. Если нулевое решение системы (1.7) экспоненциально устойчиво в среднем и при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$(1.10)\qquad \int_{t}^{t+T} \varphi (s)\, ds \leqslant \gamma$$

где $T > 0$ — некоторое число, то при достаточно малом значении γ нулевое решение системы (1.1) экспоненциально y-устойчиво в среднем.

Доказательство. Пусть $T = \alpha^{-1} \ln (4B)$ и $\delta = \varepsilon / 2B$, где $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant H$) — наперед заданное число, для которого справедливо неравенство (1.9). Тогда для любого решения $\mathrm{y}^* (t, \omega)$ дифференциальных уравнений (1.7), начальные функции $\mathrm{y}^* (t_0) = \mathrm{y}_0^* (\omega)$ которого удовлетворяют неравенству $\langle \| \mathrm{y}_0^* (\omega) \| \rangle < \delta$, будет выполняться неравенство

$$\langle [\| \mathrm{y}^* (t, \omega) \|; \mathrm{y}^* (t, \omega) / \mathrm{y}_0^*, \xi_0] \rangle < \varepsilon / 2$$

при всех значениях $t \geqslant t_0$ и, кроме того,

$$\langle [\| \mathrm{y}^* (t_0 + T, \omega) \|; \mathrm{y}^* (t_0 + T, \omega) / \mathrm{y}_0^*, \xi_0] \rangle < \delta / 4$$

Пусть $\mathrm{x} (t, \omega)$ — решение системы (1.1) y_0 определяемое системой начальных функций $\mathrm{x} (t_0) = \mathrm{x}_0 (\omega)$, $\xi (t_0) = \xi_0 (\omega)$ из области

$$\langle \| \mathrm{y}_0 (\omega) \| \rangle < \delta, \quad \| \mathrm{z}_0 (\omega) \| < \infty, \quad \| \xi_0 (\omega) \| < \infty$$

где δ выбрано выше. Пусть далее $\mathbf{y}_0^*(\omega)=\mathbf{y}_0(\omega)$. Учитывая неравенство

$$|X_i(t,\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u})-X_i(t,\mathbf{y}^*,0,\mathbf{u})|\leqslant\varphi(t)\,\|\mathbf{y}(t)\|+L\,\|\mathbf{y}(t)-\mathbf{y}^*(t)\|$$
$$(i=1,\ldots,m)$$

вытекающее из условий (1.5) и (1.6) (см. [1]), и неравенство

$$\|\mathbf{y}(t)\|\leqslant\|\mathbf{y}(t)-\mathbf{y}^*(t)\|+\|\mathbf{y}^*(t)\|$$

из систем (1.4) и (1.8) имеем

$$\|\mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)\|\leqslant \tag{1.11}$$
$$\leqslant\int_{t_0}^{t}\{[L+\varphi(s)]\,\|\mathbf{y}(s,\omega)-\mathbf{y}^*(s,\omega)\|+\varphi(s)\,\|\mathbf{y}^*(s,\omega)\|\}\,ds$$

Используя свойства математического ожидания [9–11] и условия (1.9), (1.10), получаем

$$\langle[\|\mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle\leqslant B\delta\gamma+$$
$$+\int_{t_0}^{t}[L+\varphi(s)]\,\langle[\|\mathbf{y}(s,\omega)-\mathbf{y}^*(s,\omega)\|;\ \mathbf{y}(s,\omega)-\mathbf{y}^*(s,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle\,ds$$

при $t\in[t_0,t_0+T]$. Применяя лемму Гронуолла — Беллмана (см. [12], стр. 108), получаем

$$\langle[\|\mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle\leqslant$$
$$\leqslant B\delta\gamma\exp(LT+\gamma)$$

при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$. Всегда можно выбрать γ таким, чтобы было

$$\langle[\|\mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle\leqslant\delta/4$$

Так как $\langle\|\mathbf{y}(t,\omega)\|\rangle\leqslant\langle\|\mathbf{y}(t,\omega)-\mathbf{y}^*(t,\omega)\|\rangle+\langle\|\mathbf{y}^*(t,\omega)\|\rangle$, то величина $\mathbf{y}(t,\omega)$ при всех значениях $t\in[t_0,t_0+T]$ будет удовлетворять неравенству

$$\langle[\|\mathbf{y}(t,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle<\varepsilon/2+\varepsilon/8<\varepsilon$$

а при $t=t_0+T$

$$\langle[\|\mathbf{y}(t_0+T,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t_0+T,\omega]/\mathbf{x}_0\xi_0]\rangle<\delta/4+\delta/4=\delta/2$$

Применяя далее известную процедуру (см., например, [5]), получаем неравенство

$$\langle[\|\mathbf{y}(t,\omega)\|;\ \mathbf{y}(t,\omega)/\mathbf{x}_0,\xi_0]\rangle\leqslant B_1\,\delta\exp[-\alpha_1(t-t_0)]$$
$$(B_1=4B,\ \alpha_1=(\alpha\ln 2)/(\ln 4B))$$

т. е. нулевое решение системы (1.1) или (1.2) экспоненциально y-устойчиво в среднем.

Теорема 1.1 справедлива и для случая, когда $\mathbf{z}$ в системе (1.2) есть бесконечномерный вектор, т. е. система (1.1) состоит из счетного числа уравнений. Доказательство не меняется.

Приведем иллюстрирующий пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dy/dt&=-y+\varphi(t)\,y\sin z\xi(t,\omega)\\ dz/dt&=G[t,y,z,\xi(t,\omega)]\end{aligned} \tag{1.12}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная неотрицательная при $t \geqslant 0$ функция, $\xi(t, \omega)$ — непрерывный необрывающийся марковский случайный процесс, функция G обеспечивает существование, единственность и продолжимость при $t \geqslant 0$ решения системы (1.12) — случайного процесса $\mathbf{x}(t, \omega) = (y(t, \omega), z(t, \omega))$, причем $G[t, 0, 0, \xi(t, \omega)] \equiv 0$. Правая часть первого уравнения удовлетворяет условиям (1.5)] и (1.6). Если $\sup_{[0,\infty)} \varphi(t) \leqslant 41 \cdot 10^{-3}$, то система (1.12) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1, и ее нулевое решение экспоненциально y-устойчиво в среднем.

2. Устойчивость по первому приближению. Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$(2.1) \qquad d\mathbf{x} / dt = \mathbf{X}[t, \mathbf{x}, \xi(t, \omega)] + \mathbf{R}[t, \mathbf{x}, \xi(t, \omega)]$$

где $\mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ ($\mathbf{x} \in E_n$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{u} \in E_k$) — измеримая по Борелю относительно $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, абсолютно-интегрируемая на любом конечном интервале времени функция. Функции ξ и $\mathbf{X}$ вместе с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(\omega)$ в системе (1.4) определяют единственный абсолютно-непрерывный с вероятностью единица случайный процесс. Функция $\mathbf{X}$ удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$

$$(2.2) \qquad |X_i(t, \mathbf{x}'', \mathbf{u}) - X_i(t, \mathbf{x}', \mathbf{u})| \leqslant L \|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'\| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Процесс ξ и функция $\mathbf{R}$ в (2.1) таковы, что выполняются условия

$$(2.3) \qquad |R_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})| \leqslant \varphi(t) \|x\| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$\varphi(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ функция.

Справедлива

Теорема 2.1. Если нулевое решение уравнений (1.1) экспоненциально устойчиво в среднем и если при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства (2.3) и (1.10), то при достаточно малом значении γ нулевое решение уравнений (2.1) также будет экспоненциально устойчивым в среднем.

Доказательство проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 1.1 (см. [5]). Такое же доказательство проходит для счетных систем. В иных условиях методом функций Ляпунова теорема 2.1 была доказана в [4, 6].

3. Экспоненциальная неустойчивость по части переменных. Предположим, что правые части системы уравнений (1.1) удовлетворяют условиям п. 1, причем в (1.3) H будем полагать достаточно большим или $H = \infty$. Введем

Определение [1]. Решение $\mathbf{x} = 0$ системы уравнений (1.1) назовем экспоненциально y-неустойчивым в среднем, если

$$\langle [\|\mathbf{y}(t, \omega)\|; \mathbf{y}(t, \omega) / \mathbf{x}_0, \xi_0] \rangle \geqslant B \langle \|y_0(\omega)\| \rangle \exp[\alpha(t - t_0)]$$

где $\alpha > 0$, $B \in (0,1]$ не зависят от t_0, $\mathbf{x}_0(\omega)$.

Предположим, что решение $\mathbf{y}^*(t, \omega)$ системы (1.7) экспоненциально неустойчиво в среднем, т. е. для любых t_0, $\mathbf{y}_0^*(\omega)$ решение $\mathbf{y}^*(t, \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$(3.1) \qquad \langle [\|\mathbf{y}^*(t, \omega)\|; y^*(t, \omega) / \mathbf{y}_0^*, \xi_0] \rangle \geqslant B \langle \|\mathbf{y}_0^*(\omega)\| \rangle \exp[\alpha(t - t_0)]$$

Теорема 3.1. Если нулевое решение системы уравнений (1.7) экспоненциально неустойчиво в среднем и если при всех $t \geqslant 0$ выполняется

(1.10), то при достаточно малом значении γ нулевое решение системы уравнений (1.1) экспоненциально у-неустойчиво в среднем.

Доказательство. Пусть $T = \alpha^{-1} \ln^5/_2/B$, $\delta = \varepsilon/B$, где ε — произвольное (в том числе и сколь угодно малое) положительное число, B и α — числа из (3.1). Из уравнений (1.8) с помощью условий (1.6) получаем оценку

$$\| \mathbf{y}^* (t, \omega) \| \leqslant \| \mathbf{y}_0^* (\omega) \| \exp LT, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \tag{3.2}$$

Из первых m уравнений системы (1.4) и из уравнений (1.8) получаем неравенство (1.11). Учитывая условие (1.10) и неравенство (3.2), получим

$$\langle \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \| \rangle \leqslant \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \gamma \exp LT + \\ + \int_{t_0}^{t} [L + \varphi(s)] \langle \| \mathbf{y}(s) - \mathbf{y}^*(s) \| \rangle ds$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$.

Применив лемму Гронуолла — Беллмана, получим

$$\langle \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \| \rangle \leqslant \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \gamma \exp (2LT + \gamma) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$$

Выберем γ из условия

$$\gamma \exp (2LT + \gamma) \leqslant {}^1/_2 B$$

где B — число из (3.1). Имеем

$$\langle \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \| \rangle \leqslant {}^1/_2 B \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \quad (t \in [t_0, t_0 + T]) \tag{3.3}$$

Пусть $\langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \geqslant 2\delta$. Имеем $\langle \| \mathbf{y}^*(t) \| \rangle \geqslant B \langle \| y_0^* \| \rangle$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ и $\langle \| \mathbf{y}^*(t_0 + T) \| \rangle \geqslant {}^5/_2 \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle$. Так как $\| \mathbf{y}(t) \| \geqslant \| \mathbf{y}^*(t) \| - \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \|$, $\langle \| \mathbf{y}(t) \| \rangle \geqslant \langle \| \mathbf{y}^*(t) \| \rangle - \langle \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \| \rangle$, то учитывая (3.3), получим

$$\langle \| \mathbf{y}(t) \| \rangle \geqslant B \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle - {}^1/_2 B \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \geqslant B\delta = \varepsilon$$
$$\langle \| \mathbf{y}(t) \| \rangle \geqslant \varepsilon \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$$
$$\langle \| \mathbf{y}(t_0 + T) \| \rangle \geqslant {}^5/_2 \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle - {}^1/_2 B \langle \| y_0^* \| \rangle \geqslant \\ \geqslant 2 \langle \| \mathbf{y}_0^* \| \rangle \geqslant 4\delta, \quad \langle \| \mathbf{y}(t_0 + T) \| \rangle \geqslant 4\delta$$

Применим метод полной математической индукции. Пусть

$$\langle \| \mathbf{y}(t) \| \rangle \geqslant 2^{n-1}\varepsilon \quad \text{при } t_0 + (n-1) T \leqslant t \leqslant t_0 + nT \\ \langle \| \mathbf{y}(t_0 + nT) \| \rangle \geqslant 2^{n+1}\delta \tag{3.4}$$

Покажем, что

$$\langle \| \mathbf{y}(t) \| \rangle \geqslant 2^n\varepsilon \quad \text{при } t_0 + nT \leqslant t \leqslant t_0 + (n+1) T \tag{3.5}$$

$$\langle \| \mathbf{y}(t_0 + (n+1) T) \| \rangle \geqslant 2^{n+2}\delta \tag{3.6}$$

Примем момент времени $t_0 + nT = t_0'$ за начальный и рассмотрим решение $\mathbf{y}^*(t)$ с начальным условием $\mathbf{y}^*(t_0') = \mathbf{y}(t_0')$. Из (3.4)

$$\langle \| \mathbf{y}^*(t_0') \| \rangle = \langle \| \mathbf{y}(t_0') \| \rangle \geqslant 2^{n+1}\delta$$

Из (3.1)

$$\langle \| \mathbf{y}^*(t) \| \rangle \geqslant B \langle \| \mathbf{y}^*(t_0') \| \rangle \quad \text{при } t_0' \leqslant t \leqslant t_0' + T$$
$$\langle \| \mathbf{y}^*(t_0' + T) \| \rangle \geqslant {}^5/_2 \langle \| \mathbf{y}^*(t_0') \| \rangle$$

Учитывая (3.3), имеем

$$\langle\| \mathbf{y}(t) \|\rangle \geqslant B \langle\| \mathbf{y}^*(t_0') \|\rangle - {}^1\!/_2 B \langle\| \mathbf{y}^*(t_0') \|\rangle = $$
$$= {}^1\!/_2 B \langle\| \mathbf{y}^*(t_0') \|\rangle \geqslant 2^n \varepsilon \quad \text{при } t_0' \leqslant t \leqslant t_0' + T$$
$$\langle\| \mathbf{y}(t_0' + T) \|\rangle \geqslant {}^5\!/_2 \langle\| \mathbf{y}^*(t'_0) \|\rangle - {}^1\!/_2 B \langle\| \mathbf{y}^*(t_0') \|\rangle \geqslant$$
$$\geqslant 2 \langle\| \mathbf{y}^*(t_0') \|\rangle \geqslant 2^{n+2} \delta$$

Неравенства (3.5) и (3.6) доказаны. Полагая $nT \leqslant t - t_0 = nT + \theta < (n+1)T$, из неравенства (3.5) выводим

$$\langle [\| \mathbf{y}(t, \omega) \|; \ \mathbf{y}(t, \omega) / \mathbf{x}_0, \xi_0] \rangle \geqslant B_1 2\delta \exp \alpha_1 (t - t_0)$$
$$B_1 = \frac{1}{4} B, \quad \alpha_1 = (\alpha \ln 2) \Big/ \left(\ln \frac{{}^5\!/_2}{B}\right)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1 справедливо и для счетных систем, т. е. для случая бесконечномерного z.

Пример. Пусть в системе

$$dy / dt = y + \varphi(t)\, y \sin z \xi(t, \omega) \tag{3.7}$$
$$dz / dt = G[t, y, z, \xi(t, \omega)]$$

φ, ξ и G удовлетворяют условиям, оговоренным в примере п. 1. Если $\sup_{(0,\infty)} \varphi(t) \leqslant 8 \cdot 10^{-2}$, то система (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1 и, следовательно, нулевое решение системы экспоненциально y-неустойчиво в среднем.

4. Неустойчивость по первому приближению. Рассмотрим вновь системы (1.1) и (2.1), для которых выполняются условия (2.2), (2.3) и (1.10). Тогда справедлива

Теорема 4.1. Если нулевое решение уравнений (1.1) экспоненциально неустойчиво в среднем, то при достаточно малом значении γ нулевое решение уравнений (2.1) также будет экспоненциально неустойчивым в среднем.

Доказательство проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 3.1 (см. также [7]). Теорема 4.1 остается справедливой и для счетных систем вида (1.1) и (2.1).

Поступила 10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдаев Г. С.* К вопросу об устойчивости относительно части переменных. Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, № 6.
2. *Юдаев Г. С.* Об условной устойчивости счетных систем дифференциальных уравнений. Изв. вузов. Сер. матем., 1975, № 5.
3. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2
4. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
5. *Шиманов С. Н., Юдаев Г. С.* Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений с последействием. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 9.
6. *Кац И. Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайными параметрами. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1962, т. 3.
7. *Юдаев Г. С.* Некоторые вопросы неустойчивости систем с последействием. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 4.
8. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
9. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1969.
10. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
11. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. М., «Наука», 1971.
12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.