Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 533.13 + 537.21 + 539.375

ИНВАРИАНТНЫЕ Г-ИНТЕГРАЛЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Основным свойством аналитических функций комплексного переменного является инвариантность контурного интеграла от аналитической функции относительно пути интегрирования. Это свойство позволяет деформировать контур интегрирования в области аналитичности, не изменяя величины интеграла. Представляет интерес отыскание подобных инвариантных интегралов в других задачах математической физики, не сводящихся к плоским задачам теории потенциала.

В данной работе построена система энергетических интегралов (Г-интегралы) для сплошной среды с любыми реологическими и электромагнитными свойствами (п. 1). Затем излагается общая теория движения сингулярностей, основанная на инвариантных Г-интегралах (п.2). Как некоторые частные случаи этой теории рассмотрены следующие вопросы: разрушение диэлектриков электрическим полем (движение зарядов и токов, п. 3); сопротивление тела в потоке идеальной несжимаемой жидкости (движение диполей, вихрей и стоков в идеальной жидкости, п. 4); движение трещин и дислокаций в упругих телах (п. 5) и др.

1. Инвариантные Г-интегралы в случае электромагнитной деформируемой материи. Рассмотрим деформируемую сплошную материю, находящуюся в электромагнитном поле, в самом общем случае взаимодействия поля с материей (электромагнитное поле вызывает деформацию среды и, наоборот, деформирование материи генерирует электромагнитное поле).

Состояние электромагнитной деформируемой материи характеризуется векторами поля **E**, **B**, **D**, **H**, вектором смещения **u** и тензорами напряжения и деформации σ_{ik}, ε_{ik}. Имеют место следующие уравнения:

уравнения Максвелла

$$\varepsilon_{ijk}E_{j,k} + \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_{ijk}H_{j,k} - \frac{\partial D_i}{\partial t} = J_i \tag{1.1}$$

$$D_{i,i} = \rho, \quad B_{i,i} = 0, \quad J_{i,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

уравнения Ньютона

$$\sigma_{ij,j} = \delta u_i^{\cdot\cdot} \tag{1.2}$$

кинематические условия для малых деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{1.3}$$

локальный закон сохранения энергии

$$U^{\cdot} = q_{i,i} + E_i D_i^{\cdot} + H_i B_i^{\cdot} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{J}$ — вектор плотности тока, ρ — плотность заряда, δ — плотность материи, x_i — неподвижные прямоугольные декартовы координаты, t — время, $\mathbf{q}$ — вектор некомпенсированного теплового потока, $U^{\cdot}$ — скорость изменения внутренней энергии материи в единице объема; точка означает полную производную по времени; $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$, все другие ε_{ijk} равны нулю. Деформации среды для простоты считаются малыми. (Последующее можно обобщить также на случай конечных деформаций.)

Все функции, участвующие в этих уравнениях, предполагаются непрерывно-дифференцируемыми необходимое число раз всюду, за исключением особых точек, особых линий и особых поверхностей, на которых эти уравнения не имеют смысла.

Обозначим через Σ некоторую поверхность в пространстве $x_1x_2x_3$. Рассмотрим следующие интегралы по поверхности Σ:

Г-интегралы первого рода

$$\Gamma_k = \int_\Sigma \Big[\Big(Э + F + \frac{1}{2}\,\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\Big) n_k + (D_i E_k + B_i H_k - \sigma_{ij} u_{j,k} - q_{i,k}) n_i\Big] d\Sigma \tag{1.5}$$

Г-интегралы второго рода

$$\Gamma_{kl} = \int_\Sigma \Big[\Big(Э + F + \frac{1}{2}\,\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\Big)_{,l} n_k + (D_i E_k + B_i H_k - \sigma_{ij} u_{j,k} - q_{i,k})_{,l}\, n_i\Big] d\Sigma \tag{1.6}$$

Г-интегралы третьего рода

$$\Gamma_{klm} = \int_\Sigma \Big[\Big(Э + F + \frac{1}{2}\,\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\Big)_{,lm} n_k + (D_i E_k + B_i H_k - \sigma_{ij} u_{j,k} - q_{i,k})_{,lm} n_i\Big] d\Sigma \tag{1.7}$$

и т. д.

Здесь через $Э$ и F обозначены следующие потенциалы:

$$Э = U - E_i D_i - H_i B_i$$

$$F = -\int\Big[\frac{\partial P_i}{\partial t} + \rho E_i + \varepsilon_{ijk} J_j B_k\Big] dx_i \tag{1.8}$$

$$\Big(\operatorname{grad} F = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \rho\mathbf{E} - \mathbf{J}\times\mathbf{B}\Big)$$

$$P_i = \varepsilon_{ijk} B_j D_k \qquad (\mathbf{P} = \mathbf{B}\times\mathbf{D})$$

В формулах (1.5) — (1.8) плотность заряда ρ считается постоянной. Приняты обычные правила индексных обозначений суммирования и дифференцирования (например $u_i^{\cdot} u_i^{\cdot} = u_1^{\cdot 2} + u_2^{\cdot 2} + u_3^{\cdot 2}$, $u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k$ и т. д.).

Можно показать, что на основании уравнений (2.1) при $\rho = \mathrm{const}$ имеет место равенство

$$\operatorname{rot}\Big(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}\Big) = 0$$

Имеет место следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Коши для данной физической системы.

Теорема 1.1. Если а) поверхность Σ замкнута; б) все функции, участвующие в уравнениях (2.1) — (2.4), дифференцируемы всюду в области V, охваченной контуром Σ; в) $\rho = \mathrm{const}$ и $\delta = \mathrm{const}$ всюду в области V, то Г-интегралы любого рода равны нулю.

Докажем эту теорему вначале для Г-интегралов первого рода. Преобразуем поверхностный интеграл (1.5) в объемный

$$\Gamma_k = \int\limits_V \Big[\Big(Э + F + \frac{1}{2}\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\Big)_{,k} + (D_i E_k + B_i H_k - \sigma_{ij} u_{j,k} - q_{i,k})_{,i}\Big] dv \tag{1.9}$$

Можно показать, что из локального закона сохранения энергии (1.4) вытекает следующее уравнение:

$$\int\limits_V [U_{,k} - q_{i,ki} - E_i D_{i,k} - H_i B_{i,k} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}]\, dv = 0 \tag{1.10}$$

Теперь преобразуем подынтегральное выражение в формуле (1.9) при помощи формул (1.1) — (1.3), (1.8) и (1.10). Получаем

$$\begin{aligned}
&\Big(Э + F + \frac{1}{2}\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\Big)_{,k} + (D_i E_k + B_i H_k - \sigma_{ij} u_{j,k} - q_{i,k})_{,i} = \\
&= D_i (E_{k,i} - E_{i,k}) + B_i (H_{k,i} - H_{i,k}) - \varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial t}(B_i D_j) - \\
&- \varepsilon_{kij} J_i B_j + \delta u_i^{\cdot} u_{i,k}^{\cdot} - (\sigma_{ij} u_{i,k})_{,j} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k} = \\
&= [D_i (E_{k,j} - E_{i,k}) + \varepsilon_{kij} D_j \varepsilon_{imn} E_{m,n}] + \\
&+ [B_i (H_{k,i} - H_{i,k}) - \varepsilon_{kij} B_i \varepsilon_{jmn} H_{m,n}] + \\
&+ \varepsilon_{kij}(B_i J_j - B_j J_i) + u_{i,k}(\delta u_i^{\cdot\cdot} - \sigma_{ij,j}) = 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь при преобразованиях было учтено следующее тождество:

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{imn} = \delta_{kn}\delta_{jm} - \delta_{km}\delta_{jn}$$
$$(\delta_{jn} = 1 \text{ при } j = n;\ \delta_{jn} = 0 \text{ при } j \neq n)$$

и антисимметричность ε_{kij}.

Теорема доказана для Г-интегралов первого рода. Очевидно, из приведенного доказательства следует также, что она справедлива для Г-интегралов любого рода, так как их подынтегральные выражения в преобразованном объемном интеграле представляют собой некоторые производные по координатам от выражения (1.11).

Из доказанной теоремы непосредственно вытекают следующие теоремы инвариантности Г-интегралов.

Теорема 1.2. Г-интегралы не изменяют своего значения вдоль любой замкнутой поверхности Σ, охватывающей особую точку, особую линию или особую поверхность. Поверхность Σ можно произвольно деформировать, не изменяя величины Г-интегралов, если при деформировании поверхность Σ не пересечет особую точку, особую линию или особую поверхность.

Теорема 1.3. Если незамкнутая поверхность Σ ограничена пространственным контуром L, то Г-интегралы не изменяют своего значения при любом деформировании поверхности Σ, если: а) контур L фиксирован, б) поверхность Σ при деформировании не пересекает особую точку, особую линию или особую поверхность.

Следует подчеркнуть, что доказанные теоремы справедливы для сплошной материи с любыми реологическими и электромагнитными свойствами. Полученные ранее результаты (см. [1]) для деформируемой среды в отсутствие электромагнитного поля получаются отсюда как очевидный частный случай при $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{B} = 0$.

2. Общая теория движения сингулярностей. Рассмотрим изолированную особую точку O внутри некоторой области V: по определению все искомые функции дифференцируемы всюду в области V, за исключением точки O, где хотя бы некоторые из них обращаются в бесконечность. Обращение в бесконечность не имеет физического смысла и говорит о том, что математическая теория, описывающая поведение данной физической системы, неточна. Фигурально говоря, все ошибки и отклонения этой теории от реальности сосредоточены в особых точках. Величина интеграла Γ_i не зависит от выбора замкнутой поверхности Σ (лишь бы она охватывала точку O и лежала в области V). В частности, в качестве Σ можно взять сферу сколь угодно малого радиуса с центром в точке O.

Предположим, что при $t \geqslant t_0$ особая точка O начала двигаться в пространстве со скоростью $\mathbf{v}$ (состояние точки O до момента $t = t_0$ не имеет значения). Выберем подвижную систему декартовых координат $x_1'x_2'x_3'$ с центром в точке O. В подвижных координатах все Г-интегралы сохраняют свой вид, если произвести замену $x_i \to x_i'$, $u_i^{\boldsymbol{\cdot}} \to u_i^{\boldsymbol{\cdot}} - v_i$; при этом для поверхности Σ (например малой сферы) в подвижном пространстве $Ox_1'x_2'x_3'$ останутся справедливыми все теоремы п. 1.

При продвижении особой точки на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ внешнее поле (описываемое в рамках данной теории) производит работу dA. Величина этой работы связана с Г-интегралами первого рода следующим образом:

$$dA = \Gamma_i dx_i \quad (dx_i = v_i dt) \tag{2.1}$$

или $\Gamma_i = \partial A / \partial x_i$.

Величина Γ_i имеет размерность силы. Таким образом, физический смысл Г-интеграла первого рода следующий: величина Γ_i равна необратимой работе внешнего поля при продвижении особой точки на единицу длины вдоль x_i.

Скорость диссипации энергии в особой точке равна

$$A^{\boldsymbol{\cdot}} = \Gamma_i v_i \tag{2.2}$$

Спрашивается, при каких значениях потоков энергии Γ_i и в каком направлении начинается движение особой точки?

Дадим ответ на этот вопрос при помощи аппарата необратимой термодинамики. Применим два основных подхода.

А. Будем считать, что в трехмерном пространстве $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ существует поверхность $S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = 0$, разделяющая все пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. Если точка (Γ_1, Γ_2, Γ_3) находится во внутренней области, то особая точка в физическом пространстве неподвижна; как только точка (Γ_1, Γ_2, Γ_3) выходит на поверхность S, начинается движение особой точки в физическом пространстве; внешняя область недостижима. В этом случае скорость движения особой точки определяется из принципа максимума скорости диссипации энергии, который приводит к следующему выражению:

$$v_i = \lambda\, \partial S/\partial \Gamma_i \tag{2.3}$$

где λ — некоторая неизвестная функция. Выражение (2.3) определяет направление движения особой точки.

Этот вариант построения теории аналогичен теории идеальной пластичности; формула (2.3) аналогична ассоциированному закону течения.

В случае $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$ при $\Gamma_1 < \Gamma_{1c}$ особая точка неподвижна; при $\Gamma_1 = \Gamma_{1c}$ происходит ее движение.

Б. Будем считать, что существует диссипативная функция D (Γ_1, Γ_2, Γ_3), являющаяся однородной функцией первой степени своих аргументов. В этом случае согласно (2.2) имеем

$$v_i = \partial D/\partial \Gamma_i \tag{2.4}$$

Этот вариант построения теории аналогичен теории нелинейно-вязких тел. В этом случае движение особой точки происходит при любых значениях Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Возможны и более сложные синтетические модели движения особой точки в физическом пространстве, комбинирующие предельное состояние и вязкое течение. Функции S и D подлежат определению из экспериментальных данных или же из структурной теории, раскрывающей природу особой точки.

В наиболее простом и часто встречающемся случае, когда $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$, $v_2 = v_3 = 0$, очевидно, будет

$$v_1 = f\,(\Gamma_1) \tag{2.5}$$

Здесь функция $f\,(\Gamma_1)$ определяется из эксперимента или же из структурной физической теории.

Рассмотрим теперь некоторую точку O на особой линии. Выберем локальную систему координат с центром в точке O, а ось x_3 направим вдоль линии. Пусть при $t > t_0$ особая линия в некоторой окрестности точки O начала двигаться в пространстве со скоростью v (v_1, v_2, 0). Взяв в качестве Σ какую-либо цилиндрическую поверхность, ось которой — особая линия, можно показать, что формулы (2.1) и (2.2) справедливы и в данном случае при $i = 1, 2$, причем dA и Γ_i будут линейными плотностями соответствующих величин в точке O (т. е. относятся к единице длины особой линии). Размерность Γ_i будет равняться силе, деленной на длину. Для определения движения особой линии можно привлечь те же модели, что и раньше (в частности, модели (2.3) — (2.5) для соответствующих случаев при $i = 1, 2$).

Рассмотрим, наконец, особую поверхность (обычно это — поверхность разрыва, на которой хотя бы некоторые из искомых функций терпят скачок). Выберем локальную систему координат с центром в некоторой точке O на поверхности разрыва, а ось x_1 направим по нормали к поверхности. Пусть при $t > t_0$ особая поверхность в некоторой окрестности точки O двигается в пространстве с нормальной скоростью v_1. В данном случае будет справедлива формула $dA = \Gamma_1 dx_1$, а величины dA и Γ_1 будут поверхностными плотностями в точке O (т. е. относятся к единице площади особой поверхности). Размерность Γ_1 в данном случае равняется силе, деленной на квадрат длины. Общая теория движения особой поверхности полностью укладывается в формулу (2.5); в простейшем случае можно взять $\Gamma_1 = D$, где D — некоторая константа материала (как в теории взрыва, см. [1]).

Инвариантные Г-интегралы дают мощный аппарат для построения новых физических теорий и для унификации старых.

3. Электрическое разрушение. Рассмотрим электростатическое поле в вакууме или диэлектрике. В этом случае

$$\mathbf{J} = 0,\ \rho = 0,\ q_i = 0,\ D_i = \varepsilon_0 E_i,\ B_i = 0,\ H_i = 0,\ u_i = 0 \tag{3.1}$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума или диэлектрика (зависит от системы единиц). Согласно (1.5) инвариантные Г-интегралы первого рода в данном случае будут следующими:

$$\Gamma_k = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_\Sigma (-E_i E_i n_k + 2E_i E_k n_i)\, d\Sigma \tag{3.2}$$

Уравнения Максвелла сводятся к следующим:

$$E_i = -\varphi_{,\,i}, \quad \varphi_{,\,ii} = 0 \tag{3.3}$$

Рассмотрим основные виды сингулярностей. Всюду в дальнейшем, как правило, громоздкое вычисление инвариантных Г-интегралов опускается и приводится конечный результат.

Точечный заряд в поле. Поле в окрестности точечного заряда e в начале координат имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} - E_{i0} x_i, \quad E_i = \frac{e x_i}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + E_{i0} \quad (r^2 = x_i x_i) \tag{3.4}$$

Здесь первое слагаемое — собственное поле заряда, второе слагаемое — внешнее поле (последующие члены разложения несущественны). В этом случае

$$\Gamma_k = eE_{k0} \tag{3.5}$$

Таким образом, в данном случае Γ_k — это компоненты силы, с которой внешнее поле действует на заряд (при перемещении этого заряда на единицу длины вдоль x_k диссипируется энергия Γ_k).

Диполь во внешнем поле. Пусть поле имеет вид

$$\varphi = \frac{m_i x_i}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_{i0} x_i - d_{ik} x_i x_k \tag{3.6}$$

Здесь m_i — компоненты дипольного момента, E_{i0} и d_{ik} — некоторые постоянные; первое слагаемое — собственное поле диполя, второе и третье слагаемые — внешнее поле (последующие члены разложения несущественны).

В этом случае имеем

$$\Gamma_k = 2m_i d_{ik} \tag{3.7}$$

Следовательно, компоненты силы Γ_k, с которой внешнее поле действует на диполь, определяются дипольным моментом и производными напряженности внешнего поля в начале координат. При выводе (3.7) было существенно использовано предположение о малости характерной структурной длины диполя по сравнению с радиусом r сферы Σ. При перемещении диполя на единицу длины вдоль x_k диссипируется энергия Γ_k.

Совершенно аналогично можно рассмотреть мультиполи любого порядка.

К теории молнии (пробоя). Пусть некоторый зонд (который представим себе в виде тонкого диэлектрического стержня) несет на своем конце заряд e. Поместим конец зонда во внешнее поле с напряженностью $\mathbf{E}$ (в отсутствие заряда e). Спрашивается, при каком условии произойдет разряд (молния), т. е. заряд уйдет с зонда? На основании общей теории движения сингулярностей (п. 2) ответ на этот вопрос будет следующим: при $e|\mathbf{E}| < \Gamma_c$ разряда не происходит, а неравенство $e|\mathbf{E}| > \Gamma_c$ невозможно, т. е. условие пробоя

$$e^2 (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) = \Gamma_c^2 \tag{3.8}$$

Здесь Γ_c — некоторая локальная постоянная конца зонда, характеризующая электрические — прочностные свойства окружающей среды, зонда, их контакта, а также геометрию конца зонда. Постоянную Γ_c для данного зонда и данной внешней среды можно определить из одного опыта по пробою в заданном поле $\mathbf{E}$ при заданном заряде.

При выводе условия (3.8) из (2.3) было предположено, что внешняя материя в окрестности конца зонда изотропна по своему сопротивлению пробою, т. е. все направления равноправны. Из этого допущения вытекает, что поверхность предельного состояния S $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ в (2.3) представляет собой сферу. (Это соображение относится и к общему случаю сингулярных точек поля (п. 2).) Отсюда вытекает (3.8). Направление пробоя согласно (2.3) в данном случае совпадает с направлением вектора $\mathbf{E}$.

Скорость передвижения шаровой молнии ничтожно мала по сравнению со скоростью распространения линейной молнии. Поэтому можно предположить, что шаровая молния представляет собой некоторый мультиполь, структура которого пока неизвестна.

Линейный заряд. Пусть заряд распределен равномерно вдоль линии $x_1 = x_2 = 0$ с плотностью q. Поле в окрестности этой линии имеет вид

$$E_i = \frac{qx_i}{2\pi\varepsilon_0 r^2} + E_{i0} \quad (i = 1, 2;\ r^2 = x_i x_i)$$

В этом случае

$$\Gamma_k = qE_{k0} \quad (k = 1, 2)$$

Следовательно, Γ_k — также компоненты силы, с которой внешнее поле действует на единицу длины линейного заряда.

Вихревая линия. Поле вблизи вихревой линии $x_1 = x_2 = 0$ (соленоидальная катушка) имеет вид

$$E_1 = -\frac{wx_2}{2\pi r^2} + E_{10}, \quad E_2 = \frac{wx_1}{2\pi r^2} + E_{20}$$

$$(\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}E_{10} + \mathbf{j}E_{20}, \operatorname{tg}\varphi = x_2/x_1, r^2 = x_i x_i, i = 1, 2)$$

Здесь w — циркуляция вектора $\mathbf{E}$ поля ($\mathbf{w} = w\mathbf{k}$ — вектор вихря). В этом случа»

$$\Gamma = \Gamma_1\mathbf{i} + \Gamma_2\mathbf{j} = \varepsilon_0 (\mathbf{w} \times \mathbf{E}_0) \tag{3.9}$$

Таким образом, на вихревую линию действует сила $\mathbf{\Gamma}$, определяемая формулой (3.9).

Вихревая линия соответствует наличию сосредоточенного магнитного потока $wt\mathbf{k}$ вектора $\mathbf{B}$ вдоль оси x_3 (в сердечнике катушки).

Если в рассмотренном выше случае линейного заряда при $x_1 = x_2 = 0$ наблюдатель будет двигаться вдоль оси x_3 с постоянной скоростью v, то он заметит лишь магнитное поле

$$H_1 = -\frac{Jx_2}{2\pi r^2} + H_{10}, \quad H_2 = \frac{Jx_1}{2\pi r^2} + H_{20}$$

$$\left(\mathbf{J} = \frac{q}{S_0} v\mathbf{k}, J = \frac{q}{S_0} v, \mathbf{H}_0 = H_{10}\mathbf{i} + H_{20}\mathbf{j}\right)$$

где S_0 — площадь поперечного сечения линейного заряда. В этом случае

$$\Gamma = \Gamma_1\mathbf{i} + \Gamma_2\mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H}_0) \tag{3.10}$$

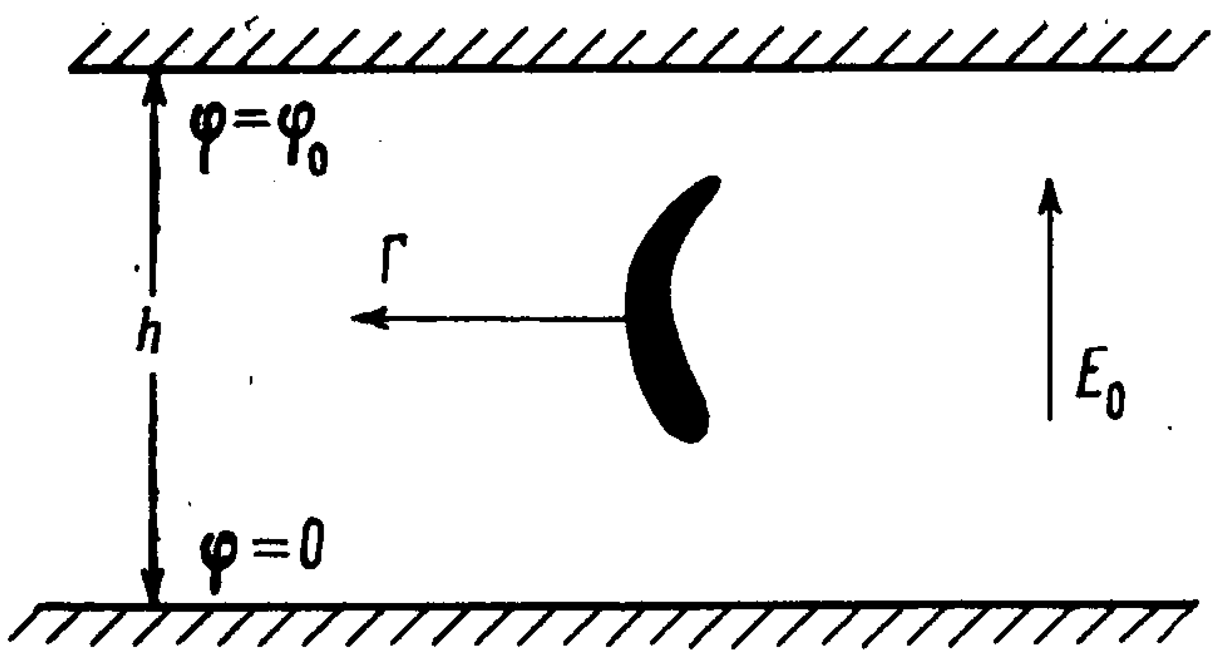
где $\mathbf{H}_0$ — внешнее поле вектора $\mathbf{H}$ на оси x_3 в отсутствие тока $\mathbf{J}$, μ_0 — магнитная проницаемость среды.

Формула (3.10) найдена из выражения для Γ_k в магнитном поле; это выражение получается из формулы (3.2) заменой E_i на H_i и ε_0 на μ_0 (где $B_i = \mu_0 H_i$).

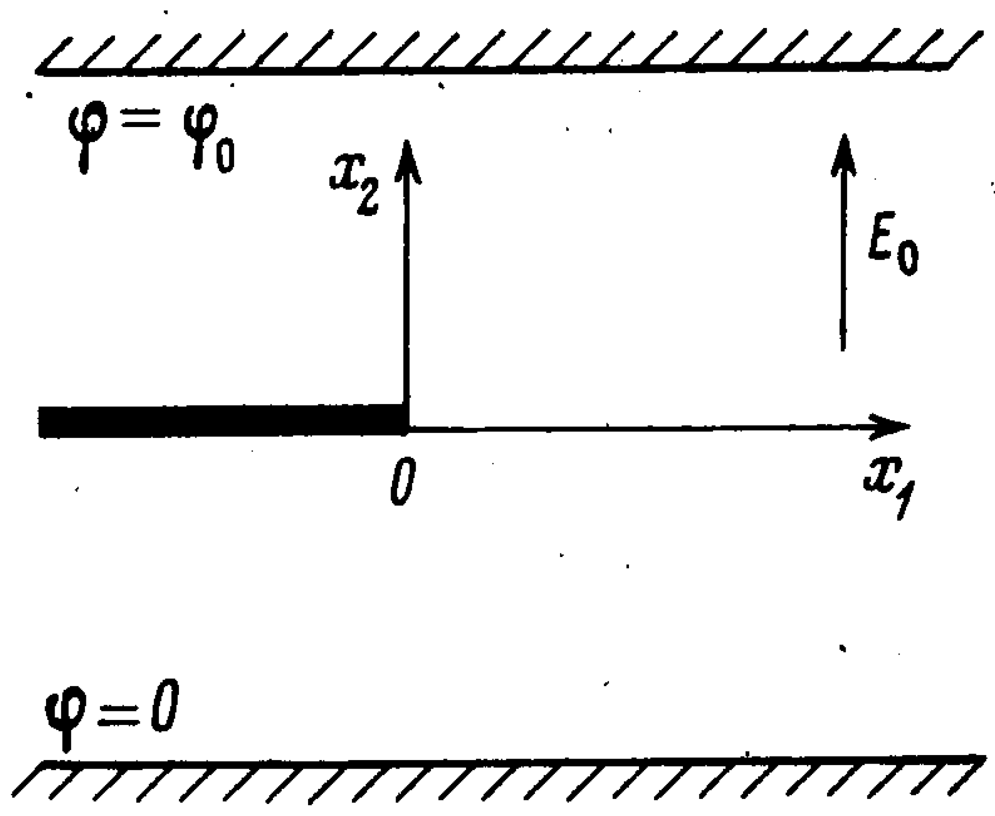
Все полученные в п. 3 результаты вычисления сил и диссипации энергии для сингулярностей при помощи инвариантных Г-интегралов легко обобщаются на тела произвольной формы и связности, если их характерные линейные размеры малы по сравнению с радиусом сферы или цилиндра Σ. В противном случае нужно применять общие формулы для Г-интегралов (например формулу (3.2) в электростатическом поле), причем в качестве Σ можно брать поверхность тела.

Подъемная сила в электростатическом поле. Рассмотрим однородное электростатическое поле в плоском конденсаторе. Пусть в этом поле находится цилиндрическое тело с поперечным сечением типа профиля Жуковского или турбинной лопатки (хорда профиля наклонена под некоторым малым углом к направлению вектора напряженности). Предположим, что материал тела — идеальный изолятор. Тогда около профиля возникнет вихревое поле вектора **E**, а на профиль будет действовать подъемная сила Γ, определяемая формулой (3.9) (см. фиг. 1). Величину вихря w можно определить из условия ограниченности вектора **E** у острой кромки профиля.

Этот эффект будет иметь место также для неидеальных диэлектриков (однако в меньшей мере). Его можно использовать, в принципе, для непосредственного преобразования электростатической энергии поля в механическую энергию вращения турбины, если использовать решетку профильных лопаток из диэлектрика (как в гидротурбине) в достаточно сильном поле **E**.



Фиг. 1



Фиг. 2

Подъемная сила такого же происхождения может действовать на сплющенные незаряженные частицы, находящиеся в электрическом или магнитном поле.

Тонкая пластина из диэлектрика в электростатическом поле. Пусть тонкая плоская пластина из идеального диэлектрика помещена в плоском конденсаторе параллельно его обкладкам. В этом случае край пластины будет особой линией поля **E**. Введем декартовы координаты x_1x_2 с началом в некоторой точке O края пластины, где x_2 — нормаль к пластине, а x_1 — нормаль к контуру ее края (фиг. 2).

Поле вблизи края пластины будет следующим:

$$E_1 = -\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad E_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$(r^2 = x_ix_i,\ \operatorname{tg}\varphi = x_2/x_1,\ i = 1, 2)$$

Здесь K — коэффициент интенсивности поля в данной точке O; он определяется из решения задачи в целом.

В этом случае находим

$$\Gamma_1 = -{}^1/{}_2\varepsilon_0K^2, \quad \Gamma_2 = 0$$

Следовательно, к краю пластины из изолятора приложена продольная растягивающая сосредоточенная сила с интенсивностью Γ_1 (силовые линии поля как бы притягивают к себе край пластины). Разрушение пластины согласно п. 2 начинается при некотором критическом значении коэффициента K. При продвижении края пластины в конденсатор энергия поля уменьшается.

Все построенные модели могут быть использованы для теоретического описания многообразных явлений разрушения в сильных электрических и магнитных полях (пробой конденсаторов, изоляции в проводах, катушек и т. д.).

Применяемый метод вычисления сил, действующих на заряженные тела, близок к методу Гельмгольца и Кортевега, развитому еще в прошлом веке. В дальнейшем этот метод был забыт (например в книге [2] он не излагается), а для вычисления сил стал применяться простой физический формализм, основанный на представлении об энергии взаимодействия. Этот формализм заключается в отбрасывании бесконечной собственной энергии точечного заряда при подсчете энергии системы (сила при этом определяется как градиент энергии системы). Парадокс расходимости энергии [1] при таком подходе логически непреодолим.

Как видно, применение инвариантных Г-интегралов позволяет, в частности, логически корректно разрешить парадокс расходимости энергии и строго обосновать указанный формализм.

4. Инвариантные Г-интегралы в гидродинамике. Ограничимся анализом стационарного течения идеальной несжимаемой невесомой жидкости, описываемой уравнениями

$$\varphi_{,ii} = 0, \quad v_i = \varphi_{,i}, \quad p = p_0 - {}^1/_2\delta v_i v_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

Здесь φ, v_i, p — потенциал течения, компоненты скорости и давление в жидкости, p_0 — давление в критической точке течения.

Инвариантные Г-интегралы в этом случае будут следующими:

$$\Gamma_k = \frac{1}{2}\delta \int_\Sigma (-v_i v_i n_k + 2 v_i n_i v_k)\, d\Sigma \tag{4.2}$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{2}\delta \int_\Sigma [-(v_i v_i)_{,l} n_k + 2 (v_i v_k)_{,l} n_i]\, d\Sigma \tag{4.3}$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что величины Γ_k равны соответствующим компонентам силы, действующей на тело, помещенное внутри замкнутой поверхности Σ в потоке жидкости (при безотрывном обтекании).

Рассмотрим некоторые примеры.

Источник в потоке жидкости. Пусть поле течения образовано наложением поля источника q_v на невозмущенное течение

$$v_i = \frac{q_v x_i}{4\pi r^3} + v_{i0} \quad (r^2 = x_i x_i, \quad i = 1, 2, 3)$$

В этом случае имеем

$$\Gamma_k = -\delta q_v v_{k0} \; (k = 1, 2, 3)$$

Таким образом, источник движется навстречу потоку, а сток — по потоку.

Диполь в потоке жидкости. Пусть поле течения имеет следующий вид:

$$\varphi = \frac{m_i x_i}{4\pi r^3} - v_{i0} x_i - d_{ik} x_i x_k$$

Здесь первый член — собственное поле диполя с моментом (m_1, m_2, m_3), второй и третий члены — невозмущенное внешнее поле.

В этом случае имеем

$$\Gamma_k = 2\,\delta\, m_i d_{ik} \tag{4.4}$$

[1] Для разрешения этого парадокса для электрона Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц вводят предположение о бесконечной отрицательной массе электрона неэлектромагнитного происхождения (см. стр. 123 книги [2]).

Таким образом, составляющие силы Γ_k, с которой внешнее поле действует на диполь, определяются дипольным моментом и градиентом скорости невозмущенного течения.

Обтекание тела. Собственное поле обтекаемого тела на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, представляет собой диполь при безотрывном обтекании. Поэтому, деформируя контур Σ, приходим к формуле (4.4) для равнодействующей сил, действующих на обтекаемое тело. В частности, если невозмущенный поток однороден, т. е. $d_{ik} = 0$, получаем $\Gamma_k = 0$ (парадокс Даламбера — Эйлера).

В моделях с возвратной струйкой (типа модели Эфроса — Джильберга — Росса) тело испытывает лобовое сопротивление, которое можно найти при помощи Г-интегралов. Деформируя замкнутую поверхность Σ в интеграле (4.2) из сферы бесконечного радиуса в лобовую поверхность тела плюс поверхность каверны, получим следующее выражение для лобового сопротивления F осесимметричного тела при отрывном осесимметричном кавитационном течении с возвратной струйкой:

$$F = \delta v_\infty^2 \frac{S_J}{S_f}(1 + Q + \sqrt{1+Q}) \quad \left(Q = \frac{p_\infty - p_c}{{}^1/{}_2\delta v_\infty^2}\right)$$

Здесь p_∞ и v_∞ — давление и скорость невозмущенного потока, p_c — давление в каверне, S_J — асимптотическое поперечное сечение возвратной струйки, S_f — лобовое сечение тела.

При помощи инвариантных Г-интегралов можно получить также ряд известных классических результатов (например формулу Леви-Чевита для обтекания цилиндрического тела с бесконечной каверной, толщину струй в насадке Борда, эффект Чизотти и др.).

Вихрь в потоке жидкости. Пусть поле течения имеет вид

$$v_1 = -\frac{wx_2}{2\pi r^2} + v_{10}, \quad v_2 = \frac{wx_1}{2\pi r^2} + v_{20}, \quad v_3 = 0$$
$$(r^2 = x_i x_i,\ i = 1,2)$$

Здесь первый член — собственное поле вихревой линии $x_1 = x_2 = 0$, второй член — невозмущенное течение, w — циркуляция вектора $\mathbf{v}$.

В этом случае

$$\Gamma = \Gamma_1 \mathbf{i} + \Gamma_2 \mathbf{j} = \delta w (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0) \quad (\mathbf{v}_0 = v_{10}\mathbf{i} + v_{20}\mathbf{j}) \tag{4.5}$$

Деформируя контур Σ в Г-интеграле (4.2), получаем следующий результат: при циркуляционном обтекании цилиндрическое тело произвольного сечения испытывает подъемную силу, определяемую формулой (4.5) (теорема Жуковского).

5. Теория трещин и дислокаций в упругих телах. Инвариантные Г-интегралы нелинейной теории упругости имеют вид

$$\Gamma_k = \int_\Sigma \left[\left(U + \frac{1}{2}\,\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\right) n_k - \sigma_{ij} u_{i,k} n_j\right] d\Sigma \tag{5.1}$$

$$\Gamma_{kl} = \int_\Sigma \left[\left(U + \frac{1}{2}\,\delta u_i^{\cdot} u_i^{\cdot}\right)_{,l} n_k - (\sigma_{ij} u_{i,k})_{,l}\, n_j\right] d\Sigma \tag{5.2}$$

и т. д.

Рассмотрим основные типы сингулярностей упругого поля.

Сосредоточенная сила на свободной границе полупространства. Пусть однородное и изотропное линейно-упругое полупространство $x_3 \geqslant 0$ нагружено сосредоточенной силой $(P_1, 0, 0)$, приложенной в начале координат. Упругое поле в окрестности начала координат имеет следующий вид:

$$(5.3)\qquad 4\pi\mu u_1 = P_1\left[\frac{1}{r}+\frac{x_1^2}{r^3}+\frac{1-2\nu}{r+x_3}-\frac{x_1^2(1-2\nu)}{r(r+x_3)^2}\right]+a_{1k}x_k$$

$$4\pi\mu u_2 = P_1\frac{x_1x_2}{r}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{1-2\nu}{(r+x_3)^2}\right]+a_{2k}x_k$$

$$4\pi\mu u_3 = P_1\frac{x_1}{r}\left(\frac{x_3}{r^2}+\frac{1-2\nu}{r+x_3}\right)+a_{3k}x_k \quad (r^2=x_ix_i)$$

Здесь (u_1, u_2, u_3) — вектор перемещения, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, a_{ik} — постоянные, определяющие невозмущенное внешнее поле. Первое слагаемое с множителем P_1 — собственное поле сосредоточенной силы.

В этом случае имеем [1]

$$(5.4)\qquad \Gamma_1 = -\frac{P_1}{24\pi\mu}\left\{a_{11}\left[\frac{3\nu}{4}+\frac{8(1+2\nu)}{5(1-2\nu)}+\frac{5}{8}+\frac{51}{10}\right]+\right.$$

$$\left.+(1-\nu)a_{33}+\nu a_{22}-\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})\left(\frac{3}{10}+\nu\right)\right\}$$

$$\Gamma_2 = \frac{P_1a_{12}}{8\pi\mu(1-2\nu)}\left(\frac{37}{24}-\frac{7}{20}\nu-\frac{2}{3}\nu^2\right)$$

Сосредоточенная линейная сила внутри тела. Пусть упругое тело представляет собой тонкую пластину, расположенную в плоскости $x_3=0$. В начале координат к пластине приложена продольная сосредоточенная сила (P_1, P_2) в расчете на единицу толщины пластины. Пусть упругое поле в комплексных потенциалах Колосова — Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеет вид

$$(5.5)\qquad \varphi(z) = -\frac{P_1+iP_2}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+(A_1+iA_2)z$$

$$\psi(z) = \frac{\varkappa(P_1-iP_2)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+(B_1+iB_2)z$$

$$\left(z=x_1+ix_2,\ \varkappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

Здесь A_i и B_i — действительные постоянные, определяющие внешнее невозмущенное поле; первое слагаемое — собственное поле сосредоточенной силы.

В этом случае имеем [2]

$$(5.6)\qquad \Gamma_1 = \frac{1+\nu}{E}\{[(2-4\nu)A_1-B_1]P_1+[(4-4\nu)A_2+B_2]P_2\}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1+\nu}{E}\{[(2-4\nu)A_1+B_1]P_2+[-4(1-\nu)A_2+B_2]P_1\}$$

Теория прочности заклепок. Пусть тонкая пластина прикреплена в начале координат к другому упругому телу (стержню, пластине или массивному телу). Это соединение упругих тел будем называть заклепкой для конкретности, однако следует иметь в виду, что излагаемая теория относится к любой технологической операции или способу прикрепления, лишь бы размер соединения был мал по сравнению с характерными раз-

[1] Вычисление (5.4) проделал А. С. Быковцев.
[2] Вычисление (5.6) проделал Л. А. Кипнис.

мерами тела. Будем предполагать заклепку достаточно прочной, так что разрушение (или предельное состояние) при достаточно больших нагрузках происходит вблизи заклепки в пластине. На основании общей теории п. 2 условие разрушения будет следующим (здесь было использовано условие изотропии по прочности):

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 = \Gamma_c^2 \tag{5.7}$$

где Γ_1 и Γ_2 даются выражениями (5.6), Γ_c — некоторая локальная постоянная, зависящая от конструкции заклепки и способа соединения, от локальной прочности пластины. Величина Γ_c не зависит от внешнего поля, от геометрии пластины, нагрузок и т. п.; все эти факторы входят в левую часть уравнения (5.7). Значение Γ_c должно определяться экспериментально. Аналогичную теорию можно развить для разрушения соединения с массивным телом, используя формулы (5.6) и общую теорию п. 2.

Линейная дислокация. Пусть упругое тело, находящееся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации, содержит дислокацию вдоль линии $x_1 = x_2 = 0$. Пусть упругое поле вблизи начала координат плоскости x_1x_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\mu(b_1 + ib_2)}{\pi i(\varkappa + 1)} \ln z + (A_1 + iA_2) z \\ \psi(z) &= -\frac{\mu(b_1 - ib_2)}{\pi i(\varkappa + 1)} \ln z + (B_1 + iB_2) z \\ & \qquad (z = x_1 + ix_2) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь (b_1, b_2) — вектор Бюргерса дислокации, μ — модуль сдвига; первое слагаемое — собственное поле дислокации, второе — внешнее невозмущенное поле.

В этом случае имеем

$$\Gamma_1 = b_1B_2 + b_2(2A_1 + B_1), \quad \Gamma_2 = b_1(-2A_1 + B_1) - b_2B_2 \tag{5.9}$$

Величины A_1, B_1, B_2 имеют следующий физический смысл:

$$A_1 = {}^1/_4\,(\sigma_{11}^\circ + \sigma_{22}^\circ), \quad B_1 = {}^1/_2\,(\sigma_{22}^\circ - \sigma_{11}^\circ), \quad B_2 = \sigma_{12}^\circ \tag{5.10}$$

Здесь σ_{11}°, σ_{12}°, σ_{22}° — напряжения внешнего невозмущенного поля в начале координат. При помощи (5.10) формулы (5.9) можно записать так:

$$\Gamma_i = \varepsilon_{ij3}\sigma_{jk}^\circ b_k \tag{5.11}$$

Это известная формула Пича — Келера для конфигурационной силы, действующей на дислокацию. Она лежит в основе теории дислокаций.

Движение дислокации согласно общей теории п. 2 происходит как только абсолютная величина вектора Γ, равная $\sqrt{\Gamma_i\Gamma_i}$, достигнет критической величины Γ_c, лежащей на предельной поляре S (Γ_1, Γ_2) (которая находится из опыта). В случае изотропии поляра представляет собой окружность и величина Γ_c не зависит от направления движения дислокации. Если же из опыта известно направление движения дислокации, то величина Γ_c будет равна диссипации энергии поля при продвижении дислокации в указанном направлении на единицу длины (эта величина определяется из опыта или из структурной теории).

Кинетика движения дислокаций во времени при постоянных внешних нагрузках должна описываться в рамках зависимости вектора **v** от вектора **Г** (см. п. 2).

Трещины отрыва. Пусть фронт трещины в упругом теле совпадает с линией $x_1 = x_2 = 0$. Берега трещины вдоль $x_2 = 0$ $x_1 < 0$ свободны от внешних нагрузок (трещина отрыва). Предполагаются условия плоской деформации или плоского напряженного состояния. Пусть упругое поле вблизи фронта трещины в комплексных потенциалах $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеет вид

$$2\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi z}}, \quad \Omega(z) = \frac{iK_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi z}}$$
$$(z = x_1 + ix_2)$$

Здесь K_{I} и K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений. В этом случае

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{\varkappa+1}{8\mu}[(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2)\mathbf{i} - 2K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}\mathbf{j}]$$

Теория развития трещин получается из общей теории движения сингулярностей (п. 2) как некоторый частный случай.

Инвариантные Г-интегралы были использованы также для описания движения сингулярной поверхности разрушения в теории действия взрыва в хрупких телах [1].

Поступила 21 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., «Наука», 1967.