

## ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ВЕТВЯЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДОВ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Ветвящиеся трубопроводы, по которым жидкость или газ поступают в некоторую среду или выводятся из нее, широко распространены в природе и технике (кровеносные системы и системы дыхательных путей, оросительные системы и т. д.). В данной работе на основе простых гипотез подобия, ограниченности объема транспортируемой жидкости и минимума гидравлического сопротивления определяется конфигурация трубопровода и выводятся основные закономерности для длин и площадей сечений труб в зависимости от их порядка (удаленности от источника). Результаты сопоставляются с экспериментальными данными.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим ветвящийся трубопровод, который должен доставлять (или выводить) жидкость или газ в некоторую область  $D_0$  в плоскости или в трехмерном пространстве. Через  $\nu = 2, 3$  обозначим размерность пространства. Трубопровод должен начинаться в некоторой точке (источнике или стоке), а после разветвлений его концы должны достаточно густо и равномерно покрывать заданную область  $D_0$ , обеспечивая доставку транспортируемой жидкости в окрестность любой точки области.

Примем следующие основные гипотезы:

1. Трубопровод построен по иерархическому принципу: каждая труба  $n$ -го порядка разветвляется на две трубы  $(n + 1)$ -го порядка,  $n = 0, 2, \dots, N$ . Таким образом, по терминологии теории графов трубопровод представляет собой дихотомическое дерево.

2. Все  $2^n$  труб  $n$ -го порядка имеют одинаковые длины  $l_n$  и площади поперечного сечения  $s_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

3. Область  $D_n$ , питаемая любой трубой  $n$ -го порядка вместе со всеми ее ответвлениями, делится при ветвлении этой трубы на две равные симметричные области  $D_{n+1}$ , питаемые трубами  $(n + 1)$ -го порядка, которые подобны исходной области  $D_n$ . Точка ветвления лежит в плоскости симметрии области  $D_n$ .

4. Искомый трубопровод обладает следующим свойством оптимальности: его полное гидравлическое сопротивление минимально среди всех трубопроводов, удовлетворяющих гипотезам 1—3 и имеющих заданный полный объем  $\Omega$ .

Отметим, что выполнение гипотезы 3 обеспечивает при достаточно большом  $N$  доставку транспортируемой жидкости в заданную сколь угодно малую окрестность любой точки области  $D_0$ .

Из гипотезы 4 сразу вытекает, что все трубы — прямые. В самом деле, при любом заданном положении точек ветвления именно прямые трубы, соединяющие эти точки, обладают наименьшим гидравлическим сопротивлением при заданном объеме.

Перейдем к определению структуры трубопровода, удовлетворяющего наложенным условиям. Требуется определить конфигурацию трубопровода, формы областей  $D_n$ , питаемых трубами  $n$ -го порядка, длины труб  $l_n$ , их сечения  $s_n$ .

**2. Геометрия областей.** Определим форму областей  $D_n$ , используя гипотезу 3. Покажем, что области  $D_n$  в плоском случае могут быть либо прямоугольниками с отношением сторон

$$(2.1) \quad L_0 : L_1 = \sqrt{2}$$

либо равнобедренными прямоугольными треугольниками. В пространственном случае области  $D_n$ , удовлетворяющие условию 3, — прямоугольные параллелепипеды с отношением ребер

$$(2.2) \quad L_0 : L_1 : L_2 = 2^{2/3} : 2^{1/3} : 1$$

Сначала рассмотрим плоский случай  $\nu = 2$  и предположим, что исходная область  $D_0$  ограничена кусочно-гладкой кривой, состоящей из отрезков прямых и из криво-

линейных дуг. Пусть общая суммарная длина дуг криволинейных участков равна  $a$ . После ветвлений область  $D_0$  будет разделена на  $2^n$  равных областей  $D_n$ , подобных области  $D_0$ . Все линейные размеры области  $D_n$  в  $2^{n/2}$  раз меньше, чем у области  $D_0$ , поэтому суммарная длина криволинейных участков границы одной области  $D_n$  составит  $2^{-n/2}a$ , а их сумма для всех  $2^n$  областей  $D_n$  равна  $2^{n/2}a$ . С другой стороны, при ветвлении каждая область делится пополам осью ее симметрии, поэтому новых криволинейных участков при этом не добавляется. Следовательно, суммарная длина всех криволинейных участков границ областей  $D_n$  равна  $a$  и в то же время равна  $2^{n/2}a$ . Отсюда вытекает, что  $a = 0$ , и все области  $D_n$  — многоугольники,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Аналогично доказывается, что в пространственном случае все области  $D_n$  — многогранники.

Найдем возможные формы многоугольников  $D_0$  (или  $D_n$ ) в плоском случае. Многоугольник  $D_0$  должен иметь ось симметрии, которая делит его на два равных многоугольника  $D_1$ , подобных  $D_0$ . Отсюда вытекает, в частности, что  $D_0, D_1$  — односвязные многоугольники. Пусть  $k$  — число сторон многоугольника  $D_0$  и пусть его ось симметрии пересекает  $k_1$  из этих сторон. В силу односвязности,  $k_1 \leq 2$ . Общее число сторон двух многоугольников  $D_1$  равно  $2k$ . С другой стороны, это число равно  $k + k_1 + 2$ , так как при делении каждая из  $k_1$  сторон делится на две и, кроме того, добавляется по одной стороне в каждом многоугольнике  $D_1$  за счет оси симметрии. Из равенства  $2k = k + k_1 + 2$  и неравенства  $k_1 \leq 2$  вытекает, что  $k \leq 4$ , т. е.  $D_0$  — четырехугольник или треугольник.

В случае, когда  $D_0$  — четырехугольник, ось симметрии должна делить его на два четырехугольника. Поэтому ось симметрии пересекает две противоположные стороны четырехугольника и в силу симметрии перпендикулярна этим сторонам. Следовательно, эти стороны параллельны и область  $D_0$  — трапеция. В силу симметрии трапеция должна быть равнобедренной. Области  $D_1$ , на которые она делится осью симметрии, будут прямоугольными трапециями, и они подобны исходной области  $D_0$ . Отсюда следует, что  $D_0$  — равнобедренная прямоугольная трапеция, т. е. прямоугольник. Обозначим через  $L_0$  большую, через  $L_1$  — меньшую сторону прямоугольника  $D_0$ . Для того чтобы при делении пополам полученный прямоугольник со сторонами  $L_1$  и  $L_0/2$  был подобен исходному, необходимо, чтобы выполнялось соотношение (2.1).

В случае, когда  $D_0$  — треугольник, он должен иметь ось симметрии, т. е. быть равнобедренным. После его деления получатся прямоугольные треугольники и, следовательно, исходный треугольник в силу подобия должен также быть прямоугольным.

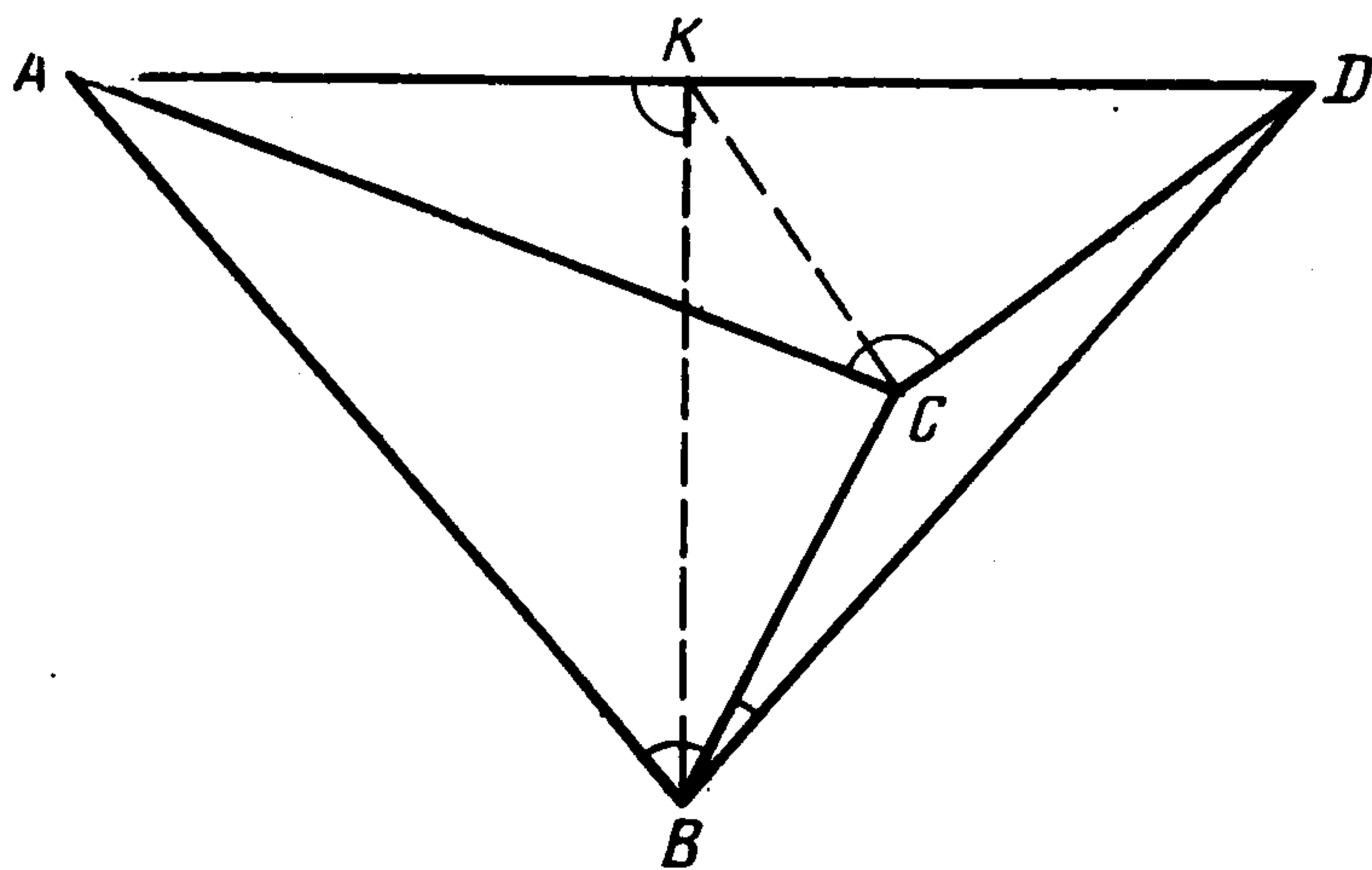
Таким образом, область  $D_0$  и все области  $D_n$  в плоском случае могут быть либо прямоугольниками с отношением сторон (2.1), либо равнобедренными прямоугольными треугольниками.

Перейдем к рассмотрению пространственного случая. Пусть  $D_0$  — многогранник с  $k$  гранями, и плоскость симметрии пересекает  $k_1$  из них. Рассуждая аналогично плоскому случаю, приходим к равенству  $k = k_1 + 2$ . Следовательно, лишь две грани многогранника  $D_0$  не пересекаются осью симметрии. Эти грани симметричны одна другой относительно плоскости симметрии; назовем их «основаниями». Остальные  $k_1$  граней перпендикулярны плоскости симметрии, назовем их «боковыми». Следовательно, многогранник  $D_0$  представляет собой результат усечения  $k_1$ -гранной призмы двумя симметричными основаниями. Боковые грани симметричны относительно плоскости симметрии области  $D_0$  и могут быть либо равнобедренными трапециями, либо равнобедренными треугольниками. Основания являются многоугольниками с  $j$  сторонами, где  $j = k_1$ , если основание не имеет общих точек с плоскостью симметрии или имеет одну вершину в плоскости симметрии, и  $j = k_1 + 1$ , если одна сторона основания лежит в плоскости симметрии. При делении пополам область  $D_0$  разделится на два многогранника, причем в плоскости симметрии образуются грани с  $j$  сторонами. В силу подобия полученных многогранников исходному, все их соответствующие линейные размеры должны быть меньше в  $2^{1/2}$  раза, а площади подобных граней в  $2^{3/2}$  раза.

Возможны три взаимно исключаемых случая:

- а) все боковые грани — треугольники и  $j = 3$ .
- б) все боковые грани — трапеции и  $j = 4$ ;
- в) среди боковых граней есть хотя бы одна (треугольник или трапеция), число сторон которой не равно числу сторон оснований  $j$ .

В случае в) суммарная площадь всех тех граней, число сторон которых не равно  $j$ , уменьшается вдвое при делении многогранника  $D_0$  пополам. Поэтому условие подобия для площадей здесь не выполняется.



Фиг. 1

В случае а) область  $D_0$  — треугольная пирамида  $ABCD$ , имеющая плоскость симметрии  $BCK$  (см. фиг. 1). Углы  $AKC$  и  $AKB$  — прямые, так как плоскость симметрии перпендикулярна ребру  $AD$ . Таким образом, к вершине  $K$  пирамиды  $ABCK$  прилегают два прямых угла. Так как пирамида  $ABCK$  подобна исходной пирамиде  $ABCD$ , то в последней к одной из вершин также должны прилежать два прямых угла. В силу симметрии треугольники  $ACD$  и  $ABD$  — равнобедренные и их углы  $CAD, ADC, BAD, ADB$  — острые. Поэтому в пирамиде  $ABCD$  два прямых угла могут прилежать лишь к вершинам  $B$  или  $C$ . Пусть, для определенности, к вершине  $B$  прилегают два прямых угла. В силу симметрии, это должны быть углы  $ABC$  и  $DBC$ . Таким образом, в пирамиде  $ABCK$  грань  $ABC$ , не прилегающая к вершине  $K$ , есть прямоугольный треугольник. Аналогом вершины  $K$ , к которой в пирамиде  $ABCK$  прилегают два прямых угла, в исходной пирамиде  $ABCD$  является вершина  $B$ . Поэтому грань  $ACD$ , не прилегающая к ней, также должна быть прямоугольным треугольником.

Итак, треугольники  $ACD$  и  $ABC$  — равнобедренные и прямоугольные, причем грань  $ABC$  в пирамиде  $ABCK$  — аналог грани  $ACD$  в исходной пирамиде  $ABCD$  (обе эти грани противолежат соответственным вершинам  $K, B$  этих пирамид). Следовательно, линейные размеры этих треугольников должны различаться в  $2^{1/3}$  раза. Однако катет  $AC$  треугольника  $ACD$  есть гипотенуза треугольника  $ABC$ , поэтому их линейные размеры различаются в  $2^{1/2}$  раза. Полученное противоречие исключает случай а).

В оставшемся случае б) многогранник  $D_0$  имеет всего шесть четырехугольных граней, в том числе четыре боковых грани и два основания. Плоскость симметрии перпендикулярна четырем боковым граням, поэтому, после деления многогранник будет иметь грань, перпендикулярную четырем соседним. В исходном многограннике, следовательно, также должна быть грань, перпендикулярная всем четырем соседним с ней граням. Является ли эта грань боковой или основанием — в обоих случаях получим, что основание перпендикулярно боковым граням. Следовательно,  $D_0$  — прямая призма с четырехугольным основанием. Если основание — не прямоугольник, то при делении пополам суммарная площадь всех прямоугольных (боковых) граней уменьшается вдвое, что противоречит условию подобия о сокращении площадей в  $2^{2/3}$  раза при делении. Следовательно, все грани  $D_0$  — прямоугольники и  $D_0$  — прямоугольный параллелепипед.

Пусть  $L_0, L_1, L_2$  — его ребра, причем  $L_0 \geq L_1 \geq L_2$ . При делении пополам плоскость симметрии, перпендикулярная наибольшему ребру, должна делить параллелепипед  $D_0$  на два параллелепипеда, подобных исходному. Поэтому имеем

$$L_0 : L_1 : L_2 = L_1 : L_2 : (L_0 / 2)$$

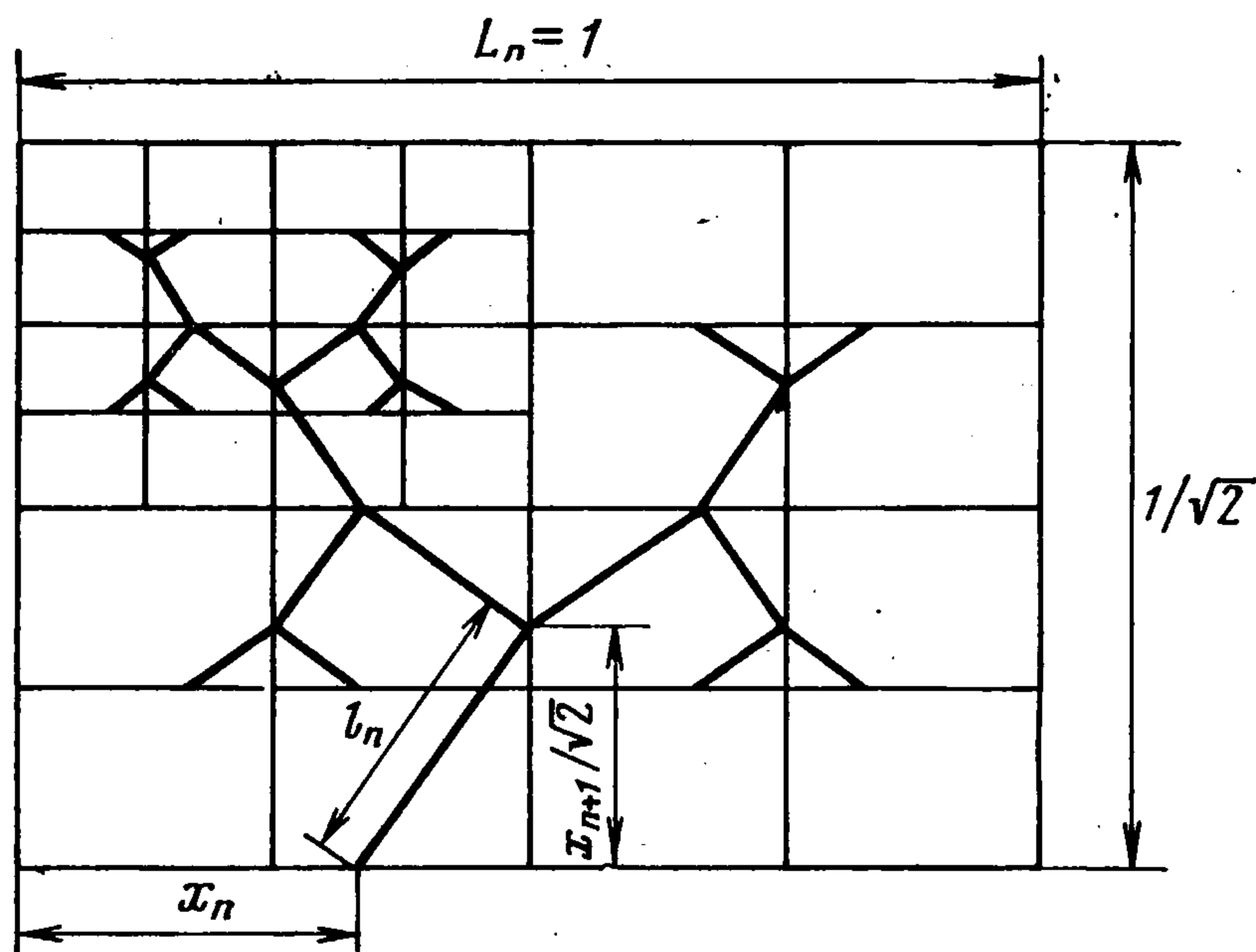
Из этой пропорции следует соотношение (2.2). Таким образом, в пространственном случае единственной формой области, удовлетворяющей гипотезе 3, является прямоугольный параллелепипед с отношением ребер (2.2).

3. Длины труб. Получим выражение для длин  $l_n$  труб  $n$ -го порядка. Пусть  $L_n$  — характерный линейный размер области  $D_n$ , равный наибольшей стороне — в случае прямоугольных областей с отношением сторон (2.1); катету — в случае областей в форме прямоугольных равнобедренных треугольников; наибольшему ребру — в случае параллелепипедов с отношением сторон (2.2). Так как при каждом делении все линейные размеры уменьшаются в  $2^{1/\nu}$  раз, то

$$(3.1) \quad l_n = L_n \varphi_n, \quad L_n = 2^{-n/\nu} L_0; \quad \nu = 2, 3; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Безразмерная величина  $\varphi_n$  зависит от размерности пространства  $\nu$ , от формы области и от положения точек ветвления, лежащих в соответствующих плоскостях симметрии.

Для области  $D_n$  в форме прямоугольника с отношением сторон (2.1) обозначим через  $x_n$  отношение, в котором начало трубы  $n$ -го порядка делит наибольшую сторону



Фиг. 2

$L_n$  прямоугольника  $D_n$ . Элементарное геометрическое рассмотрение (см. фиг. 2, где  $L_n = 1$ ) дает

$$(3.2) \quad \varphi_n = \varphi(x_n, x_{n+1}) = [(x_n - 1/2)^2 + x_{n+1}^2 / 2]^{1/2} \\ 0 \leq x_n \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Для области  $D_n$  в форме равнобедренного прямоугольного треугольника обозначим через  $x_n$  отношение, в котором начало трубы  $n$ -го порядка делит катет этого треугольника. Величину  $x_n$  отсчитываем от прямого угла этого треугольника (см. фиг. 3, где  $L_n = 1$ ). Тогда имеем

$$(3.3) \quad \varphi_n = \varphi(x_n, x_{n+1}) = \{[x_n - (1 - x_{n+1}) / 2]^2 + [(1 - x_{n+1}) / 2]^2\}^{1/2}$$

В пространственном случае параллелепипеда с отношением сторон (2.2) примем для простоты  $L_n = 1$ . Расположим декартову систему координат так, чтобы она совпадала с осями параллелепипеда и чтобы параллелепипед занимал в ней положение в первом октанте

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2^{-1/3}, \quad 0 \leq z \leq 2^{-2/3}$$

Пусть начало трубы  $n$ -го порядка лежит в плоскости  $z = 0$  и имеет координаты, отнесенные к размеру  $L_n$ , равные  $x_n, y_n$ . Конец этой трубы, в которой она разветвляется на трубы  $(n + 1)$ -го порядка, лежит в плоскости симметрии  $x = 1/2$  параллелепипеда  $D_n$  и имеет координаты  $1/2, x_{n+1} 2^{-1/3}, y_{n+1} 2^{-1/3}$ . Здесь учтено, что  $L_n = 1, L_{n+1} = 2^{-1/3}$ . Отсюда получим выражение для  $\varphi_n$  в соотношении (3.1) в виде

$$(3.4) \quad \varphi_n = \varphi(x_n, y_n; x_{n+1}, y_{n+1}) = [(x_n - 1/2)^2 + (y_n - x_{n+1} 2^{-1/3})^2 + \\ + y_{n+1}^2 2^{-2/3}]^{1/2}, \quad 0 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq y_n \leq 2^{-1/3}, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Если принять, что не только области  $D_n$  подобны одна другой при различных  $n$ , но и точки ветвления занимают подобные положения относительно соответствующих

областей, то в формулах (3.2), (3.3) нужно положить

$$(3.5) \quad x_n = x^*, \quad \varphi_n = \varphi(x^*, x^*) = \varphi^*$$

а в соотношении (3.4) будем иметь

$$(3.6) \quad x_n = x^*, \quad y_n = y^*, \quad \varphi_n = \varphi(x^*, x^*; y^*, y^*) = \varphi^*$$

Здесь  $x^*, y^*$  — некоторые постоянные. Такие трубопроводы назовем правильными.

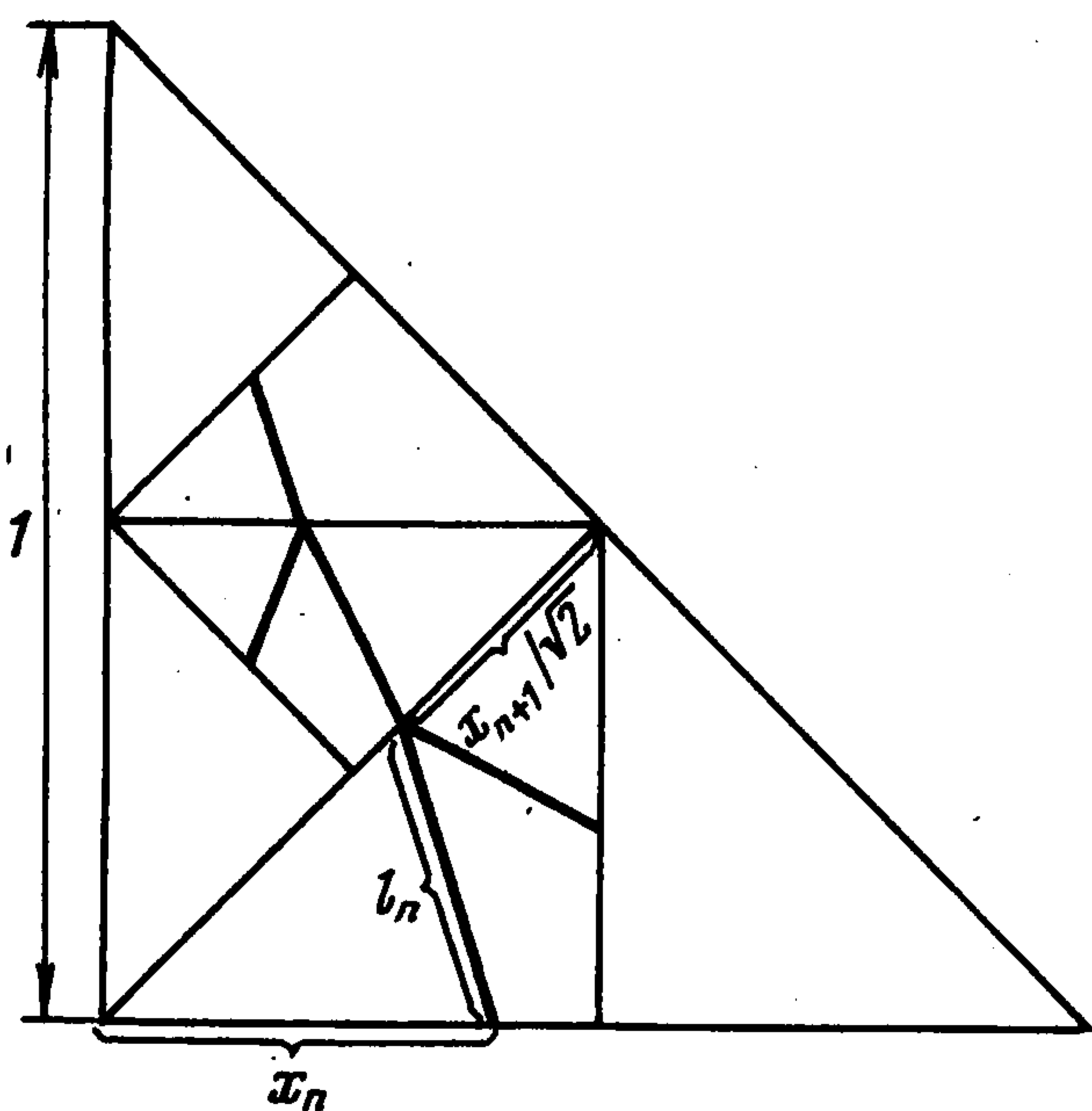
Представляют интерес значения  $x^*, y^*$  для правильных трубопроводов, при которых величина  $\varphi^*$  из (3.5) или (3.6) достигает минимума. Эти значения отвечают оп-

тимальной правильной конфигурации трубопровода, при которой длина всех труб минимальна. Для отыскания такой конфигурации в случае прямоугольных областей подставим  $x_n = x_{n+1} = x^*$  в выражение (3.2) и найдем его минимум по  $x^*$ . В результате получим

$$(3.7) \quad x^* = 1/3, \quad \varphi^* = 12^{-1/2} \approx 0.2887$$

Аналогичные вычисления для треугольных областей при помощи соотношения (3.3) дают

$$(3.8) \quad x^* = 0.4, \quad \varphi^* = 10^{-1/2} \approx 0.3162;$$



Фиг. 3

Для пространственных областей в форме параллелепипедов, отыскивая минимум выражения (3.4) по переменным  $x_n = x_{n+1} = x^*$  и  $y_n = y_{n+1} = y^*$ , получим следующие соотношения:

$$(3.9) \quad x^* = 2^{-1/3} (2^{4/3} - 1) 3^{-1} \approx 0.4002$$

$$y^* = (2^{2/3} - 1) 3^{-1} \approx 0.1958$$

$$\varphi^* = (2^{2/3} - 1)^{1/2} 2^{-1} 3^{-1/2} \approx 0.2212$$

Сопоставим оптимальные правильные трубопроводы, отвечающие прямоугольным и треугольным плоским областям, с точки зрения длины труб на единицу площади. В силу подобия достаточно сравнить длины  $l_n$  труб  $n$ -го порядка для областей  $D_n$  одной и той же площади  $\sigma$ . Для прямоугольной области  $D_n$  с отношением сторон (2.1) и с наибольшей стороной  $L_n$  и для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом  $L_n$  имеем соответственно

$$(3.10) \quad L_n^2 2^{-1/2} = \sigma, \quad L_n^2 / 2 = \sigma$$

Выразим из формул (3.10)  $L_n$  через  $\sigma$  и подставим полученные соотношения, а также равенства (3.7), (3.8) для  $\varphi^*$  в выражения (3.1) для  $l_n$ . Получим

$$(3.11) \quad l_n = \sigma^{1/2} 2^{-3/4} 3^{-1/2} \approx 0.3423 \sigma^{1/2}$$

$$l_n = \sigma^{1/2} 5^{-1/2} \approx 0.4472 \sigma^{1/2}$$

для прямоугольников и треугольников соответственно. Согласно (3.11) оптимальный правильный трубопровод, соответствующий прямоугольным областям, отвечает меньшей длине труб на единицу площади, чем аналогичный трубопровод для треугольных областей.

4. Минимизация сопротивления. Объем всего трубопровода равен с учетом формулы (3.1)

$$(4.1) \quad \Omega = \sum_{n=0}^N 2^n l_n s_n = L_0 \sum_{n=0}^N 2^{-n-n/\nu} \varphi_n s_n$$

Пусть  $p_n$  — давление в начале трубы  $n$ -го порядка,  $Q$  — полный расход жидкости. Предположим, что перепад давления в одной трубе описывается законом Пуазейля для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости [1]

$$(4.2) \quad p_n - p_{n+1} = c\mu q_n l_n s_n^{-r}, \quad q_n = 2^{-n}Q$$

Здесь  $\mu$  — вязкость жидкости,  $q_n$  — расход жидкости через одну трубу  $n$ -го порядка, коэффициент  $c$  зависит от формы поперечного сечения. Для труб с подобными сечениями (например круглых) коэффициент  $r$  равен двум. Для каналов или труб прямоугольного сечения с различной шириной и с постоянной глубиной имеем  $r = 3$ . Отношение суммарного перепада давления  $p_0 - p_{N+1}$  к расходу  $Q$  через трубопровод согласно (4.2) и (3.1) равно, с точностью до постоянного множителя

$$(4.3) \quad R = \sum_{n=0}^N 2^{-n} l_n s_n^{-r} = L_0 \sum_{n=0}^N 2^{-n-n/\nu} \varphi_n s_n^{-r}$$

Рассмотрим сначала предельный случай  $N \rightarrow \infty$ . Предположим, что  $\varphi_n$  ограничены (например, равны постоянной  $\varphi^*$ ). Для сходимости рядов (4.1), (4.3) необходимо, чтобы  $n$ -е члены рядов стремились к нулю. Отсюда получаем условия

$$(4.4) \quad s_n = \alpha_n 2^{(1/\nu-1)n} = \beta_n^{-1} 2^{-(1/\nu+1)n/r}, \quad \alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

где  $\alpha_n, \beta_n$  — бесконечно малые. Условия (4.4) непротиворечивы, если выполнено неравенство

$$(4.5) \quad r < (\nu + 1) / (\nu - 1)$$

Для трубопровода, состоящего из каналов постоянной глубины и различной ширины ( $r = 3$ ), питающего плоскую область ( $\nu = 2$ ), а также для трубопровода из круглых труб ( $r = 2$ ) в пространственном случае ( $\nu = 3$ ) неравенство (4.5) не выполняется; в нем имеет место знак равенства. Следовательно, для таких трубопроводов гидравлическое сопротивление  $R$  при конечном объеме  $\Omega$  и  $N \rightarrow \infty$  неограничено. При  $\nu = 3, r = 3$  неравенство (4.5) также нарушается, и только для круглых труб (или вообще труб с подобными сечениями), питающих плоскую область ( $r = \nu = 2$ ), условие (4.5) удовлетворяется. Лишь в этом случае возможен бесконечно ветвящийся трубопровод ограниченного объема и конечного гидравлического сопротивления. Если положить

$$(4.6) \quad s_n = s_0 2^{-\gamma n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad 1/2 < \gamma < 3/4, \quad r = \nu = 2$$

то оба ряда (4.1), (4.3) будут сходиться.

В случае конечного  $N$  найдем сечения  $s_n$  из гипотезы 4 о том, что гидравлическое сопротивление  $R$  минимально по  $s_n$  при выполнении ограничения на объем (4.1). Применяя метод множителей Лагранжа и вычисляя минимум  $R$  по  $s_n$  при условии (4.1), получим

$$(4.7) \quad s_n = s_0 2^{-2n/(r+1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отметим, что соотношения (4.7) не зависят от значений  $\varphi_n$ . Подставляя найденные выражения (4.7) в суммы (4.1), (4.3), найдем

$$(4.8) \quad \Omega = L_0 s_0 F, \quad F = \sum_{n=0}^N 2^{\delta n} \varphi_n, \quad \delta = \frac{r-1}{r+1} - \frac{1}{\nu}$$

$$s_0 = \Omega (L_0 F)^{-1}, \quad R = L_0 s_0^{-r} F = L_0^{r+1} \Omega^{-r} F^{r+1}$$

Соотношения (4.7), (4.8) при выбранных  $\varphi_n$  определяют площади сечений  $s_n$ , включая  $s_0$ , и гидравлическое сопротивление трубопровода  $R$ . Подставляя выражения (3.2), (3.3) для  $\varphi_n$  в соотношение (4.8) для  $F$ , получим для плоского случая

$$(4.9) \quad F = \sum_{n=0}^N 2^{\delta n} \varphi(x_n, x_{n+1})$$

Можно формулировать и решать различные задачи о минимизации суммы (4.9) для  $F$  по  $x_n$  при тех или иных ограничениях на положение точек ветвления  $x_n$ . Наиболее общее ограничение имеет вид  $0 \leq x_n \leq 1$ , где  $n = 0, 1, \dots, N$ . Минимум  $F$  из (4.9) соответствует согласно (4.8) минимуму гидравлического сопротивления  $R$ . Аналогично, используя формулу (3.4) для  $\varphi_n$ , можно рассматривать пространственный случай.

Остановимся на правильных трубопроводах, для которых выполняются соотношения (3.5), (3.6). Подставляя (3.5), (3.6) в равенства (4.8), получим простые формулы

$$(4.10) \quad F = \varphi^* [2^{(N+1)\delta} - 1] (2^\delta - 1)^{-1}, \quad \delta \neq 0$$

$$F = (N + 1) \varphi^*, \quad \delta = 0 \quad (\nu = 3, r = 2; \quad \nu = 2, r = 3)$$

Вторая формула (4.10) справедлива для труб в пространственном случае и для каналов в плоском случае.

Для оптимального правильного трубопровода величины  $\varphi^*$  определены равенствами (3.7) — (3.9) для соответствующих конфигураций. Таким образом, в этом случае все параметры трубопровода заданы соотношениями (3.1), (3.5) — (3.9), (4.7), (4.8), (4.10). Для прямоугольных областей такой трубопровод показан на фиг. 2. Здесь источник лежит на большей стороне прямоугольника и делит ее в отношении 1 : 3. Если на фиг. 2 опустить трубу  $l_n$  и в качестве источника рассматривать точку ветвления этой трубы, то получим оптимальный правильный трубопровод с источником на оси симметрии. Точка расположения источника и все точки ветвления делят соответствующие стороны прямоугольников в отношении 1 : 3. Отметим, что, отказавшись от условий (3.5), (3.6), т. е. от предположения о правильности, можно за счет минимизации суммы (4.9) получить меньшее гидравлическое сопротивление, чем у оптимального правильного трубопровода.

**5. Обобщение и сравнение с экспериментом.** Рассмотренные выше трубопроводы обладают свойством подобия областей (гипотеза 3), а правильные трубопроводы — еще и подобием расположения ветвей трубопровода относительно этих областей. Данные свойства, как показано в п. 2, могут строго выполняться лишь для некоторых частных форм областей. Для областей иной формы такое построение невозможно. Однако найденные конфигурации, по-видимому, имеют некоторый асимптотический смысл для областей произвольной формы. Если после многих ветвлений зависимость конфигурации трубопровода от формы исходной области нивелируется, а это предположение представляется естественным, то конфигурация будет приближаться к найденным выше.

Ограничение (4.1) на объем трубопровода  $\Omega$  можно заменить ограничением на суммарное количество материала или на стоимость трубопровода. Если предположить, что толщина стенок труб пропорциональна площади их сечения, то ограничение на количество материала будет иметь тот же вид (4.1)

В естественных системах обычно не выполняется строгая иерархия ветвей, и поэтому ветви разных порядков условно объединяют в один по некоторому принципу. Это сводится к тому, что в каждом порядке труба делится не на две, а на  $m$  ветвей, где  $m$  — вообще говоря, дробное число. Подобия областей в этом случае не будет, однако можно получить аналогичные соотношения для длин и сечений, справедливые в среднем. Так как при ветвлении труб соответствующие области уменьшаются в среднем в  $m$  раз, то для длин труб получим аналогично (3.1)

$$(5.1) \quad l_n = l_0 m^{-n/\nu}, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Формулы для объема  $\Omega$  и гидравлического сопротивления  $R$  примут вид, подобный формулам (4.1), (4.3)

$$(5.2) \quad \Omega = l_0 \sum_{n=0}^N m^{-n-n/\nu} s_n, \quad R = l_0 \sum_{n=0}^N m^{-n-n\nu} s_n^{-r}$$

Условие минимума  $R$  по  $s_n$  при фиксированном объеме из (5.2) дает соотношения, аналогичные (4.7) — (4.9)

$$(5.3) \quad s_n = s_0 m^{-2n/(r+1)}, \quad s_0 = \Omega l_0^{-1} F_1^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$R = l_0 s_0^{-r} F_1 = l_0^{r+1} \Omega^{-r} F_1^{r+1}$$

$$F_1 = \sum_{n=0}^N m^{\delta n} = [m^{\delta(N+1)} - 1] / (m^{\delta} - 1), \quad \delta \neq 0$$

$$F_1 = N + 1, \quad \delta = 0$$

Здесь  $\delta$  определено формулой (4.8).

Сравним полученные соотношения с экспериментальными данными по ветвлению (артерий в легких человека, приведенными в статье [2]). В результате обработки большого числа наблюдений получено [2], что для рассмотренных артерий

$$(5.4) \quad m = 3.096, \quad \lg l_n = -0.172 n + \text{const}$$

$$\lg d_n = -0.2015 n + \text{const}$$

Здесь использованы принятые выше обозначения,  $d_n$  — диаметр артерии. Подставляя в формулы (5.1), (5.3)  $m$  из (5.4), а также  $v = 3$ ,  $r = 2$ , получим

$$(5.5) \quad \lg l_n = -(n/3) \lg m + \text{const} = -0.1636 n + \text{const}$$

$$\lg d_n = (1/2) \lg s_n + \text{const} = -(n/3) \lg m + \text{const} = -0.1636 n + \text{const}$$

Различие в коэффициентах формул (5.4), (5.5) составляет 5% для длин и 23% для диаметров сосудов.

Отметим, что геометрия ветвящихся трубопроводов при условии равенства углов между каждой трубой и обеими ее ответвлениями рассматривалась в работе [3] и в недавно опубликованной работе [4]. Заметим, что при указанном условии не выполняется требование подобия областей, питаемых трубами различных порядков, которое наложено в данной работе.

Автор благодарит В. М. Ентова за внимание к работе, а В. М. Хаютина и А. М. Мелькумянца за ценное обсуждение физиологических аспектов.

Поступила 16 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кубель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. М., Физматгиз, 1963.
2. Singhal S., Henderson R., Horsfield K., Harding K., Cumming G. Morphometry of the human pulmonary arterial tree. *Circulation Res.*, 1973, vol. 33, No. 2, p. 190—197.
3. Horsfield K., Cumming G. Angles of branching and diameters of branches in the  $n \rightarrow h$  human Bronchial Tree. *Bull. Math. Biophys.*, 1967, vol. 20, p. 245—259.
4. Warner W. H., Wilson T. A., Distribution of end-points of a branching network with decaying branch length. *Bull. Math. Biol.*, 1976, vol. 38, No. 3, p. 219—237.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 25/I-1977 г. Т-03797 Подписано к печати 24/III-1977 г. Тираж 2880 экз.  
Зак. 1792 Формат бумаги 70×108<sup>1/16</sup> Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10