Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕЗОНАНСОВ

А. Л. Куницын, С. В. Медведев

(Москва)

Исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, когда характеристическое уравнение соответствующей линеаризованной системы имеет лишь чисто мнимые различные корни, удовлетворяющие некоторым линейным целочисленным соотношениям, или иначе, условию внутреннего резонанса. Рассматривается случай одновременного наличия нескольких резонансных соотношений, частично затронутый ранее в [1, 2]. На основе результатов, полученных в [3], выписывается нормальная форма системы, содержащая первые нелинейные члены, для произвольного количества как не взаимодействующих, так и взаимодействующих резонансов произвольного нечетного порядка. Выделяются случаи взаимодействия резонансов, в которых необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы сводятся к условиям, сформулированным в [3] для одного резонанса. В наиболее общем случае взаимодействия резонансов даются необходимые условия устойчивости.

В качестве примера сложной механической системы, в которой может возникать взаимодействие резонансов, рассматривается поступательно-вращательное движение геостационарного спутника-корабля, который в течение достаточно продолжительного времени может зависать над произвольной точкой земной поверхности. В области выполнения необходимых условий устойчивости с помощью ЭВМ просчитаны все резонансные режимы, включающие некоторые из рассмотренных случаев взаимодействия резонансов.

Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&(0.1) \qquad x_*^{\cdot} = Ax_* + X_*(x_*), \quad x_*^{\cdot} = dx_* / dt \\
&x_* = (x_1^*, \ldots, x_{2q}^*), \quad X_* = (X_1^*, \ldots, X_{2q}^*), \quad X_*(0) = 0
\end{aligned}
$$

Здесь x_* и X_* — $2q$-мерные векторы евклидова пространства E_{2q}, A — квадратная постоянная матрица, имеющая лишь чисто мнимые собственные значения $\pm\lambda_s$ ($\lambda_s^2 < 0$ ($s = 1, 2, \ldots, q$), среди которых нет кратных; $X_*(x_*)$ — голоморфные функции, разложения которых по степеням x_* начинаются формами m-го порядка.

Пусть в системе (0.1) имеет место внутренний резонанс k-го порядка, т. е. выполняются соотношения вида

$$
\begin{aligned}
&\langle \Lambda, P\rangle = 0, \quad P = (p_1, \ldots, p_q), \quad p_s \geqslant 0 \\
&\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q), \quad |P| = p_1 + \ldots + p_q = k, \quad k = m + 1
\end{aligned}
$$

Здесь Λ — вектор собственных значений матрицы A, p_s — взаимно-простые целые числа.

В работах [3–5] исследовались системы, обладающие только одним резонансным соотношением указанного вида. Рассмотрим более сложные системы, в которых могут одновременно существовать несколько резонансных соотношений. Некоторые частные случаи этой задачи были изучены в [1, 2].

Цель данной работы — обобщение полученных в [1, 2] результатов на любой тип и число резонансов при нечетном k.

Рассмотрим следующий вид исходной системы (0.1), получаемый посредством комплексного линейного преобразования [6]:

$$
\begin{aligned}
(0.2)\qquad & x^{\cdot} = \lambda x + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y) \\
& y^{\cdot} = -\lambda y + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y) \\
& x = (x_1, \ldots, x_q) \quad y = (y_1, \ldots, y_q) \quad \lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}
\end{aligned}
$$

Здесь x, y — комплексно-сопряженные векторы, λ — диагональная матрица, $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, компоненты которых $X_s^{(l)}$, $Y_s^{(l)}$ $(s = 1, 2, \ldots, q)$ — формы l-го порядка от x и y.

1. Случай независимых резонансов. Пусть в системе (0.2) имеет место μ резонансных соотношений вида

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \langle \Lambda_\nu, P_\nu \rangle = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu \\
& \Lambda_\nu = (\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}), \quad |P_1| = \ldots = |P_\mu| = k \\
& n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu = n \leqslant q
\end{aligned}
$$

Здесь Λ_ν — ν-я векторная компонента вектора $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\mu)$, а P_ν — целочисленный вектор с положительными компонентами $p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu n_\nu}$.

Применяя к системе (0.2) нормализующее нелинейное преобразование, описанное в [3], получим

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & r_{\nu s}^{\cdot} = 2Q_{\nu s}(\theta_\nu) R_\nu + \ldots \\
& \theta_\nu^{\cdot} = R_\nu \sum_{j=1}^{n_\nu} \frac{p_{\nu s}}{r_{\nu s}} Q'_{\nu s}(\theta_\nu) + \ldots \\
& s = 1, 2, \ldots, n_\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu \\
& r_\alpha^{\cdot} = O(r^{1/2(k+1)}), \quad \theta_\alpha^{\cdot} = O(r^{1/2(k+1)}), \quad \alpha = n+1, \ldots q \\
& \theta_\nu = p_{\nu 1}\theta_{\nu 1} + \ldots + p_{\nu n_\nu}\theta_{\nu n_\nu}, \quad R_\nu = \sqrt{\prod_{j=1}^{n_\nu} r_{\nu j}^{p_{\nu j}}} \\
& Q_{\nu s} = a_{\nu s}\cos\theta_\nu + b_{\nu s}\sin\theta_\nu, \quad Q'_{\nu s}(\theta_\nu) = \frac{dQ_{\nu s}}{d\theta_\nu} \\
& r = \sum_{\nu=1}^{\mu} (r_{\nu 1} + \ldots + r_{\nu n_\nu}) + r_{n+1} + \ldots + r_q
\end{aligned}
$$

Здесь $r_{\nu s}$, $\theta_{\nu s}$ и r_α, θ_α — полярные координаты, а невыписанные члены не ниже $k+1$-го порядка относительно r^2.

Таким образом модельная система (получаемая из (1.2) отбрасыванием невыписанных членов) распадается на одну нерезонансную подсистему (в переменных r_α, θ_α) и на μ независимых резонансных подсистем (в переменных $r_{\nu s}$, θ_ν), детально изученных в [3].

Теорема 1. Для устойчивости тривиального решения модельной системы (1.2) необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво тривиальное решение каждой резонансной подсистемы.

Необходимые и достаточные условия устойчивости какой-либо из резонансных подсистем были даны в [3] в виде неравенств, накладываемых непосредственно на коэффициенты нормальной формы $a_{\nu s}$, $b_{\nu s}$.

2. Случай взаимодействия резонансов. Рассмотрим случай, когда резонансные соотношения (1.1) содержат общие частоты. Начнем с простейшего случая, когда в каждое резонансное соотношение входит только одна общая частота λ_0, и, следовательно, условие внутреннего резонанса можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_0 p_{\nu 0} + \langle \Lambda_\nu, P_\nu \rangle = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu \\ &p_{\nu 0} + |P_\nu| = k, \quad k = m + 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь Λ_ν и P_ν имеют прежний смысл. Как и выше, будем предполагать, что в резонансе участвует лишь часть частот $n = 1 + n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_\mu \leqslant q$ из общего числа q.

Применяя к системе последовательно ряд преобразований, указанных в [3], с учетом (2.1) можно получить следующую нормальную форму системы (0.2) в полярных координатах r_0, θ_0; $r_{\nu s}$, $\theta_{\nu s}$ с точностью до первых нелинейных членов:

$$\begin{aligned} &r_0^{\boldsymbol\cdot} = 2 \sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu Q_{\nu 0}(\theta_\nu) + \ldots, \quad \dot r_{\nu s} = 2 R_\nu Q_{\nu s}(\theta_\nu) + \ldots \\ &\theta_\nu^{\boldsymbol\cdot} = R_\nu \sum_{s=1}^{n_\nu} \frac{p_{\nu s}}{r_{\nu s}} Q_{\nu s}'(\theta_\nu) + \sum_{\beta=1}^{\mu} \frac{p_{\nu 0}}{r_0} R_\beta Q_{\beta 0}'(\theta_\beta) + \ldots \\ &r_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = O(r^{1/2(k+1)}), \quad r_\alpha \theta_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = O(r^{1/2(k+1)}) \\ &s = 1, 2, \ldots, n_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \alpha = n+1, \ldots, q \\ &R_\nu^2 = r_0^{p_{\nu 0}} \prod_{j=1}^{n_\nu} r_{\nu j}^{p_{\nu j}}, \quad Q_{\nu s}(\theta_\nu) = a_{\nu s} \cos\theta_\nu + b_{\nu s} \sin\theta_\nu \\ &\theta_\nu = p_{\nu 0}\theta_0 + p_{\nu 1}\theta_{\nu 1} + \ldots + p_{\nu n_\nu}\theta_{\nu n_\nu} \\ &r = r_0 + \sum_{\nu=1}^{\mu} (r_{\nu 1} + \ldots + r_{\nu n_\nu}) + r_{n+1} + \ldots + r_q \end{aligned} \tag{2.2}$$

Как видно из (2.2), вопрос об устойчивости тривиального решения модельной системы опять сводится к вопросу об устойчивости для первых $n + 1$ уравнений, образующих резонансную подсистему. Однако в отличие от случая независимых резонансов, эта подсистема уже не распадается на μ независимых подсистем. Тем не менее и в данном случае можно получить необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы. Покажем, что эти условия заключаются в существовании знакоопределенного интеграла

$$\Phi \equiv c_0 r_0 + \sum_{\nu=1}^{\mu} (c_{\nu 1} r_{\nu 1} + \ldots + c_{\nu n_\nu} r_{\nu n_\nu}) + \sum_{\alpha=n+1}^{q} r_\alpha = \text{const} \tag{2.3}$$

$$c_0, c_{\nu 1}, \ldots, c_{\nu n_\nu} > 0$$

Приравнивая нулю производную от (2.3) в силу модельной системы (2.2), получим уравнения, которым должны удовлетворять постоянные $c_0, c_{\nu 1}, \ldots, c_{\nu n_\nu}$

$$\begin{aligned} & c_0 a_{\nu 0} + c_{\nu 1} a_{\nu 1} + \ldots + c_{\nu n_\nu} a_{\nu n_\nu} = 0 \\ & c_0 b_{\nu 0} + c_{\nu 1} b_{\nu 1} + \ldots + c_{\nu n_\nu} b_{\nu n_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots \mu \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом достаточным условием существования интеграла (2.3) является существование положительного решения у системы (2.4).

Рассмотрим вначале невырожденный случай, когда для каждой из матриц

$$A_\nu = \begin{Vmatrix} a_{\nu 0} & a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu n_\nu} \\ b_{\nu 0} & b_{\nu 1} & \ldots & b_{\nu n_\nu} \end{Vmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu$$

$\operatorname{Rank} A_\nu = 2$ и $n_\nu \geqslant 2$.

Составляя всевозможные матрицы

$$A_{\nu_{\alpha\beta\gamma}} = \begin{Vmatrix} a_{\nu\alpha} & a_{\nu\beta} & a_{\nu\gamma} \\ b_{\nu\alpha} & b_{\nu\beta} & b_{\nu\gamma} \end{Vmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu$$

Можно показать, что необходимое и достаточное условие существования указанного решения имеет тот же вид, что и в случае одного резонанса [3, 5], а именно

$$\operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_{\nu\alpha} & a_{\nu\beta} \\ b_{\nu\alpha} & b_{\nu\beta} \end{vmatrix} = \operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_{\nu\beta} & a_{\nu\gamma} \\ b_{\nu\beta} & b_{\nu\gamma} \end{vmatrix} = \operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_{\nu\gamma} & a_{\nu\alpha} \\ b_{\nu\gamma} & b_{\nu\alpha} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

Выполнение выписанного условия только для какого-либо одного значения ν означает, что модельная система была бы устойчива, если бы выполнялось только одно резонансное соотношение при указанном значении ν. Такой резонанс (сохраняющий нейтральность модельной системы) будем называть слабым. Если же указанный резонанс (в отсутствие других) приводит к неустойчивости модельной системы, то будем называть его сильным.

Если $\operatorname{Rank} A_\nu = 1$, то условия (2.5) теряют смысл. Но тогда, как видно из (2.4), необходимым и достаточным условием существования положительного решения служит наличие у матрицы A_ν пары элементов $a_{\nu\alpha}$, $a_{\nu\beta}$ (или $b_{\nu\alpha}$, $b_{\nu\beta}$); α, $\beta = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu$ с противоположными знаками. Такая ситуация возникает, в частности, для гамильтоновых систем, а также для систем, содержащих двухчастотные резонансы, которым в системе (2.4) будут соответствовать пары уравнений, содержащие по две неизвестных c_0, $c_{\nu 1}$.

Покажем, что если хотя бы при одном значении $\nu = \varkappa$ система (2.4) не имеет положительного решения, то тривиальное решение модельной системы (2.2) неустойчиво.

При этом исключим из рассмотрения такой частный случай взаимодействия, когда среди резонансов (2.1) есть слабый, для которого выполняется условие

$$n_\nu = |P_\nu| = 1 \tag{2.6}$$

(очевидно, при отсутствии кратных корней λ_s исходной системы возможен только один такой резонанс). Этот случай требует специального исследования.

Полагая в (2.2) $r_{\nu s} = 0$; $s = 1, 2, \ldots, n_\nu$; $\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, \mu$, получим для резонансной подсистемы

$$\begin{aligned} r_0^{\cdot} &= 2R_\varkappa Q_{\varkappa 0}(\theta_\varkappa) \\ r_{\varkappa s}^{\cdot} &= 2R_\varkappa Q_{\varkappa s}(\theta_\varkappa), \quad s = 1, 2, \ldots, n_\varkappa \\ \theta_\varkappa^{\cdot} &= R_\varkappa\left[\frac{p_{\varkappa 0}}{r_0} Q_{\varkappa 0}'(\theta_\varkappa) + \sum_{j=1}^{n_\varkappa} \frac{p_{\varkappa j}}{r_{\varkappa j}} Q_{\varkappa j}'(\theta_\varkappa)\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из невыполнения условий (2.5) при $\nu = \varkappa$ следует неустойчивость тривиального решения системы (2.7) [3, 5], что можно показать как с помощью функции Четаева, так и непосредственным построением неустойчивого частного решения. То же самое можно сделать, если Rank $A_\varkappa = 1$, и среди элементов матрицы $A_\varkappa$ не найдется ни одной пары $a_{\varkappa\alpha}$, $a_{\varkappa\beta}$ (или $b_{\varkappa\alpha}$, $b_{\varkappa\beta}$); $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, n_\varkappa$ с противоположными знаками.

На основании доказанного можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Для устойчивости тривиального решения модельной системы, соответствующей (0.2) при резонансе (2.1), необходимо и достаточно, чтобы каждый из резонансов был слабым.

Рассмотрим теперь самый общий случай, когда в каждое резонансное соотношение входят две и более общих частоты, т. е. будем предполагать, что первые n ($n \leqslant q$) собственных значений удовлетворяют резонансным соотношениям вида

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_0, G_\nu\rangle + \langle \Lambda_\nu, P_\nu\rangle = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu \\ &\Lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_0}), \quad \Lambda_\nu = (\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}) \\ &G_\nu = (g_{\nu 1}, g_{\nu 2}, \ldots, g_{\nu n_0}), \quad P_\nu = (p_{\nu 1}, p_{\nu 2}, \ldots, p_{\nu n_\nu}) \\ &n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu = n, \quad |G_\nu| + |P_\nu| = k, \quad k = m + 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь Λ_0 — общая для всех резонансных соотношений векторная компонента собственных значений, Λ_ν — векторная компонента собственных значений, входящая только в ν-е резонансное соотношение; G_ν и P_ν — векторы размерности n_0 и n_ν соответственно с целочисленными и положительными компонентами.

С помощью преобразований, описанных в [3], при k нечетном получим следующую нормальную форму системы (0.2) в полярных координатах с точностью до первых нелинейных членов (выписана лишь резонансная подсистема):

$$r_s^{\cdot} = 2\sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu Q_\nu^*(\theta_\nu) + \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, n_0 \tag{2.9}$$

$$r_{\nu\sigma}^{\cdot} = 2R_\nu Q_{\nu\sigma}(\theta_\nu) + \ldots, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n_\nu$$

$$\theta_\nu^{\cdot} = R_\nu \sum_{\sigma=1}^{n_\nu} \frac{p_{\nu\sigma}}{r_{\nu\sigma}} Q'_{\nu\sigma}(\theta_\nu) + \sum_{\beta=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{n_0} \frac{g_{\beta s}}{r_s} R_\beta Q^{*'}_{\beta s}(\theta_\beta) + \ldots$$

$$\theta_\nu = \theta_1 g_{\nu 1} + \ldots + \theta_{n_0} g_{\nu n_0} + \theta_{\nu 1} p_{\nu 1} + \ldots + \theta_{\nu n_\nu} p_{\nu n_\nu}$$

$$R_\nu^2 = \prod_{j=1}^{n_0} r_j^{g_{\nu j}} \prod_{i=1}^{n_\nu} r_{\nu i}^{p_{\nu i}}, \quad Q^*_{\nu s}(\theta_\nu) = a^*_{\nu s}\cos\theta_\nu + b^*_{\nu s}\sin\theta_\nu$$

$$Q_{\nu\sigma}(\theta_\nu) = a_{\nu\sigma}\cos\theta_\nu + b_{\nu\sigma}\sin\theta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu$$

Предположим, что один из резонансов (2.8) при $\nu = \varkappa$ является сильным, т. е. приводит к неустойчивости модельной системы в отсутствие других резонансов. Это означает, что система уравнений

$$r_s^{\cdot} = 2R_\varkappa Q^*_{\varkappa s}(\theta_\varkappa), \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n_0 \tag{2.10}$$

$$r_{\varkappa\sigma}^{\cdot} = 2R_\varkappa Q_{\varkappa\sigma}(\theta_\varkappa), \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n_\varkappa$$

$$\theta_\varkappa^{\cdot} = R_\varkappa \left(\sum_{\sigma=1}^{n_\varkappa} \frac{p_{\varkappa\sigma}}{r_{\varkappa\sigma}} Q'_{\varkappa\sigma} + \sum_{s=1}^{n_0} \frac{g_{\varkappa s}}{r_s} Q^{*'}_{\varkappa s} \right)$$

имеет неустойчивое частное решение типа растущего луча [3]. Но тогда аналогичное решение имеет и модельная система (2.9), поскольку (2.10) получается из нее, если положить $r_{\nu\sigma} = 0$ для всех $\nu \neq \varkappa$.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. Условие слабости каждого из μ резонансов (2.8) является необходимым условием устойчивости тривиального решения модельной системы (2.9).

Замечание. Чтобы указанному неустойчивому частному решению системы (2.9) всегда соответствовало неустойчивое решение исходной модельной системы, необходимо, подобно (2.6), исключить из рассмотрения случай $|P_\nu| \ll 1$, $\nu \neq \varkappa$, требующий иных методов исследования.[1]

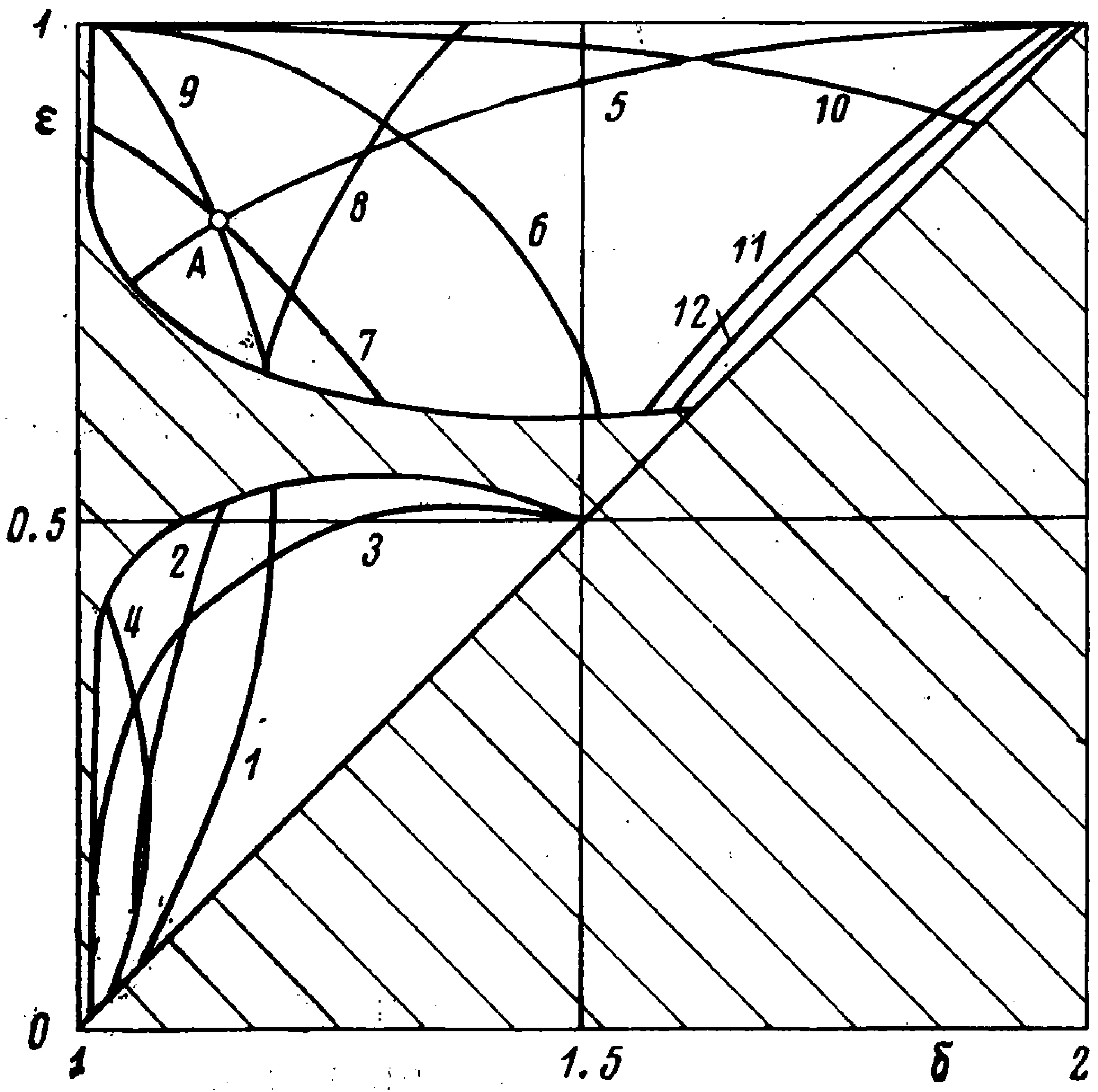
Сформулированное необходимое условие устойчивости модельной системы при взаимодействии резонансов типа (2.8), вообще говоря, не является достаточным. Так, можно показать, что взаимодействие нескольких слабых резонансов, связанных более чем одной общей частотой, может привести к неустойчивости. Один из подобных примеров был построен в [2].

3. Пример. В качестве примера сложной системы, в которой могут возникать некоторые из исследованных типов взаимодействия резонансов, рассмотрим поступательно-вращательное движение геостационарного спутника-корабля, который может в течение достаточно длительного времени неподвижно зависать над произвольной точкой земной поверхности. Для этого, например, достаточно сообщить ему постоянное по модулю реактивное ускорение, составляющее неизменный угол ψ с осью вращения Зем-

[1] Авторы благодарят рецензента, обратившего их внимание на данное обстоятельство.

ли [7]. Было показано [8], что при определенных предположениях уравнения поступательно-вращательного движения такого спутника допускают трехпараметрическое семейство решений, которые соответствует относительному равновесию корабля в орбитальной системе координат и равномерному движению его центра масс по круговой орбите.

При исследовании устойчивости указанных частных решений получим систему уравнений возмущенного движения 12-го порядка, коэффициенты которых сложным образом зависят от параметров орбиты и геометрии масс корабля. В связи с этим полное исследование устойчивости возможно лишь с помощью ЭВМ. Выпишем уравнения в вариациях.



$$x_s = \sum_{i=1}^{12} a_{si} x_i, \qquad s = 1, 2, \ldots, 12$$

Здесь $x_1, \ldots, x_6$ — возмущения радиуса ρ ($\rho = 1$ для стационарного экваториального спутника), широты φ и долготы центра масс корабля и их производных соответственно; x_7, x_8, x_9 — возмущения проекций абсолютной угловой скорости корабля на главные оси инерции; x_{10}, x_{11}, x_{12} — возмущения независимых направляющих косинусов углов между связанной и орбитальной системами координат. Ненулевые элементы матрицы $\| a_{si} \|$ имеют вид:

$$a_{14} = a_{25} = 1,\ a_{34} = -2,\ a_{35} = 2\operatorname{tg}\varphi,\ a_{39} = -\sin\varphi,$$
$$a_{3,10} = (1 - \rho\cos^2\varphi) / (2\rho\cos\varphi),\quad a_{41} = 2/\rho + \cos^2\varphi,\quad a_{42} = -\sin 2\varphi,$$
$$a_{43} = 2\cos^2\varphi,\ a_{4,11} = \sin 2\varphi / (2\cos\alpha),\ a_{51} = -\sin 2\varphi / 2,$$
$$a_{52} = -\cos 2\varphi,\quad a_{53} = -\sin 2\varphi,\quad a_{5,11} = (\rho\cos^2\varphi - 1) / (2\rho\cos\alpha),$$
$$a_{61} = 9(\varepsilon - \delta)\sin 2\alpha / (2\rho),\quad a_{67} = (\delta - \varepsilon)\sin(\alpha + \varphi),\quad a_{68} = (\delta - \varepsilon)\cdot$$
$$\cdot\cos(\alpha + \varphi),\ a_{6,11} = 3(\varepsilon - \delta)\cos 2\alpha / (\rho\cos\alpha),\ a_{76} = (\varepsilon - 1)\sin(\alpha + \varphi)/\delta,$$
$$a_{7,10} = 3(1 - \varepsilon)\cos\alpha / (\rho\delta),\ a_{86} = (1 - \delta)\cos(\alpha + \varphi) / \varepsilon,\ a_{8,10} =$$
$$= 3(1 - \delta)\sin\alpha / (\varepsilon\rho),\ a_{92} = -\cos\varphi,\ a_{93} = -\sin\varphi,\ a_{97} = -\sin\alpha,\ a_{98} =$$
$$= \cos\alpha,\ a_{9,11} = \cos\varphi / \cos\alpha,\ a_{10,2} = -\sin\varphi,\ a_{10,3} = \cos\varphi,\ a_{10,7} =$$
$$= -\cos\alpha,\ a_{10,8} = -\sin\alpha,\ a_{10,11} = \sin\varphi / \cos\alpha,\ a_{11,5} = \cos\alpha,\ a_{11,6} =$$
$$= \cos\alpha,\ a_{11,9} = -\cos\varphi\cdot\cos\alpha,\ a_{11,10} = -\sin\varphi\cdot\cos\alpha$$
$$\varepsilon = C / A,\ \delta = B / A$$

Здесь α — угол поворота в меридианной плоскости главных осей инерции относительно орбитальной системы; A, B, C — квадраты радиусов инерции корабля относительно главных осей, которые считаются постоянными.

Структура матрицы $\| a_{si} \|$ такова, что уравнение $\Delta(\lambda) \equiv \| a_{si} - \lambda\delta_{si} \| = 0$ имеет пару нулевых корней, после отщепления которых характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ будет содержать λ только в четных степенях, и, следовательно, устойчивость возможна только в критическом случае. (Можно показать [1], что при аппроксимации потенциала Земли потенциалом трехосного эллипсоида упомянутая пара нулевых корней переходит в пару чисто мнимых корней малого модуля.)

[1] *Мырзабеков Т.*, Устойчивость стационарного орбитального корабля, Канд. диссертация, Чимкент, 1975.

На фигуре представлены результаты расчетов области выполнения необходимых условий устойчивости в плоскости параметров ε, δ при $\rho = 1$ и $\varphi = 2°$, полученных на ЭВМ М-220 (угол ψ выбран из условия минимума величины реактивного ускорения). В незаштрихованной области характеристическое уравнение имеет пару нулевых и пять пар чисто мнимых корней $\pm i\omega_s$ ($\omega_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots, 5$). В заштрихованной области имеются корни с положительными вещественными частями, и, следовательно, движение строго неустойчиво по Ляпунову.

При $\varphi = 0$ частоты ω_1, ω_2, ω_3 определяют только вращательное, а ω_4, ω_5 — только поступательное движение. Проведенные расчеты также показали, что в указанной области устойчивости линеаризованных уравнений выполняются следующие двенадцать резонансных соотношений третьего порядка (при $\varphi = 2°$ с большой степенью точности $\omega_4 = \omega_5$):

1) $\omega_3 - 2\omega_2 = 0$, 2) $\omega_{4,5} - 2\omega_2 = 0$, 3) $\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$, 4) $\omega_3 - \omega_2 - \omega_{4,5} = 0$, 5) $\omega_{4,5} - \omega_2 - \omega_3 = 0$, 6) $\omega_1 - \omega_2 - \omega_{4,5} = 0$, 7) $\omega_1 - 2\omega_3 = 0$, 8) $\omega_{4,5} - 2\omega_2 = 0$, 9) $\omega_3 - 2\omega_2 = 0$, 10) $\omega_2 - 2\omega_3 = 0$, 11) $\omega_1 - \omega_3 - \omega_5 = 0$, 12) $\omega_1 - \omega_3 - \omega_4 = 0$.

На фигуре нанесены соответствующие этим соотношениям резонансные кривые (занумерованные в том же порядке), на которых возможна неустойчивость системы. В точках пересечения этих кривых происходит взаимодействие двух и более (точка А) резонансов. Вопрос об устойчивости в этих точках определяется доказанными выше теоремами.

Поступила 22 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А. Д.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
2. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
3. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
4. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Гольцер Я. М., Нурпеисов С.* К исследованию одного критического случая при наличии внутреннего резонанса. Изв. АН КазССР, 1972, Сер. физ., матем. № 1.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Nită M. M.* Orbital stability of a geostationary vehicle at arbitrary latitude. Revue Roumaine des sciences technique. Ser. méc. appl. 1969, t° 14, № 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1970, т. 5, вып. 123).
8. *Куницын А. Л., Шибанов А. С.* О поступательно-вращательном движении стационарного орбитального корабля. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, № 3. Изд-во Пермск. ун-та, 1973.