Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531/534:001.8

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Л. В. Петухов

(Ленинград)

Рассматриваются задачи управления для систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка гиперболического типа, поставленные в форме связанной многомерной задачи Больца вариационного исчисления. Получены необходимые условия стационарности. Показано, что оптимальным решениям могут соответствовать множители Лагранжа, которые могут иметь разрывы на характеристических гиперповерхностях внутри области.

Задачи оптимизации для двумерных гиперболических уравнений рассматривались ранее в работах [1–4]. Разрывы множителей Лагранжа впервые были получены при решении вариационных задач газовой динамики [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим заданные в $n+1$-мерной области $W = \Omega \times [t_0, T]$ уравнение в частных производных и соотношения

$$L(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = f(x_0, x, u, z) \tag{1.1}$$

$$\Psi_i(x_0, x, u) = 0, \quad i = 1, \ldots, m < p \tag{1.2}$$

$$u = (u_1(x_0, x), \ldots, u_p(x_0, x)), \quad a_{ij} = a_{ij}(x), \quad a_i = a_i(x)$$

Здесь Ω — конечная связная область изменения переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z(x_0, x)$ — кусочно-гладкая функция переменных x_0, x, подлежащая определению, u — p-мерный вектор кусочно-непрерывных управлений.

В каждой точке $x \in \Omega$ матрица, составленная из коэффициентов a_{ij}, положительно определена и симметрична. Из этих утверждений следует, что уравнение (1.1) принадлежит в W к гиперболическому типу.

Будем считать заданными начальные и граничные условия

$$z\Big|_{x_0=t_0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial z}{\partial x_0}\Big|_{x_0=t_0} = \varphi_2(x) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial N}\Big|_S = g(S, v, z|_S) \tag{1.4}$$

$$\psi_i(S, v) = 0, \quad i = 1, \ldots, m_1 < q; \quad v = (v_1(S), \ldots, v_q(S)) \tag{1.5}$$

Здесь S — цилиндрическая гиперповерхность, образованная $n-1$-мерной поверхностью Γ_0, движущейся вдоль координаты x_0, $\partial z / \partial N$ — производная по нормали к S, v — q-мерный вектор кусочно-непрерывных управлений, заданных на S.

В конечный момент $x_0 = T$ могут быть заданы условия

$$\chi_i(\Gamma, z|_{\Gamma_0}, z|_{\Gamma_1}, \ldots, z|_{\Gamma_r}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m_2 \leqslant r + 1 \tag{1.6}$$

Здесь Γ_i — поверхности размерности $n - 1$, лежащие в гиперповерхности Ω, Γ_0 — поверхность, ограничивающая Ω, Γ — обобщенные координаты, которые задают все Γ_i $(i = 0, 1, \ldots, r)$. В качестве примера можно привести две окружности $x_1 = r_1 \cos\varphi, x_2 = r_1 \sin\varphi$ и $x_1 = r_2 \cos\varphi, x_2 = r_2 \sin\varphi$, лежащие в плоскости переменных x_1, x_2. Равенства (1.6) понимаются как связи между значениями $z|_{\Gamma_i}$ для одних и тех же значений координат Γ.

Поставим следующую задачу оптимизации: среди кусочно-непрерывных управлений u, v, удовлетворяющих соотношениям (1.2), (1.5), и кусочно-гладких функций $z(x_0, x)$, удовлетворяющих уравнению (1.1), начальным условиям (1.3), граничным условиям (1.4), а также концевым условиям (1.6), найти такие, которые сообщают минимальное значение функционалу

$$\begin{aligned} I = {} & \int\limits_W f_0(x_0, x, u, z)\, dx_0\, dx + \int\limits_S g_0(S, v, z|_S)\, dS + \\ & + \int\limits_\Omega \varphi_0\left[x, z(T, x), \frac{\partial z}{\partial x_0}(T, x)\right] dx + \int\limits_\Gamma \chi_0(\Gamma, z|_{\Gamma_0}, z|_{\Gamma_1}, \ldots, z|_{\Gamma_r})\, d\Gamma \end{aligned} \tag{1.7}$$

Коэффициенты a_{ij}, a_i и функции $f, f_0, \Psi_i, \varphi_1, \varphi_2, \psi_i, g, g_0, \chi_i, \chi_0$ считаются непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по всем своим аргументам до третьего порядка включительно в рассматриваемой области. Функция φ_0 считается непрерывной вместе со всеми своими третьими частными производными в подобластях Ω, разграниченных поверхностями $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$.

2. Необходимые условия стационарности. Сформулированная задача является $n + 1$-мерной задачей Больца вариационного исчисления. Для нее можно доказать необходимое условие стационарности функционала

$$\delta I = 0 \tag{2.1}$$

в котором δI — первая вариация функционала

$$\begin{aligned} I = {} & \int\limits_W [\lambda L(z) + H]\, dx_0\, dx + \int\limits_S (\nu z_N|_S + h)\, dS + \\ & + \int\limits_\Omega \{\nu_1[z(t_0, x) - \varphi_1(x)] + \nu_2[z_{x_0}(t_0, x) - \varphi_2(x)] + \\ & + \varphi_0\}\, dx + \int\limits_\Gamma \chi\, d\Gamma, \quad H = f_0 - \lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i \Psi_i \\ & h = g_0 - \nu g + \sum_{i=1}^{m_1} \varkappa_i \psi_i, \quad \chi = \chi_0 + \sum_{i=1}^{m_2} \rho_i \chi_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\lambda(x_0, x)$, $\mu_i(x_0, x)$, $\varkappa_i(S)$, $\nu(S)$, $\nu_i(x)$, $\rho_i(\Gamma)$ — неопределенные множители Лагранжа.

При вычислении первой вариации δI будем считать, что вся область W состоит из конечного числа элементарных областей W_i, ограниченных кусочно-гладкой гиперповерхностью S_i, гладкие части S_{ij} которой разделены n — 1-мерными поверхностями C_{ij}. Некоторые части гиперповерхностей S_i могут совпадать с границами области W: S и Ω (при $x_0 = t_0$ или $x_0 = T$), а некоторые C_{ij} будут совпадать с поверхностями Γ_i. Для того чтобы не затемнять выкладки индексами, показывающими принадлежность величин определенным элементарным областям, вычислим первую вариацию δI в некоторой элементарной области w, которая имеет границей s и n — 1-мерные поверхности C. Будем считать, что элементарная область w ограничена гиперповерхностями

$$y_0 = y_0(x_0, x) = D \tag{2.3}$$

где D — некоторая произвольная постоянная. Естественно, что в общем случае вид (2.3) будет разным для гладких участков границы s.

Первая вариация функционала I в области w примет вид

$$\delta I_w = \int\limits_w \left[\lambda L(\delta z) + \frac{\partial H}{\partial z}\delta z + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial H}{\partial u_i}\delta u_i\right] dx_0\, dx + \int\limits_s [\lambda L(z) + H]\,\delta y_0 ds \tag{2.4}$$

К выражению (2.4) следует присоединить еще первые вариации трех последних слагаемых (2.2), заданных на границах W (см. ниже).

Преобразуем (2.4), применив к слагаемым λL (δz) следующие преобразования:

$$\lambda a_{ij}\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda a_{ij}\frac{\partial \delta z}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\lambda)\,\delta z\right] + \frac{\partial^2 (a_{ij}\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}\delta z, \quad \lambda a_i \frac{\partial \delta z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda a_i \delta z) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda a_i)\,\delta z$$

Тогда получим

$$\delta I_w = \int\limits_w \left\{\left[M(\lambda) + \frac{\partial H}{\partial z}\right]\delta z + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial H}{\partial u_i}\delta u_i\right\} dx_0\, dx + \int\limits_s \left\{\lambda \alpha_{00}\frac{\partial \delta z}{\partial x_0} - \alpha_{00}\frac{\partial \lambda}{\partial x_0}\delta z - \sum_{i,\,j=1}^{n}\left[\lambda a_{ij}\alpha_{0i}\frac{\partial \delta z}{\partial x_j} - \alpha_{0j}\frac{\partial (a_{ij}\lambda)}{\partial x_i}\delta z\right] + \sum_{i=0}^{n}\lambda a_i \alpha_{0i}\delta z + f_0 \delta y_0\right\} ds \tag{2.5}$$

$$M(\lambda) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} - \sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 (a_{ij}\lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

Здесь α_{0i} — направляющие косинусы нормали гиперповерхности (2.3), определенные в приложении. Кроме выписанных в (2.5), в выражении для δI нет слагаемых, зависящих от внутренних точек элементарных областей w. Поэтому, следуя формализму вариационного исчисления, необходимо наложить условия

(2.6) $$M(\lambda) + \partial H / \partial z = 0$$

(2.7) $$\partial H / \partial u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

которые должны выполняться в каждой внутренней точке каждой элементарной области.

3. Условия Вейерштрасса — Эрдмана. Для получения условий Вейерштрасса — Эрдмана на граничных гиперповерхностях s элементарных областей проведем анализ оставшихся слагаемых в первой вариации δI. Для этого перейдем в δI к новым криволинейным ортогональным координатам

(3.1) $$y_0 = y_0(x_0, x), \quad y_1 = y_1(x_0, x), \ \ldots, \quad y_n = y_n(x_0, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Используя (П.4), (П.5), (П.7), (П.10) приложения, получим

(3.2) $$\delta I_w = \int\limits_s \Big(b_0 \lambda \frac{\partial \delta z}{\partial y_0} + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial \delta z}{\partial y_k} - b_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y_0} \delta z -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial \lambda}{\partial y_k} \delta z + c_0' \lambda \delta z + d_0 \lambda \delta z + f_0 \delta y_0\Big) \frac{dy}{R_0 R_1 \ldots R_n}$$
$$\left(dy = dy_1 \ldots dy_n, \ c_0' = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial y_0}{\partial x_j}\right)$$

Преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении (3.2), используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{b_k \lambda \delta z}{R_0 R_1 \ldots R_n}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{b_k \lambda}{R_0 R_1 \ldots R_n}\right) \delta z + \frac{b_k \lambda}{R_0 R_1 \ldots R_n} \frac{\partial \delta z}{\partial y_k}$$

Тогда первая вариация (3.2) примет вид

(3.3) $$\delta I_w = \int\limits_s \left[b_0 \lambda \frac{\partial \delta z}{\partial y_0} + F(\lambda) \delta z + f_0 \delta y_0\right] \frac{dy}{R_0 R_1 \ldots R_n} +$$
$$+ \int\limits_C \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(N, y_k) \frac{\lambda \delta z}{R_0 R_1 \ldots R_n} dC$$
$$F(\lambda) = - b_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y_0} - 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial \lambda}{\partial y_k} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} \lambda + \frac{\partial b_0}{\partial y_0} \lambda +$$
$$+ 2 c_0' \lambda + d_0 \lambda + \frac{b_0}{R_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\rho_{0k}} \lambda$$

где $1 / \rho_{0k}$ — величины, определяемые формулами (П.9) приложения, C — n —1-мерная поверхность, на которой нарушается гладкость гиперповерхности s, N — нормаль к поверхности C, лежащая в касательной гиперплоскости к s.

Входящие в соотношение (3.3) вариации $\delta\partial z/\partial y_0$, δz, $\delta z\,|_C$ преобразуем по формулам

$$\delta \frac{\partial z}{\partial y_0} = \Delta \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2}\delta y_0, \quad \delta z = \Delta z - \frac{\partial z}{\partial y_0}\delta y_0 \tag{3.4}$$

$$\delta z\,|_C = \Delta z\,|_C - \frac{\partial z}{\partial y_0}\delta y_0 - \frac{\partial z}{\partial N}\delta N$$

где Δz, $\Delta\partial z\,/\,\partial y_0$ — вариации на гиперповерхности s с учетом ее подвижности C, а Δz_k — вариация с учетом подвижности по поверхности C.

Воспользовавшись равенствами (3.4), приведем δI_w к виду

$$\delta I_w = \int\limits_s \Big\{ b_0\lambda\Delta \frac{\partial z}{\partial y_0} + F(\lambda)\Delta z + \Big[f_0 - \lambda f + 2\lambda \sum_{k=1}^n b_k \times \tag{3.5}$$

$$\times \frac{\partial^2 z}{\partial y_0 \partial y_k} + \lambda \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2}\frac{\partial z}{\partial y_0} + \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_0^2}\frac{\partial z}{\partial y_k} - \lambda \sum_{k,\,l=1}^n b_{kl}\frac{\partial^2 z}{\partial y_k \partial y_l} -$$

$$- \lambda \sum_{k=0}^n c_k \frac{\partial z}{\partial y_k} + \lambda \sum_{k=1}^n d_k \frac{\partial z}{\partial y_k} - F(\lambda)\frac{\partial z}{\partial y_0}\Big]\delta y_0 \Big\} \frac{dy}{R_0 R_1 \ldots R_n} +$$

$$+ \int\limits_C \sum_{k=1}^n b_k \cos(N, y_k)\,\lambda\,\Big(\Delta z\,|_C - \frac{\partial z}{\partial y_0}\delta y_0 - \frac{\partial z}{\partial N}\delta N\Big)\frac{dy}{R_0 R_1 \ldots R_n}$$

в котором $\partial^2 z\,/\,\partial y_0^2$ подставлено из формулы (П.10) приложения.

Перейдем к установлению условий Вейерштрасса — Эрдмана на гиперповерхностях s и на n —1-мерных поверхностях C. Будем рассматривать s и C, которые лежат внутри W, поэтому s служит границей двух элементарных областей. Обозначим величины в рассматриваемой элементарной области индексом плюс, а в граничной элементарной области — минус. Заметим также, что $b_0 = 0$ — дифференциальное уравнение, определяющее характеристические гиперповерхности уравнений (1.1), (2.6).

Получим прежде всего условия Вейерштрасса — Эрдмана на гиперповерхностях s, не являющихся характеристиками. При переходе через эти гиперповерхности величины z и $\partial z\,/\,\partial y_0$ останутся непрерывными, поэтому

$$\Delta \frac{\partial z^+}{\partial y_0} = \Delta \frac{\partial z^-}{\partial y_0} = \Delta \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \Delta z^+ = \Delta z^- = \Delta z, \quad \delta y_0^+ = \delta y_0^- = \delta y_0 \tag{3.6}$$

Выделяя в (3.5) слагаемые, содержащие $\Delta\partial z/\partial y_0$, и приравнивая их нулю, получим $b_0\lambda^+ - b_0\lambda^- = 0$, $b_0 \neq 0$, поэтому

$$\lambda^+ = \lambda^- \text{ на } s \tag{3.7}$$

Выделяя в (3.5) слагаемые, зависящие от Δz, найдем

$$F(\lambda^+) = F(\lambda^-) \tag{3.8}$$

На гиперповерхностях s множитель λ непрерывен, поэтому будут непрерывны производные $\partial\lambda\,/\,\partial y_k$, и из равенства (3.8) следует

$$\partial\lambda^+ / \partial y_0 = \partial\lambda^- / \partial y_0 \text{ на } s \tag{3.9}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при вариации δy_0 и учитывая (3.7), (3.9), получим

$$H^+ = H^- \text{ на } s \tag{3.10}$$

Получим теперь условия Вейерштрасса — Эрдмана на характеристиках s. На характеристиках может терпеть разрыв производная $\partial z / \partial y_0$ вследствие разрыва на них управляющих функций $u(x_0, x)$ (см. уравнение (П.14)) или за счет разрыва граничных управлений v. Будем считать также, что характеристики остаются неподвижными в рассматриваемой задаче. Тогда $\delta y_0 = 0$, $\delta N = 0$ и будут справедливы лишь вторые соотношения из (3.6).

Так как $b_0 = 0$ на характеристиках, то коэффициенты при вариациях $\Delta\partial z / \partial y_0$ в выражении (3.5) равны нулю и поэтому может быть

$$\lambda^+ \neq \lambda^- \text{ на } s \tag{3.11}$$

Приравнивая нулю коэффициент при вариации Δz, получим условие

$$-2\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial[\lambda]}{\partial y_k} + \left(c_0 + 2c_0' + d - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial b_0}{\partial y_0}\right)[\lambda] = 0 \tag{3.12}$$

которое является уравнением распространения разрывов $[\lambda] = \lambda^+ - \lambda^-$ на характеристиках. Уравнение (3.12) было получено с использованием формулы (П.15) для уравнения (2.6).

Получим еще одно условие Вейерштрасса — Эрдмана. Для этого рассмотрим $n - 1$-мерную поверхность C, которая определяет две характеристики $y_0^{(1)} = \mathrm{const}$ и $y_0^{(2)} = \mathrm{const}$ (см. (П.18)), которые образуют четыре элементарные области, примыкающие к C. Приравнивая нулю коэффициент при вариации $\Delta z|_C$ в выражении (3.5), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{4}(-1)^l \lambda_l\left[\frac{b_k^{(1)}\cos(N_1, y_k)}{R_0^{(1)}R_1^{(1)}\ldots R_n^{(1)}} + \frac{b_k^{(2)}\cos(N_2, y_k)}{R_0^{(2)}R_1^{(2)}\ldots R_n^{(2)}}\right] = 0 \tag{3.13}$$

где через λ_l ($l = 1, 2, 3, 4$) обозначим значения λ на поверхности C, но принадлежащие каждой из четырех элементарных областей. Из формул (П.18), (П.19) следует

$$b_k^{(1)} = -b_k^{(2)}, \quad \cos(N_1, y_k) = -\cos(N_2, y_k), \quad R_i^{(1)} = R_i^{(2)} \tag{3.14}$$

Тогда условие (3.13) приобретает вид

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \text{ на } C$$

Подобное условие было получено в работе [2] для двумерного случая. Оно показывает, что величина разрыва множителя λ не меняется при переходе через другую характеристику.

4. Граничные условия. Для получения условий на границе S области W следует привлечь из выражения (2.2) величины, зависящие от координат границ. Рассмотрим прежде всего элементарную область w, имеющую общую границу с S

$$\delta I_s = \int_s \left(\nu\Delta z_N + \frac{\partial h}{\partial z}\Delta z + \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial h}{\partial v_i}\Delta v_i\right)ds + \int_s \left[b_0\lambda\Delta\frac{\partial z}{\partial y_0} + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + F(\lambda)\Delta z\right]\frac{dy}{R_0R_1\ldots R_n} + \int_C \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(N', y_k)\frac{\lambda\Delta z}{R_0R_1\ldots R_n}\,dC$$

Здесь считается, что s задано уравнением $y_0(x_0, x) = D$, поэтому $\partial z / \partial N = R_0 \partial z / \partial y_0$, $ds = K_1 K_2 \ldots K_n dy$. В выражении (4.1) отсутствуют слагаемые при вариациях δy_0, δN, так как поверхности считаются неподвижными и $\delta y_0 = \delta N = 0$. Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях $\Delta \partial z / \partial y_0$, Δz, Δv_i, получим на границе s каждой элементарной области условия

$$R_0^2 \nu + b_0 \lambda = 0, \quad F(\lambda) + R_0 \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.2}$$

которые являются граничными условиями к уравнению (2.6), а также служат для определения множителя ν и граничных управлений v_i.

Получим еще условия на $n-1$-мерных поверхностях C, лежащих на границе S; такая поверхность определяет две характеристики, которые образуют три элементарные области, лежащие в W и примыкающие к C. Пронумеруем эти элементарные области индексами *1*, *2*, *3*, так что элементарная область с индексом *2* расположена между двумя характеристиками. Приравнивая нулю коэффициент при вариации $\Delta z|_C$, получим условие

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{R_0^{(1)} R_1^{(1)} \ldots R_n^{(1)}} b_k^{(1)} \cos(N_1', y_k) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{R_0^{(2)} R_1^{(2)} \ldots R_n^{(2)}} b_k^{(2)} \cos(N_2', y_k) \right] = 0 \tag{4.3}$$

Используя формулы (3.14), получим из равенства (4.3) окончательно условия

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{на } C \tag{4.4}$$

где λ_2 — значение множителя Лагранжа λ в элементарной области, помеченной индексом *2*.

Найдем теперь условия на гиперповерхностях Ω при $x_0 = T$. Для этого выпишем из первой вариации слагаемые, зависящие от координат этой гиперповерхности

$$\delta I_T = \int_\omega \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_{x_0}} \Delta \frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Delta z \right) dx + \int_\Gamma \sum_{i=0}^{r} \frac{\partial \chi}{\partial z}\Big|_{\Gamma_i} \Delta z |_{\Gamma_i} d\Gamma + \\ + \int_\omega \left[b_0 \lambda \Delta \frac{\partial z}{\partial y_0} + F(\lambda) \Delta z \right] \frac{dy}{R_0 R_1 \ldots R_n} + \int_C \sum_{k=1}^{n} \times \\ \times b_k \cos(N', y_k) \frac{\lambda \Delta z dC}{R_0 R_1 \ldots R_n} \tag{4.5}$$

Рассматриваемая граница может быть задана уравнением $y_0 = x_0 = T$, поэтому можно положить также $y_k = x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Учитывая сказанное, получим

$$R_0 = R_k = b_0 = 1; \quad b_k = c_0 = c_0' = \frac{\partial b_0}{\partial y_0} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} = \frac{1}{\rho_{0k}} = 0, \\ k = 1, \ldots, n; \quad d_0 = a_0 \tag{4.6}$$

Приравнивая нулю коэффициент при вариациях $\Delta \partial z / \partial x_0$ и Δz, имеем

$$\lambda + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_{x_0}} = 0, \quad - \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} + a_0 \lambda + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0 \tag{4.7}$$

Получим еще условия на $n-1$-мерных поверхностях C, лежащих на Ω при $x_0 = T$. При этом поверхности C могут быть двух типов: совпадающие с $n-1$-мерными поверхностями $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ и не совпадающие ни с одной из Γ_i, $i = 0, 1, \ldots, r$. Рассмотрим прежде всего поверхности Γ_i, $i=1, \ldots, r$. Поверхность Γ_i определяет два семейства характеристик $y_0^{(1)} = \mathrm{const}$ и $y_0^{(2)} = \mathrm{const}$, которые делят область W, прилегающую к к $x_0 = T$, на три элементарные области. Обозначим эти элементарные области индексами *1*, *2*, *3*, причем индексом *2* обозначим элементарную область, образованную двумя характеристиками. Тогда, приравнивая нулю выражение при вариации $\Delta z|_{\Gamma_i}$, получим условие, аналогичное (4.3), но где к левой части добавлено слагаемое $\partial\chi / \partial z|_{\Gamma_i}$. Используя формулы (3.14), можно преобразовать это условие к виду

$$\left[\frac{\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3}{R_0^{(1)}R_1^{(1)}\ldots R_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)}\cos(N_1', x_k) + \frac{\partial\chi}{\partial z}\Big|_{\Gamma_i}\right]_{\Gamma_i} = 0, \quad i=1,\ldots,z \tag{4.8}$$

Аналогично можно получить условия для $n-1$-мерных поверхностей C, лежащих на Ω, но не совпадающих с Γ_i, $i = 0, 1, \ldots, r$. Отличием будет лишь отсутствие в выражении, подобном (4.8), слагаемого $\partial\chi / \partial z|_{\Gamma_i}$

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{на } C \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь $n-1$-мерную поверхность Γ_0, являющуюся границей области Ω или пересечением цилиндрической гиперповерхности S и и $x_0 = T$. Поверхность Γ_0 определяет одну характеристику, лежащую в области W и разбивающую область W, прилегающую к Γ_0, на две элементарные области. Обозначим величины, принадлежащие этим элементарным областям, соответственно индексами *1* и *2*. Приравнивая нулю выражение при вариации $\Delta z|_{\Gamma_0}$, получим условие

$$\left[(\lambda_1-\lambda_2)\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(N', x_k) + R_0R_1\ldots R_n\frac{\partial\chi}{\partial z}\Big|_{\Gamma_0}\right]_{\Gamma_0} = 0 \tag{4.10}$$

Условия (4.7) (4.10) — концевые для уравнения (2.6). Эти концевые условия в общем случае разрывны, поэтому и решение уравнения (2.6) будет иметь разрывы на характеристиках, порождаемых $n-1$-мерными поверхностями, лежащими в области Ω при $x_0 = T$.

Получим еще условия на гиперповерхности Ω при $x_0 = t_0$. Выпишем из первой вариации слагаемые, зависящие от координат этой гиперповерхности

$$\delta I_{t_0} = \int_\omega [\nu_1\Delta z(t_0, x) + \nu_2\Delta z_{x_0}(t_0, x)]\,dx + \int_\omega \Big[b_0\lambda\Delta\frac{\partial z}{\partial y_0} + F(\lambda)\,\Delta z\Big]\frac{dy}{R_0R_1\ldots R_n} + \int_C \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(N', y_k)\frac{\lambda\Delta z dC}{R_0R_1\ldots R_n}$$

На гиперповерхности $x_0 = t_0$ будут справедливы соотношения (4.6), поэтому, приравнивая нулю величины при вариациях Δz_{x_0} и Δz, получим условия

$$\nu_2 + \lambda = 0, \quad \nu_1 - \frac{\partial\lambda}{\partial y_0} + a_0\lambda = 0$$

которые служат для определения множителей Лагранжа $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$. На n —1-мерных поверхностях могут быть справедливы неравенства

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \neq 0 \quad \text{на } C$$

которые показывают, что разрыв множителя Лагранжа λ, начинаясь при $x = T$, может достигать границы $x_0 = t_0$.

5. Необходимое условие Вейерштрасса. Перейдем к доказательству необходимых условий Вейерштрасса. Доказательство для случая двух независимых переменных было получено в работах [3, 4]. Доказательство для $n+1$ независимой переменной протекает аналогично и поэтому здесь подробно не излагается. Необходимые условия Вейерштрасса будут включать в себя условие во внутренних точках области W и условие в точках, лежащих на границе S.

Докажем условие Вейерштрасса во внутренних точках. Пусть имеем решение u, v, z, сообщающее функционалу (1.7) минимум.

Обозначим через $B(x^\circ, r_0)$ замкнутый n-мерный шар, а через $\sigma(x^\circ, r_0)$ — поверхность этого шара радиуса r_0 с центром в точке x°.

Рассмотрим лежащий в произвольной элементарной области w цилиндр $B(x^\circ, r_0) \bigcup (0 \leqslant x_0 - x^\circ_0 \leqslant e)$. Построим в этом цилиндре новое управление U, которое удовлетворяет соотношениям (2.2). Тогда решение уравнения (1.1) будет отличаться от оптимального в области, ограниченной шаром $B(x^\circ, r_0)$, $x_0 = x_0{}^\circ$ и характеристическим коноидом [6], проходящим через поверхность шара $\sigma(x^\circ, r_0)$ при $x_0 \geqslant x^\circ$. Далее, выполняя преобразования, аналогичные проведенным в работе [3], можно получить необходимое условие Вейерштрасса

$$H(x_0, x, z, U, \lambda, \mu) - H(x_0, x, z, u, \lambda, \mu) \geqslant 0 \tag{5.1}$$

которое должно выполняться в каждой внутренней точке элементарных областей.

Для доказательства условий Вейерштрасса для граничных управлений рассмотрим решение u, v, z, сообщающее функционалу J минимальное значение. Рассмотрим пересечение цилиндра $B(x^\circ, r_0) \bigcup (0 \leqslant x_0 - x_0{}^\circ \leqslant e)$ с боковой гиперповерхностью S, принадлежащее границе элементарной области w. Выберем в этом пересечении управление V, которое удовлетворяет соотношениям (1.5). Тогда решение уравнения (1.1) будет отличаться от оптимального в области, ограниченной характеристическими гиперповерхностями, проходящими через n —1-мерную поверхность $(B(x^\circ, r_0), x_0 = x_0{}^\circ) \bigcap S$ при $x_0 > x_0{}^\circ$. Далее, выполняя построения, аналогичные проведённым в работе [4], можно получить второе необходимое условие Вейерштрасса

$$h(S, z|_S, V, \nu, \varkappa) - h(S, z|_S, v, \nu, \varkappa) \geqslant 0 \tag{5.2}$$

Здесь и в условии (5.1) u, v — оптимальные управления, а U и V — произвольные управления, удовлетворяющие соотношениям (1.2), (1.5), поэтому говорят о необходимых условиях Вейерштрасса сильного минимума.

Приложение. Рассмотрим дифференциальное уравнение гиперболического типа [7]

$$L(z)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial z}{\partial x_i}=f(x_0,x,u,z) \tag{П.1}$$

Возьмем в пространстве R^{n+1} переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ взаимноортогональное семейство гиперповерхностей

$$y_0=y_0(x_0,x),\ y_1=y_1(x_0,x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x_0,x) \tag{П.2}$$

Введем новые криволинейные координаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Если разрешить уравнения (П.2) относительно $x_0, x_1, \ldots, x_n$, получим

$$x_0=x_0(y_0,y),\ x_1=x_1(y_0,y),\ \ldots,\ x_n=x_n(y_0,y) \tag{П.3}$$

Ортонормированный репер, связанный с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, обозначим через $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, а орты подвижного репера, связанного с координатами $y_0, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$, обозначим через $\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ [8], Тогда получим

$$\mathbf{e}_i'=\frac{1}{K_i}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\mathbf{e}_j,\qquad K_i=\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)^2\right]^{1/2},\qquad i=0,1,\ldots,n \tag{П.4}$$

Матрица α, составленная из элементов $\alpha_{ij}=K_i{}^{-1}\partial x_j/\partial y_i$, где i — номер строки, j — номер столбца, соответствует унитарному оператору, поэтому $\alpha^{-1}=\alpha^T$, где α^T обозначает транспонированную матрицу α. Пользуясь этим важным свойством матрицы α, можно получить формулы (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}=\frac{1}{R_i^2}\frac{\partial y_i}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_j}=\frac{1}{K_i^2}\frac{\partial x_j}{\partial y_i},\qquad R_i=\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2} \tag{П.5}$$

$$R_i=\frac{1}{K_i},\qquad \frac{1}{R_iR_j}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_j}{\partial x_p}=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{R_p^2}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_p}{\partial x_j}=\delta_{ij},\qquad i,j=0,1,\ldots,n \tag{П.6}$$

Дифференциал длины дуги ds в новых координатах будет иметь вид

$$ds^2=\sum_{i=0}^{n}(K_i dy_i)^2=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{dy_i}{R_i}\right)^2 \tag{П.7}$$

В дальнейшем понадобятся еще выражения для производных от ортов $\mathbf{e}_p'$ по переменным y_r. Из выражений для производных

$$\frac{\partial \mathbf{e}_p'}{\partial y_r}\mathbf{e}_q'=0,\quad r\neq p,\quad r\neq q,\quad p\neq q;\ \frac{\partial \mathbf{e}_p'}{\partial y_q}\mathbf{e}_q'+\frac{\partial \mathbf{e}_q'}{\partial y_q}\mathbf{e}_p'=0,\quad p\neq q \tag{П.8}$$

можно получить формулы

$$\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial y_q}{\partial x_i}\frac{\partial y_z}{\partial x_j}=0,\qquad r\neq p,\qquad r\neq q,\qquad p\neq q \tag{П.9}$$

$$\frac{1}{\rho_{pq}}=\frac{1}{K_q}\frac{\partial e_q'}{\partial y_q}e_p'=-\frac{1}{K_pK_q^2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_p\partial y_q}\frac{\partial x_j}{\partial y_q},\qquad p\neq q$$

$$\frac{1}{\rho_{pq}}=-\frac{1}{K_pR_q^2}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial y_q}{\partial x_i}\frac{\partial y_q}{\partial x_j},\qquad p\neq q$$

где через $1/\rho_{pq}$ обозначена кривизна линии, определенной ортом e_q', лежащей на гиперповерхности $y_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\mathrm{const}$ (теорема Дюпена [9]). Аналогично будем обозначать величиной $1 / \rho_{pp}$ значение в последних двух формулах, получающееся при $q = p$.

Перейдем теперь в уравнении (П.1) к новым переменным $y_0, y_1, \ldots, y_n$, причем рассмотрим его на гиперповерхности $y_0 (x_0, x_1, , , , x_n) = \mathrm{const}$. Тогда получим уравнение

$$\text{(П.10)} \qquad L(z) = b_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2} + 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial^2 z}{\partial y_0 \partial y_k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_0^2} \frac{\partial z}{\partial y_k} -$$

$$- \sum_{k,\, l=1}^{n} b_{kl} \frac{\partial^2 z}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\partial z}{\partial y_k} + \sum_{k=0}^{n} d_k \frac{\partial z}{\partial y_k} = f$$

в котором обозначено

$$b_p = \frac{\partial y_0}{\partial x_0} \frac{\partial y_p}{\partial x_0} - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_0}{\partial x_i} \frac{\partial y_p}{\partial x_j}, \qquad b_{kl} = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

$$c_p = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad d_p = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial y_p}{\partial x_i}; \quad k, l = 1, \ldots, n; \quad p = 0, 1, \ldots, n$$

В новых координатах в уравнении (П.10) производные $\partial z / \partial y_0$, $\partial^2 z / \partial y_0^2$ и $\partial^2 z / /\partial y_0 \partial y_i$ вычисляются по нормали, а остальные производные — по касательной к поверхности $y_0 (x_0, x) = \mathrm{const}$. Будем считать функцию z непрерывной вместе со всеми своими производными при переходе через гиперповерхность $y_0 (x_0, x) = \mathrm{const}$. Тогда непрерывными останутся и производные $\partial^2 z / \partial y_0 \partial y_i$ и $\partial^2 z / \partial y_i \partial y_j$. Для $\partial^2 z / \partial y_0^2$ имеем

$$\text{(П.11)} \qquad b_0 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2} \right] = [f], \qquad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^2 z^+}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 z^-}{\partial y_0^2}, \qquad [f] = f^+ - f^-$$

Следовательно, $[\partial^2 z / \partial y_0^2] \neq 0$, если $[f] \neq 0$ и гиперповерхность $y_0 (x_0, x) = \mathrm{const}$ не будет решением дифференциального уравнения

$$\text{(П.12)} \qquad b_0 = \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0} \right)^2 - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_0}{\partial x_i} \frac{\partial y_0}{\partial x_j} = 0$$

т. е. не будет характеристикой уравнения (П.1). Конечный или бесконечный разрыв производной $\partial^2 z / \partial y_0^2$ при непрерывной правой части может быть лишь на характеристике.

Продифференцируем уравнение (П. 10) по y_0 при условии, что $y_0 (x_0, x) = \mathrm{const}$ — характеристика. Тогда получим уравнение

$$\text{(П.13)} \qquad 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} - c_0 + d_0 + \frac{\partial b_0}{\partial y_0} \right) \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2} \right] = \left[\frac{\partial f}{\partial y_0} \right]$$

которое называется уравнением распространения разрывов второго порядка.

Если предположить непрерывность функции z и разрывность производной $\partial z / \partial y_0$ вдоль $y_0 (x_0, x) = \mathrm{const}$, то ясно, что $y (x_0, x) = \mathrm{const}$ — характеристика, а величина $[\partial z / \partial y_0] = \partial z^+ / \partial y_0 - \partial z^- / \partial y_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\text{(П.14)} \qquad 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{\partial z}{\partial y_0} \right] + \left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} - c_0 + d_0 \right) \left[\frac{\partial z}{\partial y_0} \right] = [f]$$

Если же функция z разрывна, то для величины разрыва $[z] = z^+ - z^-$ получим уравнение

$$\text{(П.15)} \qquad 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial y_k} [z] + \left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} - c_0 + d_0 - \frac{\partial b_0}{\partial y_0} \right) [z] = 0$$

Уравнения (П.13), (П.14) показывают, что разрывы $[\partial^2 z / \partial y_0^2]$ и $[\partial z / \partial y_0]$ могут возникнуть как за счет граничных условий, так и за счет разрывов $[\partial f / \partial y_0]$ и $[f]$. Разрывы $[z]$ могут возникнуть только за счет разрывов $[z]$ в граничных или начальных условиях.

Займемся анализом уравнения (П.12). Заметив прежде всего, что размерность его может быть понижена заменой переменных

$$y_0 = x_0 \pm Y(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \pm Y(x) \tag{П.16}$$

При этом уравнение (П.12) примет вид

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial x_j} = 1 \tag{П.17}$$

Из (П.16) следует, что если решать уравнение (П.12) с начальными условиями на n — 1-мерной поверхности C, $y_0 |_C = D$, то можно получить два решения

$$y_0^{(1)} = x_0 + Y(x) = D, \quad y_0^{(2)} = x_0 - Y(x) = D \tag{П.18}$$

Поэтому можно утверждать, что каждая n — 1-мерная поверхность C определяет две характеристики (П.18), которые делят область переменных x_0, x на четыре части.

Следует отметить еще одно важное свойство гиперповерхностей (П.18). Рассмотрим к поверхности C нормаль N_1, лежащую в касательной гиперплоскости к гиперповерхности $y_0^{(1)}$, и N_2, лежащую в касательной гиперплоскости к гиперповерхности $y_0^{(2)}$. Тогда из (П.18) следует

$$\cos(N_1, x_i) = \cos(N_2, -x_i) = \cos[(N_2, x_i) + \pi] = -\cos(N_2, x_i)$$

Поступила 10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А. И.* Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах. ПММ, 1963, т. 28, вып. 4.
2. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Некоторые оптимальные задачи теории продольных колебаний стержней. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа при наличии граничных управлений. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
5. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск. Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962.
7. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
8. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 2. М., «Наука», 1967.