Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

А. С. Озиранер

(Москва)

Единообразным методом получены теоремы об устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости неустановившихся движений по линейному приближению, которые обобщают ряд известных результатов [1-6]. Установленные теоремы применяются к одному классу нелинейных систем, рассмотренному в [7].

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0 \tag{1.1}$$

Здесь $P(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ матрица, а функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant H > 0 \tag{1.2}$$

непрерывна и удовлетворяет условиям единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1). Уравнения линейного приближения для системы (1.1)

$$\mathbf{x}^{\cdot} = P(t)\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Обозначим через $U(t)$ фундаментальную матрицу решений системы (1.3), а через $K(t, t_0) = U(t)U^{-1}(t_0)$ — матрицу Коши.

Лемма 1. Предположим, что в области (1.2)

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leqslant A(t)\|\mathbf{x}\|^m, \quad m > 1 \tag{1.4}$$

а матрица Коши системы (1.3) удовлетворяет условию

$$\|K(t, t_0)\| \leqslant \varphi(t)\psi(t_0) \quad \text{при } t \geqslant t_0,\ t_0 \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Здесь $A(\tau)$, $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ — непрерывные положительные при $\tau \geqslant 0$ функции.

Тогда решения системы (1.1) удовлетворяют неравенству

$$\|\mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant \varphi(t)\psi(t_0)\|\mathbf{x}_0\|[1 - (m-1)\psi^{m-1}(t_0)\|\mathbf{x}_0\|^{m-1}D(t_0, t)]^{-1/(m-1)} \tag{1.6}$$

при всех $t \geqslant t_0$, для которых

$$(m-1)\psi^{m-1}(t_0)\|\mathbf{x}_0\|^{m-1}D(t_0, t) < 1 \tag{1.7}$$

$$D(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\,d\tau$$

Доказательство. Согласно формуле Коши [8]

$$\mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0) = K(t, t_0)\mathrm{x}_0 + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\mathrm{X}(\tau, \mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_0))\,d\tau$$

откуда на основании (1.4) и (1.5) получаем

$$\|\mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\| \leqslant \varphi(t)\psi(t_0)\|\mathrm{x}_0\| + \varphi(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)A(\tau)\|\mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_0)\|^m d\tau \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует, что

$$\frac{\|\mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)\|}{\varphi(t)} \leqslant \psi(t_0)\|\mathrm{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\left[\frac{\|\mathrm{x}(\tau; t_0, \mathrm{x}_0)\|}{\varphi(\tau)}\right]^m d\tau$$

Применяя к последнему неравенству лемму Бихари [9] (см. [8], стр. 112, следствие 2), заключаем, что при всех $t \geqslant t_0$, для которых выполняется условие (1.7), справедлива оценка (1.6), что и требовалось доказать.

2. Будем предполагать, что выполнены условия (1.4) и (1.5). Тогда непосредственно из леммы 1 (см. неравенства (1.6) и (1.7)) вытекают следующие утверждения.

Теорема 1 (*об устойчивости по линейному приближению*). Предположим, что: 1) для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $N(t_0) > 0$, такое, что $\varphi(t)\psi(t_0) \leqslant N$ при всех $t \geqslant t_0$ [1] (т. е. функция $\varphi(t)$ ограничена при всех $t \geqslant 0$); 2) выполняется условие

$$D(0, \infty) = \int_0^\infty A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\,d\tau < \infty \tag{2.1}$$

Тогда невозмущенное движение системы (1.1) устойчиво.

Теорема 2 (*о равномерной устойчивости по линейному приближению*). Предположим, что: 1) существует $N_0 > 0$, такое, что $\varphi(t)\psi(t_0) \leqslant N_0$ при всех $t \geqslant t_0$ и всех $t_0 \geqslant 0$ [2]; 2) существует $N_1 > 0$, такое, что

$$\psi^{m-1}(t_0)\int_{t_0}^{\infty} A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\,d\tau \leqslant N_1 \quad \text{при всех } t_0 \geqslant 0 \tag{2.2}$$

(заметим, что из (2.2) вытекает (2.1)).

Тогда невозмущенное движение системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0.

Теорема 3 (*об асимптотической устойчивости по линейному приближению*). Предположим, что: 1) выполняется условие (2.1); 2) $\lim \varphi(t) = 0$ при $t \to \infty$ [3].

Тогда невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 4. Предположим, что выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $\lim \varphi(t) = 0$ при $t \to \infty$. Тогда невозмущенное движение системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0 и асимптотически устойчиво равномерно по x_0.

[1] При этом нулевое решение системы (1.3) устойчиво [8].
[2] При этом нулевое решение системы (1.3) устойчиво равномерно по t_0 [8].
[3] При этом нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство теорем 1—4. 1) Для всяких $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqslant 0$ положим

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \min\{[2(m-1)\psi^{m-1}(t_0) D(t_0, \infty)]^{-1/(m-1)}, \varepsilon N^{-1} 2^{-1/(m-1)}\} > 0$$

Если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, то из (1.6) и (1.7) следует, что $\|\mathbf{x}(t;, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

2) В этом случае для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta(\varepsilon) > 0$ не зависящим от t_0.

3) Из оценки (1.6) и условия 2) теоремы 3 вытекает, что $\|\mathbf{x}(t;, t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$, если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$.

4) Теорема 4 следует из теорем 2 и 3.

Замечание. В случае, когда $A(t) = A = \text{const}$, теоремы 1 и 3 были получены другим методом (и в несколько иных обозначениях) в [6].

Рассмотрим частные случаи установленных теорем при некоторых видах функций $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $A(\tau)$.

1°. $\varphi(\tau) = c_1 e^{-\alpha\tau}$, $\psi(\tau) = c_2 e^{(\alpha+\beta)\tau}$, $A(\tau) = c_3 e^{\gamma\tau}$, где c_1, c_2, c_3, α, β — положительные постоянные, а γ — постоянная произвольного знака, так что [1]

$$\|K(t, t_0)\| \leqslant B e^{-\alpha(t-t_0)} e^{\beta t_0}, \quad B = \text{const} \tag{2.3}$$

Если выполняется неравенство (ср. с [1])

$$(m-1)\alpha > \beta + \gamma \tag{2.4}$$

то интеграл (2.1) сходится, и по теореме 3 невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Пусть, в частности, $A(\tau) = A = \text{const}$ и, следовательно, $\gamma = 0$; тогда для асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (1.1) достаточно выполнения неравенства [1,2] $(m-1)\alpha > \beta$.

2°. $\varphi(\tau) = c_1 \tau^{-\alpha}$, $\psi(\tau) = c_2 \tau^{\beta}$, $A(\tau) = c_3 \tau^{\gamma}$, $\tau \geqslant 1$, где c_1, c_2, c_3, α, β — положительные постоянные, а γ — постоянная произвольного знака, так что

$$\|K(t, t_0)\| \leqslant B t^{-\alpha} t_0^{\beta}, \quad B = \text{const}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 1 \tag{2.5}$$

Если выполняется условие

$$m\alpha - \gamma - \beta > 1 \tag{2.6}$$

то

$$\int_1^{\infty} A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\,d\tau < \infty \tag{2.7}$$

и по теореме 3 невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво. В частности, при $A(\tau) = A = \text{const}$ $(\gamma = 0)$ условие асимптотической устойчивости (2.6) переходит в неравенство

$$m\alpha - \beta > 1 \tag{2.8}$$

Как показал Б. П. Демидович [3], оценке вида (2.5) удовлетворяет матрица Коши вполне правильной системы в случае неположительности характеристических показателей. При этом неравенство (2.8) совпадает с условием асимптотической устойчивости, полученным в [3].

Замечание. Если в 1° (соответственно в 2°) $(m-1)\alpha > \beta$ (соответственно $m\alpha - \beta > 1$), то постоянная γ может быть положительной; если же $(m-1)\alpha \leqslant \beta$ (соответственно $m\alpha - \beta \leqslant 1$), то необходимо $\gamma < 0$;

в первом случае неравенство (2.4) (соответственно (2.6)) определяет возможную скорость роста, а во втором — «необходимую» скорость убывания функции $A(\tau)$.

3. Рассмотрим систему [4]

$$x_s^{\cdot} = p(t)\, x_s + X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad s = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

где $p(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ функция, а X_s удовлетворяют условию (1.4). Для системы (3.1), очевидно, имеем

$$\varphi(t) = \exp\left[\int_0^t p(\tau)\, d\tau\right], \quad \psi(t_0) = \exp\left[-\int_0^{t_0} p(\tau)\, d\tau\right]$$

На основании теорем 1 и 3 заключаем, что:

1) если выполняются условия (3.2) и (3.3)

$$\int_0^t p(\tau)\, d\tau \leqslant N = \text{const} \quad \text{при всех } t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty A(t) \exp\left[(m-1)\int_0^t p(\tau)\, d\tau\right] dt < \infty \tag{3.3}$$

то невозмущенное движение системы (3.1) устойчиво;

2) если выполняется условие (3.3) и, кроме того

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t p(\tau)\, d\tau = -\infty \tag{3.4}$$

то невозмущенное движение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Первое из этих утверждений было получено К. П. Персидским [4] в случае, когда $m = 2$, $A(t) = A = \text{const}$, а соотношение (3.3) имеет вид

$$\int_0^\infty \exp\left[\int_0^t p(\tau)\, d\tau\right] dt < \infty$$

Вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.1) в [4] не рассматривался.

Замечание. Пусть $A(t) = A = \text{const}$; тогда условия (3.3) и (3.4) будут выполнены при любом $m > 1$, если функция

$$\exp\left[\int_0^t p(\tau)\, d\tau\right]$$

имеет отрицательный характеристический показатель.

Пример. Рассмотрим систему (3.1) в случае, когда $p(t) = \sin\ln(1+t) + \cos\ln(1+t) - 2a$, $2a > 1$, а X_s удовлетворяют условию (1.4) с $A(t) = A = \text{const}$. Поскольку характеристический показатель функции

$$\exp\left[\int_0^t p(\tau)\, d\tau\right] = \exp\left[(1+t)\sin\ln(1+t) - 2at\right]$$

равен $1 - 2a < 0$, то невозмущенное движение системы (3.1) асимптотически устойчиво. В этом примере линейная часть системы (3.1) не является правильной, однако ни критерий И. Л. Массера [5] (см. также [8], стр. 271), ни обобщенный критерий И. Г. Малкина [1, 2] здесь неприменимы (так, для $m = 2$ критерий Массера применим лишь при $2a > 3$). Интересно заметить, что нулевое решение системы

$$x_1^{\cdot} = -ax_1, \quad x_2^{\cdot} = [\sin \ln (1 + t) + \cos \ln (1 + t) - 2a] x_2 + x_1^2 \tag{3.5}$$

при $1 < 2a < 1 + {}^1/_2 e^{-\pi}$ неустойчиво [11] (см. также [2], стр. 368—369).

Замечание. Утверждения теорем 1—4 перестают быть верными, если интеграл (2.1) расходится, что показывает пример скалярного уравнения $x^{\cdot} = -(1 + t)^{-1}x + x^2$, решения которого

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 + t)[1 - x_0 \ln (1 + t)]}, \quad x(0) = x_0$$

при $x_0 > 0$ за конечное время уходят в бесконечность. В этом примере $m = 2$, $A(t) \equiv 1$, $\varphi(t) = (1 + t)^{-1}$, $\psi(t_0) = 1 + t_0$ и

$$\int_0^\infty A(\tau)\varphi^m(\tau)\psi(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty (1 + \tau)^{-1}\,d\tau = \infty$$

4. Рассмотрим случай, когда функция $\mathbf{X}$ в уравнениях (1.1) удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leqslant A(t)\|\mathbf{x}\| \tag{4.1}$$

(т. е. неравенству (1.4) с $m = 1$). С помощью леммы Гронуолла — Беллмана [8, 12] аналогично лемме 1 может быть доказана

Лемма 2. Предположим, что в области (1.2) выполняется неравенство (4.1), а матрица Коши удовлетворяет условию (1.5). Тогда для решений системы (1.1) справедлива оценка

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant \varphi(t)\psi(t_0)\|\mathbf{x}_0\| \exp\left[\int_{t_0}^t A(\tau)\varphi(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right] \quad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{4.2}$$

Из леммы 2 вытекает следующая

Теорема 5. 1) Если для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $N(t_0) > 0$, такое, что

$$\varphi(t)\psi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^t A(\tau)\varphi(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right] \leqslant N \quad \text{при всех } t \geqslant t_0$$

то невозмущенное движение системы (1.1) устойчиво;

2) если в п. 1) можно выбрать $N > 0$ не зависящим от t_0, то невозмущенное движение системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0;

3) если

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\varphi(t)\psi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^t A(\tau)\varphi(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]\right\} = 0$$

то невозмущенное движение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Пусть нулевое решение системы (1.3) устойчиво равномерно по t_0; при этом [8] матрица Коши $K(t, t_0)$ равномерно ограничена для всех $t \geqslant t_0$ и всех $t_0 \geqslant 0$ и, следовательно, можно положить $\varphi(t) = \text{const}$, $\psi(t_0) = \text{const}$. На основании п. 2) теоремы 5 заключаем, что если

$$\int_0^\infty A(\tau)\,d\tau < \infty$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0.

Этот результат близок к изложенным в [8, 12].

2°. Предположим, что нулевое решение системы (1.3) экспоненциально-асимптотически устойчиво, т. е.

$$\| K(t, t_0) \| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)}, \quad B > 0, \ \alpha > 0 - \text{const}$$

При этом можно положить $\varphi(t) = c_1 e^{-\alpha t}$, $\psi(\tau) = c_2 e^{\alpha\tau}$, $c_1 c_2 = B$; следовательно

$$\varphi(t)\psi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right] = B\exp\left[\int_{t_0}^{t}(-\alpha + BA(\tau))\,d\tau\right] \tag{4.3}$$

На основании теоремы 5 заключаем, что (ср. с [5])

1) если для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $N(t_0) > 0$, такое, что

$$\int_{t_0}^{t}[-\alpha + BA(\tau)]\,d\tau \leqslant N \quad \text{при всех } t \geqslant t_0$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) устойчиво;

2) если число N можно выбрать не зависящим от t_0, то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0;

3) если

$$\int_{t_0}^{\infty}[-\alpha + BA(\tau)]\,d\tau = -\infty$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Пусть, в частности, $A(\tau) = A = \text{const}$; тогда из (4.2) и (4.3) получаем

$$\| \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| \leqslant B \|\mathbf{x}_0\| e^{-(\alpha - AB)(t-t_0)}$$

Следовательно, если постоянная A достаточно мала ($A < \alpha B^{-1}$), то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) экспоненциально-асимптотически устойчиво [2].

5. В работе [7] рассматривалась система

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{\cdot} &= Q(t)\mathbf{x} + R(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}^{\circ}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x}^{\cdot} &= P(t)\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k \end{aligned} \tag{5.1}$$

в предположении, что

$$\mathbf{Y}(t, 0, \mathbf{y}) \equiv 0, \quad \mathbf{X}(t, 0, \mathbf{y}) \equiv 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\| + \|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x}\|} \underset{t \geqslant 0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \to 0 \tag{5.3}$$

а решения системы $\mathbf{x}^{*\cdot} = P(t)\mathbf{x}^*$ удовлетворяют условию

$$\| \mathbf{x}^*(t; t_0, \mathbf{x}_0^*) \| \leqslant B \| \mathbf{x}_0^* \| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (B > 0, \alpha > 0\text{-const}; t \geqslant t_0 \geqslant 0) \tag{5.4}$$

В теореме 1 из [7] труднопроверяемым является условие 3). С помощью результатов п. 2 это условие можно не только проверить, но и выявить асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\| \mathbf{x} \| = \| \mathbf{y} \| = 0$ системы (5.1).

Будем предполагать, что

$$\| Q(t) \| \leqslant M, \quad \| P(t) \| \leqslant M \quad \text{при } t \geqslant 0 \ (M = \text{const}) \tag{5.5}$$

а матрица Коши $K(t, t_0)$ линейной системы

(5.6) $\quad \mathbf{y}^{\cdot} = R(t)\mathbf{y}$

удовлетворяет условию (1.5). Рассмотрим систему

(5.7) $\quad \mathbf{y}^{*\cdot} = R(t)\,\mathbf{y}^* + \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}^*)$

которая получается из первой группы уравнений (5.1) при $\mathbf{x} \doteq 0$ и решения которой обозначим через $\mathbf{y}^*(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*)$. Уравнения в вариациях для системы (5.7)

(5.8) $$\xi^{\cdot} = \left[R(t) + \frac{\partial \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}^*)}{\partial \mathbf{y}^*}\bigg|_{\mathbf{y}^*=\mathbf{y}^*(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*)}\right]\xi$$

Обозначим через $\Omega(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*)$ фундаментальную матрицу решений системы (5.8), $\Omega(t_0;\, t_0, \mathbf{y}_0^*) = E$, где E — единичная матрица. Предположим, что

(5.9) $$\| \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}) \| \leqslant A(t)\, \| \mathbf{y} \|^m, \quad m > 1$$

(5.10) $$\left\| \frac{\partial \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right\| \leqslant A_1(t)\, \| \mathbf{y} \|^{m-1}$$

Если интеграл (2.1) сходится, то в силу леммы 1 при достаточно малых $\| \mathbf{y}_0^* \|$ для решения системы (5.7) имеем

(5.11) $$\| \mathbf{y}^*(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*) \| \leqslant \varphi(t)\, \psi(t_0)\, \| \mathbf{y}_0^* \| \times$$
$$\times \left[1 - (m-1)\, \psi^{m-1}(t_0)\, \| \mathbf{y}_0^* \|^{m-1} D(t_0, \infty)\right]^{-1/(m-1)}$$

Из (5.10) и (5.11) следует

(5.12) $$\left\| \frac{\partial \mathbf{Y}^\circ(t, \mathbf{y}^*)}{\partial y^*}\bigg|_{\mathbf{y}^*=\mathbf{y}^*(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*)} \right\| \leqslant A_1(t)\, \varphi^{m-1}(t)\, G(t_0, \mathbf{y}_0^*)$$
$$G(t_0, \mathbf{y}_0^*) = \psi^{m-1}(t_0)\, \| \mathbf{y}_0^* \|^{m-1} \times$$
$$\times \left[1 - (m-1)\, \psi^{m-1}(t_0)\, \| \mathbf{y}_0^* \|^{m-1} D(t_0, \infty)\right]^{-1}$$

Применяя к системе (5.8) лемму 2 и учитывая оценку (5.12), получаем

$$\| \Omega(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*) \| \leqslant \varphi(t)\, \psi(t_0) \exp\left[G(t_0, \mathbf{y}_0^*)\, D_1(t_0, t)\right]$$

$$D_1(t_0, t) = \int_{t_0} A_1(\tau)\, \varphi^m(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau$$

Предположим, что

(5.13) $$D_1(0, \infty) = \int_0^\infty A_1(\tau)\, \varphi^m(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau < \infty$$

Тогда

(5.14) $$\| \Omega(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*) \| \leqslant \varphi(t)\, \psi(t_0) \exp\left[G(t_0, \mathbf{y}_0^*)\, D_1(t_0, \infty)\right]$$

Из оценки (5.14) вытекают следующие утверждения:

1) если существует $N_0 = \text{const} > 0$, такое, что

(5.15) $$\psi^{m-1}(t_0)\, D(t_0, \infty) \leqslant N_0, \; \psi^{m-1}(t_0)\, D_1(t_0, \infty) \leqslant N_0 \quad \text{при всех } t_0 \geqslant 0$$

то найдется $h > 0$, при котором из $\| \mathbf{y}_0^* \| \leqslant h$ следует

(5.16) $$\| \Omega(t;\, t_0, \mathbf{y}_0^*) \| \leqslant L\varphi(t)\psi(t_0), \quad L = \text{const}$$

2) если, кроме того, существует $N = \text{const} > 0$, такое, что $\varphi(t)\psi(t_0) \leqslant \leqslant N$ при всех $t \geqslant t_0$ и всех $t_0 \geqslant 0$, то

$$\|\Omega(t;\ t_0,\ \mathbf{y}_0^*)\| \leqslant NL \quad \text{при } \|\mathbf{y}_0^*\| \leqslant h, t \geqslant t_0,\ \ t_0 \geqslant 0 \tag{5.17}$$

(5.17) и есть труднопроверяемое условие 3) теоремы 1 из [7].

Пусть выполнены условия (5.15), а следовательно, и неравенство (5.16). Используя, как и в [7], представление решений системы (5.1), с помощью формулы [13]

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t; \tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) \times$$
$$\times [Q(\tau)\mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))]\, d\tau$$

и учитывая начальную часть доказательства теоремы 1 из [7], а также неравенства (5.11), (5.15) и (5.16), получаем

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\|\mathbf{y}_0\|}{[1-(m-1)\psi^{m-1}(t_0)\|\mathbf{y}_0\|^{m-1}D(t_0)]^{1/(m-1)}} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} L\varphi(t)\psi(\tau)C\|\mathbf{x}_0\| e^{-\gamma(\tau-t_0)}d\tau \leqslant \frac{\varphi(t)\psi(t_0)\|\mathbf{y}_0\|}{[1-(m-1)N_0\|\mathbf{y}_0\|^{m-1}]^{1/(m-1)}} +$$
$$+ CL\|\mathbf{x}_0\|\varphi(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)e^{-\gamma(\tau-t_0)}d\tau \quad (C>0,\ \gamma>0-\text{const})$$

Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема 6. Пусть дана система (5.1), удовлетворяющая условиям (5.2) — (5.5), (5.9) и (5.10). Предположим, что матрица Коши системы (5.6) удовлетворяет условию (1.5), интегралы (2.1) и (5.13) сходятся и выполнены неравенства (5.15). Тогда:

1) если для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $F(t_0) > 0$, такое, что

$$\varphi(t)\psi(t_0) \leqslant F, \quad \varphi(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)e^{-\gamma(\tau-t_0)}d\tau \leqslant F \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

то движение $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 0$ системы (5.1) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво;

2) если в п. 1) можно выбрать $F > 0$ не зависящим от t_0, то устойчивость по Ляпунову равномерна по t_0;

3) если выполнены условия п. 1) и

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\left\{\varphi(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)e^{-\gamma(\tau-t_0)}d\tau\right\} = 0 \tag{5.18}$$

то движение $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 0$ системы (5.1) асимптотически устойчиво, причем экспоненциально относительно x;

4) если выполнены условия п. 2) и соотношения (5.18), то движение $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 0$ системы (5.1) устойчиво равномерно по t_0 и асимптотически устойчиво равномерно по $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}$, причем экспоненциально относительно x.

Замечание. П. 1) и 3) теоремы 6 дают для системы (5.1) результат, аналогичный «принципу сведения» в форме И. Г. Малкина [2] (с той лишь разницей, что у И. Г. Малкина [2] $A(t) = A = \text{const}$). Однако теорема И. Г. Малкина ([2], стр. 383) к системе (5.1) неприменима, поскольку не все условия этой теоремы в данном случае выполнены.

Во-первых, не выполнено условие определенной положительности квадратичной формы (91.7) из [2]. Применительно к системе (5.1) это условие означает достаточную малость $\| R(t) \|$ при всех $t \geqslant 0$ (ср. с [14]); между тем элементы матрицы $R(t)$ не только не предполагаются малыми, но могут быть даже неограниченными.

Во-вторых, доказательство первых двух пунктов «первой основной теоремы о критических случаях» И. Г. Малкина ([2], § 91) фактически проведено в предположении, что устойчивость невозмущенного движения «укороченной» системы вне зависимости от членов порядка выше N является равномерной по t_0, причем устойчивость невозмущенного движений «полной» системы будет также равномерной по t_0. Указанное обстоятельство объясняется тем, что число $\delta_1(h(\varepsilon), A)$, введенное в [2] на стр. 387, в ходе доказательства предполагается не зависящим от t_0.

Если два перечисленных условия не выполнены, то «принцип сведения» в общем случае места не имеет (ср. с [14]), что показывает пример системы (3.5), для которой нулевое решение укороченной системы $x_2^{\cdot} = [\sin \ln(1 + t) + \cos \ln(1 + t) - 2a]\, x_2$ согласно результатам п. 3 устойчиво вне зависимости от членов порядка выше первого (но не равномерно по t_0).

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 9 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Об устойчивости движения по первому приближению. Докл. АН СССР, 1938, т. 18, № 3.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. *Демидович Б. П.* Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем. Матем. сб., 1965, т. 66 (108), № 3.
4. *Персидский К. П.* К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 3, 1936—1937, т. 8.
5. *Massera J. L.* Contributions to stability theory. Ann. Math., 1956, vol. 64, No. 1, p. 182—206. (Рус. перев.: Математика. Сб. перев., 1957, 1 : 4, стр. 81—104).
6. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
7. *Озиранер А. С.* Об устойчивости неустановившихся движений по первому приближению. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
9. *Bihary J.* A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential eguations. Acta Math., Acad. scient. Hung., 1956, vol. 7, No 1, p. 81—94.
10. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
11. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Z., 1930, Bd. 32, Nr 5, S. 703—728.
12. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
13. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1961, № 2.
14. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, «Наука», 1974.