

Выбрав в случае надобности соответствующую подпоследовательность, можно считать, что $\|\psi_k - \psi\| \rightarrow 0$ по норме $C^{2+\alpha/2}(\bar{\Omega}_\delta')$ и что $\psi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_\delta')$; в частности, для любого $x \in \Omega_\delta'$

$$\Delta\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\psi_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\omega, \psi_k(x), \varepsilon_k) = \begin{cases} 0, & \psi_k > 0 \\ \omega, & \psi_k < 0 \end{cases}$$

Так как множествами Ω_δ' можно исчерпать все $\Omega \setminus \{x \in \Omega : \psi(x) = 0\}$, то теорема 2 доказана.

Замечания. 1°. При достаточно больших ω множество $\{x \in \Omega : \psi(x) < 0\}$ не пусто для любого решения ψ задачи P . В противном случае при любом $\omega > 0$ решение ψ было бы гармонической функцией, принимающей на границе $\partial\Omega$ заданные значения φ , т. е. не зависело бы от ω . Но тогда для произвольной функции $\psi_0 \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \{\varphi + W_2^1(\Omega)\}$, такой, что $\psi_0 < 0$ где-либо в Ω , найдется настолько большое число ω , что будет верно неравенство $I(\psi_0) < I(\psi)$.

2°. Теоремы 1 и 2 непосредственно обобщаются на функционалы с достаточно гладкими функциями $\omega = \omega(x)$.

Автор благодарен Б. В. Шабату за обсуждение результатов.

Поступила 8 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, Vol. 1, pt 2, p. 177—190.
2. Batchelor G. K. A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. J. Fluid. Mech., 1956, vol. 1, pt 4.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. Вайнштейн И. И., Гольдштик М. А. О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 6.
5. Шабат А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи. ПМТФ, 1962, № 4.
6. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6.
7. Садовский В. С. Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
8. Садовский В. С. О некоторых свойствах потенциального и вихревого течений, граничащих на замкнутой жидкой линии тока. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 1.
9. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
10. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
11. Morrey C. V. Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin, Springer-Verlag, 1966.
12. Тимов О. В. Минимальные гиперповерхности под мягкими препятствиями. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38, № 2.
13. Stampacchia G. On some regular multiple integral problems in the calculus of variations. Commun. Pure and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 4, p. 383—421.

УДК 539.3 : 534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В. Б. Мещеряков

(Москва)

Приводятся дисперсионные уравнения фазовых и групповых скоростей изгибно-крутильных волн в тонкостенных стержнях открытого профиля с учетом деформаций сдвига. Показано, что в общем случае существуют шесть форм распространения

изгибно-крутильных волн. Рассмотрен числовой пример стержня швеллерного сечения. Обсуждаются граничные частоты, разделяющие весь частотный диапазон на участки с различным числом возможных форм распространения волн.

Ранее [1] была получена система уравнений для описания изгибно-крутильных колебаний тонкостенных стержней открытого профиля, а в работе [2] — для стержней типа двутавр и швеллер. Однако в [1] не учтены деформации сдвига при изгибном кручении. Методика вывода уравнений в [2] приближенная и приводит к нарушению симметрии в матрице геометрических характеристик (матрице S).

С помощью анализа, проведенного в [3], была построена [4, 5] общая теория равновесия и движения тонкостенных стержней открытого профиля с учетом деформаций сдвига. При отсутствии внешних нагрузок уравнения изгибно-крутильного движения могут быть записаны в матричной форме [5]

$$(1) \quad B\Phi^{IV} - B_1\Phi'' - \frac{\rho}{E} B\Phi'''' + \rho F A \Phi'' + \frac{E}{G} \rho F A S \left(\Phi'''' - \frac{\rho}{E} \Phi'''' \right) = 0$$

$$B = \text{diag} (EI_x, EI_y, EI_\omega), \quad B_1 = \text{diag} (0, 0, GI_d)$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ -a_x & a_y & r^2 \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} S_{yy}/I_x & S_{yx}/I_x & S_{y\omega}/I_x \\ S_{xy}/I_y & S_{xx}/I_y & S_{x\omega}/I_y \\ S_{\omega y}/I_\omega & S_{\omega x}/I_\omega & S_{\omega\omega}/I_\omega \end{vmatrix}$$

Здесь E, G — модули упругости, ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения, B, B_1 — матрицы жесткостей, I_x, I_y — моменты инерции относительно главных осей, I_ω — главный секториальный момент инерции, I_d — момент инерции при кручении, Φ — вектор обобщенных перемещений, компонентами которого являются углы поворота поперечных сечений относительно главных осей (Φ_x, Φ_y) и деформация сечений Φ_ω , A и S — матрицы геометрических характеристик, причем a_x, a_y — координаты главного секториального полюса в сечении, r — полярный радиус инерции сечения, S_{ij} — геометрические характеристики, с помощью которых учитывается влияние деформаций сдвига [3, 4]. Штрихами в уравнении (1) обозначено дифференцирование по продольной координате z , точками — по времени t .

Отметим, что в работе [1] матрица S не содержит элементов $S_{\omega\omega}, S_{\omega x}, S_{\omega y}$. В работе [2] нарушено условие симметрии $S_{\omega x} = S_{x\omega}$ и $S_{\omega y} = S_{y\omega}$.

Перемещения оси стержня ξ_x, ξ_y и углы поворота сечений вокруг этой оси ξ_ω образуют вектор ξ , который связан с вектором Φ следующим матричным уравнением:

$$(2) \quad \xi' = -\Phi - \frac{E}{G} S \left(\Phi'' - \frac{\rho}{E} \Phi'' \right)$$

Если не учитывать деформации сдвига, из системы (1) и (2) вытекают уравнения, соответствующие теории В. З. Власова [6].

Обратимся к вопросу о скоростях распространения изгибно-крутильных волн в тонкостенном стержне. Будем искать решения системы (1) в виде

$$(3) \quad \Phi(z, t) = \| A_j \exp \{ i [(vz + \psi t) + \alpha_j] \} \|, \quad j = x, y, \omega$$

где A_j, α_j — постоянные, v — волновое число, ψ — частота волны. Подставляя (3) в (1), приходим к системе алгебраических уравнений для A_j . Для получения нетривиального решения приравняем нулю определитель. Получаем уравнение, связывающее волновое число и частоту

$$(4) \quad \det \left[Bv^4 + B_1v^2 - \rho F A \psi^2 - \frac{\rho}{E} Bv^2\psi^2 + \frac{E}{G} \rho F A S \left(v^2\psi^2 - \frac{\rho}{E} \psi^4 \right) \right] = 0$$

Фазовые скорости волн c и групповые скорости c_g определяются из соотношений

$$(5) \quad c = \psi / v, \quad c_g = d\psi / dv$$

Уравнение (4), имеющее двенадцатый порядок, и соотношения (5) позволяют получить шесть неотрицательных значений фазовых и групповых скоростей волн в зави-

симости от волнового числа (или от частоты). В общем случае произвольного открытого сечения в стержне имеют место шесть форм распространения изгибно-крутильных волн.

Уравнение (4) может быть представлено в таком виде:

$$(6) \quad \det \left[\left(BK - \frac{EF}{\psi^2} c_2^2 A \right) c^4 - \left(Bc_2^2 + BKc_1^2 - \frac{c_1^2 c_2^2}{\psi^2} B_1 \right) c^2 + Bc_1^2 c_2^2 \right] = 0$$

$$c_1 = \sqrt{E/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{G/\rho}, \quad K = -EFB^{-1}AS$$

Рассмотрим случай, когда главный секториальный полюс совпадает с центром тяжести сечения. Это происходит, например, при наличии у стержня двух плоскостей симметрии. При этом все матрицы, входящие в уравнение (6), становятся диагональными, и оно разделяется на три независимых уравнения. Рассмотрим одно из них, относящееся к крутильным волнам

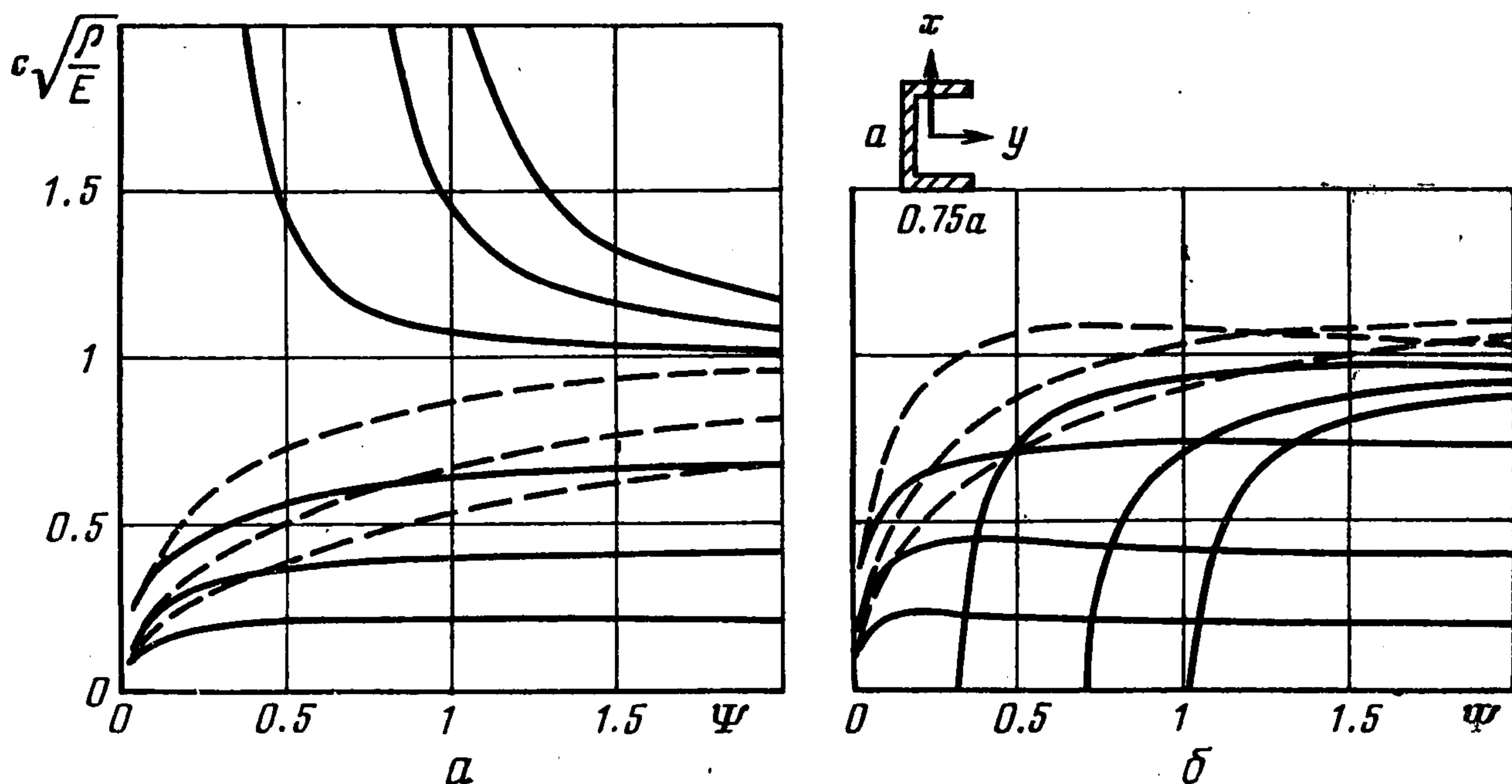
$$(7) \quad c^4 \left(k_{\omega\omega} \frac{E}{G} - \frac{EFr^2}{\rho I_{\omega} \psi^2} \right) - c^2 \left(1 + k_{\omega\omega} \frac{E}{G} - \frac{GI_d}{\rho I_{\omega} \psi^2} \right) c_1^2 + c_1^4 = 0$$

Здесь $k_{\omega\omega}$ — коэффициент формы сечения при изгибном кручении.

Полагая коэффициент при c^4 равным нулю, получаем граничное значение частоты

$$(8) \quad \psi_{*\omega} = \sqrt{\frac{GFr^2}{\rho I_{\omega} k_{\omega\omega}}} = \frac{c_2}{R_{\omega}}, \quad R_{\omega} = \sqrt{\frac{I_{\omega} k_{\omega\omega}}{Fr^2}}$$

При $\psi = \psi_{*\omega}$ уравнение (7) дает только одно значение фазовой скорости. При $\psi > \psi_{*\omega}$ появляется второе значение, т. е. имеют место две формы распространения



крутильных волн. При $\psi < \psi_{*\omega}$ второй корень уравнения (7) оказывается мнимым, т. е. волны второго типа не распространяются.

Граничной частоте $\psi_{*\omega}$, определяемой выражением (8), можно дать такое физическое толкование. Величина c_2 — скорость распространения волн сдвига; величину R_{ω} можно назвать приведенным радиусом инерции сечения. Тогда величина $\psi_{*\omega}$ обратна времени, за которое сдвиговая волна проходит расстояние, равное приведенному радиусу инерции сечения.

Аналогичные результаты получаются и для изгибных волн; граничные значения частот определяются по формулам

$$\psi_{*x} = \sqrt{\frac{GF}{\rho I_x k_{yy}}}, \quad \psi_{*y} = \sqrt{\frac{GF}{\rho I_y k_{xx}}}$$

В стержне с произвольным открытым поперечным сечением значения граничных частот могут быть определены из матричного уравнения

$$\det \left[\mathbf{BK} - \frac{EF}{\psi^2} c_2^2 \mathbf{A} \right] = 0$$

Рассмотрим в качестве примера стержень швеллерного сечения. На фигуре показаны фазовые скорости (а) и групповые скорости (б) изгибных и изгибно-крутильных волн в зависимости от частоты

$$\Psi = \psi \sqrt{\rho I_y / EF}$$

Пунктиром показаны результаты, соответствующие теории В. З. Власова. Отношение модулей упругости принято равным $E / G = 2.6$. При вычислениях был использован численный алгоритм, реализованный на ЭВМ Наир-2.

Как видно из графиков, граничные значения частот разделяют весь частотный диапазон от 0 до ∞ на четыре диапазона с различным числом возможных форм распространения волн. В области малых частот возможны только три формы распространения волн; в данном случае это изгибная форма (в плоскости симметрии) и две связанные изгибно-крутильные. По мере роста частоты появляется дополнительно по одной форме (после перехода через очередную граничную частоту); в последнем диапазоне имеют место шесть форм.

Значения групповых скоростей волн, определенные по уравнениям (6), не превышают скорости волн расширения. Скорости распространения высокочастотных волн близки к скорости поверхностных волн Релея. Для случая изгибных волн этот результат известен; он хорошо согласуется с точным решением теории упругости [7].

В области высоких частот групповые скорости низших форм волн практически постоянны. Это позволяет пренебрегать дисперсией волн при оценке вклада высоких частот в величину ускорения, возникающего в стержне при действии кратковременных нагрузок [8].

Следует отметить, что результаты, полученные по теории В. З. Власова, не содержат дополнительных форм распространения волн; для низших форм получаются завышенные значения скоростей, не соответствующие реально протекающему процессу. Групповые скорости волн на некотором интервале частот превышают скорость звука в материале.

Поступила 7 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Ю. С. Уточненные уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. В сб.: Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. Киев, «Наукова думка», 1965.
2. Aggarwal H. R., Cranch E. T. A theory of torsional and coupled bending-torsional waves in thin-walled open section beams. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 2.
3. Гольденвейзер А. Л. О теории тонкостенных стержней. ПММ, 1949, т. 13, вып. 6.
4. Мещеряков В. Б. Общие уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов. Тр. Моск. ин-та инж. трансп., 1968, вып. 260.
5. Мещеряков В. Б. Изгибно-крутильные колебания и динамическая устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов. Тр. Моск. ин-та инж. трансп., 1970, вып. 311.
6. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.
7. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
8. Мещеряков В. Б., Курбацкий Е. Н. Приближенная оценка ускорений в балке при кратковременном действии поперечной силы. Тр. Моск. ин-та инж. трансп., 1976, вып. 509.