УДК 532.5.51

# ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПЛОСКИМ ЗАДАЧАМ О СКЛЕЙКЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО И ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

О. В. Титов

(Москва)

С помощью прямого вариационного метода показано, что в ограниченной области существует течение жидкости с непрерывным полем скоростей, такое, что в некоторой части области оно потенциально, а в остальной имеет заданную завихренность. Основная трудность состоит в доказательстве гладкости решения, удовлетворяющего уравнению Эйлера с разрывными коэффициентами.

В ряде случаев при изучении движения жидкости при больших числах Рейнольдса возникают задачи о гладкой склейке потенциального и вихревого течений (см., например, [1-3]). В плоском случае формулировка этих задач такова: определить в заданной области $\Omega$ непрерывно дифференцируемую функцию тока $\psi$ и кривую $\gamma$ так, что $\psi=0$ на $\gamma$, $\Delta\psi=0$ по ту сторону от $\gamma$, где $\psi>0$, а там, где $\psi<0$, лапласиан $\Delta\psi$ принимает заданное значение завихренности $\omega(x)$. Краевые условия для $\psi$ определяются из гидродинамических соображений, область $\Omega$ не обязательно ограничена. Возможны и другие, близкие формулировки задачи [4].

В указанной постановке задачи о склейке рассматривались многими авторами как численно, так и теоретически. Были установлены [5-8] некоторые свойства линии $\gamma$, доказано [9] существование решения в случае ограниченной области $\Omega$. Характерная особенность указанных работ заключается в сведении задачи к некоторому нелинейному интегральному уравнению с последующим численным решением.

Замечено [9], что задача о склейке допускает и вариационную формулировку.

Ниже задача о склейке решается в ограниченных областях с помощью прямого вариационного метода. Доказательство не зависит от размерности $n$ пространства, поэтому оно приводится в наибольшей общности; разумеется, гидродинамическая интерпретация возможна лишь при $n=2$. Решением задачи является экстремаль некоторого разрывного функционала $I$, приближаемого при $\varepsilon\to 0$ семейством гладких функционалов $I_\varepsilon$; таким путем удается обосновать гладкость решения. Интересный вопрос о количестве решений остается открытым. В работе используются стандартные обозначения (см. [10], § 1 гл. 1).

Пусть $\Omega\subset E_n$, $n\geqslant 2$ — область с достаточно хорошей границей (например, кусочно-гладкая класса $C^\infty$ с ненулевыми углами), $\omega$ и $\varepsilon$ — некоторые положительные числа, $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Определим в $W_2^1(\Omega)$ функционал

$$I_\varepsilon(\psi)=\int\limits_\Omega [\,|\nabla\psi|^2+\omega(\psi-\sqrt{\varepsilon+\psi^2})]\,dx$$

и рассмотрим вариационную задачу $P(\varepsilon)$ : минимизировать $I_\varepsilon(\psi)$ в классе всех функций $\psi\in\varphi+\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

*Теорема 1.* Задача $P(\varepsilon)$ имеет хотя бы одно решение; для любого решения $\psi_\varepsilon$ этой задачи имеем равномерную по $\varepsilon\in(0,1]$ оценку

$$\max\nolimits_\Omega|\psi_\varepsilon|\leqslant C(\Omega,\varphi,\omega) \tag{1}$$

*Доказательство.* Убедимся сначала в справедливости стандартных лемм, на которых основан прямой метод вариационного исчисления.

*Лемма 1.* Значения функционала $I$ на множестве $\varphi+\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ равномерно ограничены снизу.

*Лемма 2.* Если $I_\varepsilon(\psi)<C'$, $\psi\in\varphi+\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то

$$\|\psi\|_{W_2^1(\Omega)}<C(\Omega,\omega,\varphi,C')$$

Доказательства лемм 1 и 2 используют лишь неравенства Шварца и Пуанкаре.

*Лемма 3.* Функционал $I_\varepsilon$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $W_2^1(\Omega)$ на множестве $\varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Полагая

$$I_\varepsilon = I_{\varepsilon 1} + I_{\varepsilon 2} - I_{\varepsilon 3}$$

$$I_{\varepsilon 1} = \int\limits_\Omega |\nabla\psi|^2 dx, \quad I_{\varepsilon 2} = \omega \int\limits_\Omega \psi\, dx, \quad I_{\varepsilon 3} = \omega \int\limits_\Omega \sqrt{\varepsilon + \psi^2} dx$$

видим, что полунепрерывность снизу функционала $I_{\varepsilon 1}$ известна, функционал $I_{\varepsilon 2}$ линеен, а $I_{\varepsilon 3}$ непрерывен относительно слабой сходимости на множестве $\varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ : действительно, если $\psi_k \to \psi$ слабо в $\varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то теорема Реллиха гарантирует сильную сходимость $\psi_k \to \psi$ в $L_2(\Omega)$, т. е. заведомо и в $L_1(\Omega)$; остается учесть неравенство

$$|\sqrt{\varepsilon + \psi_k^2} - \sqrt{\varepsilon + \psi^2}| \leqslant |\psi_k - \psi|$$

Теперь доказательство существования хотя бы одного решения задачи $P(\varepsilon)$ проводится стандартным методами (см., например, [11]).

Обратимся к доказательству ограниченности любого решения $\psi_\varepsilon$ задачи $P(\varepsilon)$. Видно, что $\operatorname{vrai\,sup}_\Omega \psi \leqslant \sup_{\partial\Omega} \varphi$. Действительно, в противном случае при любом $k > \sup_{\partial\Omega}\varphi$ для срезки $\psi^{(k)}(x) = \min\{\psi(x), k\} \in \varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имели бы $I_\varepsilon(\psi^{(k)}) < I_\varepsilon(\psi)$. Несколько сложнее доказывается ограниченность решения снизу постоянной, не зависящей от $\varepsilon$; при этом можно использовать рассуждение, аналогичное приведенному в конце § 2 в [12].

*Следствие* [13]. Любое решение $\psi_\varepsilon$ вариационной задачи $P(\varepsilon)$ является классическим решением уравнения Эйлера для функционала $I_\varepsilon$

$$\Delta\psi = F(\omega, \psi, \varepsilon), \quad F(\omega, \psi, \varepsilon) = {}^1/_2\, \omega\, (1 - \psi / \sqrt{\varepsilon + \psi^2}), \quad \psi|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{2}$$

В частности, решение $\psi_\varepsilon$ аналитично во всех внутренних точках области $\Omega$.

Перейдем к изучению основной вариационной задачи $P$: на множестве функций $\psi \in \varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ минимизировать функционал

$$I(\psi) = \int\limits_\Omega (|\nabla\psi|^2 + 2\omega \min\{\psi(x), 0\})\, dx$$

*Теорема 2.* Задача $P$ имеет хотя бы одно решение $\psi \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = \alpha(\omega) \in (0, 1]$; функция $\psi$ аналитична всюду в $\Omega \setminus \{x \in \Omega : \psi(x) = 0\}$, причем $\Delta\psi(x) = 0$, если $\psi(x) > 0$, и $\Delta\psi(x) = \omega$, если $\psi(x) < 0$.

*Доказательство.* Любое решение $\psi_\varepsilon$ задачи $P(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (2) с правой частью, допускающей не зависящую от $\varepsilon$ оценку $|F(\omega, \psi, \varepsilon)| \leqslant \omega$. Поэтому на основании оценки (1) и теоремы 6.5 (гл. 4 [10]) найдется не зависящее от $\varepsilon$ число $\alpha \in (0,1]$, такое, что

$$\|\psi_\varepsilon\|_{C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C(\Omega, \varphi, \omega)$$

Но тогда для некоторой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ функции $\psi_k = \psi_{\varepsilon_k}$ сходятся по норме $C^{1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ к некоторой функции $\psi \in \{\varphi + \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\} \cap C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Как и в [12], доказывается, что $\psi$ — решение задачи $P$.

Рассмотрим теперь при $\delta > 0$ множество $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : |\psi(x)| > \delta\}$. Для всех $k$, начиная с некоторого $|\psi_k(x)| > \delta / 2$, если $x \in \Omega_\delta$. В частности, на $\Omega_\delta$ справедлива оценка

$$\|F(\omega, \psi_k, \varepsilon)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}_\delta)} < C(\delta, \Omega, \omega, \varphi)$$

Применяя внутренние оценки Шаудера к любой подобласти $\Omega_\delta' \subset\subset \Omega_\delta$, получим равномерную ограниченность норм $\|\psi_k\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_\delta')}$.

Выбрав в случае надобности соответствующую подпоследовательность, можно считать, что $\|\psi_k - \psi\| \to 0$ по норме $C^{2+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\delta')$ и что $\psi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_\delta')$; в частности, для любого $x \in \Omega_\delta'$

$$\Delta\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \Delta\psi_k(x) = \lim_{k\to\infty} F(\omega, \psi_k(x), \varepsilon_k) = \begin{cases} 0, & \psi_k > 0 \\ \omega, & \psi_k < 0 \end{cases}$$

Так как множествами $\Omega_\delta'$ можно исчерпать все $\Omega \setminus \{x \in \Omega : \psi(x) = 0\}$, то теорема 2 доказана.

*Замечания.* 1°. При достаточно больших $\omega$ множество $\{x \in \Omega : \psi(x) < 0\}$ не пусто для любого решения $\psi$ задачи $P$. В противном случае при любом $\omega > 0$ решение $\psi$ было бы гармонической функцией, принимающей на границе $\partial\Omega$ заданные значения $\varphi$, т. е. не зависело бы от $\omega$. Но тогда для произвольной функции $\psi_0 \in C^2(\overline{\Omega}) \cap \{\varphi + W_2^{\circ 1}(\Omega)\}$, такой, что $\psi_0 < 0$ где-либо в $\Omega$, найдется настолько большое число $\omega$, что будет верно неравенство $I(\psi_0) < I(\psi)$.

2°. Теоремы 1 и 2 непосредственно обобщаются на функционалы с достаточно гладкими функциями $\omega = \omega(x)$.

Автор благодарен Б. В. Шабату за обсуждение результатов.

Поступила 8 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Batchellor G.K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, Vol. 1, pt 2, p. 177—190.
2. *Batchellor G. K.* A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. J. Fluid. Mech., 1956, vol. 1, pt 4.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. *Вайнштейн И. И., Гольдштик М. А.* О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 6.
5. *Шабат А. Б.* Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи. ПМТФ, 1962, № 4.
6. *Шабат А. Б.* О двух задачах на склеивание. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6.
7. *Садовский В. С.* Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
8. *Садовский В. С.* О некоторых свойствах потенциального и вихревого течений, граничащих на замкнутой жидкой линии тока. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 1.
9. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
11. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin, Springer-Verlag, 1966.
12. *Титов О. В.* Минимальные гиперповерхности под мягкими препятствиями. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38, № 2.
13. *Stampacchia G.* On some regular multiple integral problems in the calculus of variations. Commun. Pure and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 4, p. 383—421.

---

УДК 539.3 : 534.1

# О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

**В. Б. Мещеряков**

(Москва)

Приводятся дисперсионные уравнения фазовых и групповых скоростей изгибно-крутильных волн в тонкостенных стержнях открытого профиля с учетом деформаций сдвига. Показано, что в общем случае существуют шесть форм распространения