УДК 532.529.5

О ТЕНЗОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ДИСПЕРСНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

О. В. Воинов, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается несжимаемая жидкость, содержащая в единице объема большое число сферических частиц, причем их объемная концентрация $c \ll 1$. Частицы могут изменять объем.

Пусть движение жидкости потенциально. Тогда скорость частиц $\mathbf{u}$ и среднемассовую скорость жидкости $\mathbf{v}$ можно найти согласно процедуре, описанной в [1] на примере пузырьков. При этом при решении динамической задачи слагаемые $c\mathbf{w} = c(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ в уравнениях опускаются, а величина $\mathbf{v}$ с учетом слагаемых $c\mathbf{w}$ находится из кинематических соотношений, сформулированных в работах [1,2]. В связи с задачами, в которых течения непотенциальны, представляет интерес найти выражение для тензора напряжений среды в потенциальном приближении, чтобы иметь возможность феноменологически учитывать инерционные эффекты и в отсутствие потенциала.

Рассмотрим осреднение по объему жидкости интеграла Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{p}{\rho} - U = f(t)$$

Среднее значение $d\Phi / dt$ можно найти, используя процедуры дифференцирования средних величин, описанные в [1]

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi \rangle - \frac{1}{2} c\mathbf{u}\mathbf{w} \tag{1}$$

Для осреднения $|\nabla\Phi|^2$ с точностью до c^2 достаточно записать

$$|\nabla\Phi|^2 \approx |\nabla\langle\Phi\rangle|^2 + 2\nabla\langle\Phi\rangle \nabla(\Phi - \langle\Phi\rangle) \tag{2}$$

Учитывая выражение для среднемассовой скорости

$$\mathbf{v} = \langle \nabla\Phi \rangle = \nabla\langle\Phi\rangle + {}^1/_2\, c\mathbf{w} \tag{3}$$

полученное в [1, 2], при помощи (1) и (2) найдем среднее от интеграла Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial \langle\Phi\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\langle\Phi\rangle|^2 - \frac{1}{2} cw^2 + \frac{\langle p \rangle}{\rho} - U = f(t) \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по координате, можно записать с учетом (3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v} - \frac{c\mathbf{w}}{2}\right) + \left(\left(\mathbf{v} - \frac{c\mathbf{w}}{2}\right)\nabla\right)\left(\mathbf{v} - \frac{c\mathbf{w}}{2}\right) = \nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla\left(\langle p \rangle - \frac{\rho}{2} cw^2\right) \tag{5}$$

По существу это уравнение движения жидкой фазы. Чтобы получить из него выражение для тензора напряжений, достаточно привести его к канонической форме уравнений движения сплошной среды. Для этого необходимо сделать несложные преобразования с точностью до членов порядка квадрата концентрации с учетом уравнения неразрывности для дисперсной фазы

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} cu = 3c\frac{R^{\cdot}}{R}$$

и уравнения движения частиц в неоднородном потоке [3]

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b \mathbf{g} + 2\pi R^3 \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{3}\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{R^{\cdot}}{R}\mathbf{w} - \frac{2}{3}\mathbf{g}\right)$$

Здесь R — радиус частиц, ρ_b — их средняя плотность, $\mathbf{g} = \nabla U$. Дифференцирование $\mathbf{v}$ ведется вдоль траектории жидкой частицы, $\mathbf{u}$ — вдоль траектории центра частицы.

В итоге (5) принимает вид

$$\rho(1-c)\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho(1-c)\mathbf{g}+\mathbf{F}+(\nabla\mathbf{P}) \tag{6}$$

$$P_{ij}=\left(-\langle p\rangle+\frac{1}{2}\rho c w^2\right)\delta_{ij}-\frac{1}{2}\rho c w_i w_j,\quad \mathbf{F}=\rho_b c\left(\mathbf{g}-\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$$

Величина $\mathbf{F}$ представляет силы, действующие на жидкость со стороны дисперсных частиц, $\mathbf{P}$ — тензор напряжений. Давление в жидкости равно $-{}^1/_3\, P_{ii}=\langle p\rangle-{}^1/_3\rho c w^2$. На существование слагаемых в P_{ij}, пропорциональных cw_iw_j, указано в работе [4], однако в ней получено другое выражение тензора P. Последнее слагаемое в выражении (6) для P_{ij} было получено ранее Р. И. Нигматулиным на основе ячеистой модели.

Учет вязких сил нестрого можно производить, включая их в силу взаимодействия фаз $\mathbf{F}$.

В работе [2] при выводе уравнений движения пузырьков сделаны ошибочные предположения. Полученные уравнения (4.2), (4.3) были известны для одиночного пузырька, однако для пузырьковой среды в рамках принятой точности они неверны. Действительно, осреднив дискретную функцию $\partial\Phi_\alpha'/\partial t$ согласно [1]

$$\overline{\frac{\partial\Phi_\alpha'}{\partial t}}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Phi_\alpha'}-\frac{1}{2}cu_i(w_i+2A_{ij}w_j) \tag{7}$$

и применяя формулы (2.9) и (2.21) работы [1], можно осреднить уравнение изменения радиусов пузырьков

$$RR^{\cdot\cdot}+\frac{3}{2}R^{\cdot 2}-\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial t}-\frac{1}{2}|\nabla\langle\Phi\rangle|^2-\frac{1}{4}(\mathbf{u}-\nabla\langle\Phi\rangle)^2+U+f- \tag{8}$$

$$-\frac{\bar{p}_g}{\rho}+\frac{2\sigma}{\rho R}+\frac{3}{4}cw^2+\frac{3}{2}cA_{ij}w_iw_j=0$$

Здесь тензор A_{ij} зависит от микроструктуры среды [1]. Последнее слагаемое (7) в [2] не учтено. Два последних слагаемых в (8) отсутствуют в уравнении (4.3) работы [2] и аналогичные члены не учтены в уравнении (4.2). Таким образом, динамические уравнения работы [2] непригодны для вывода выражения тензора напряжений жидкой фазы.

В отличие от [2] в работе [1] при определении движения пузырей слагаемые порядка $c\mathbf{w}$ опускаются во всех уравнениях, включая кинематические, ввиду некорректности их учета. Члены порядка $c\mathbf{w}$ учитываются только при расчете движения жидкой фазы. Учет слагаемых порядка $c\mathbf{w}$ и cw_iw_j в уравнениях движения пузырьков связан с необходимостью определения тензора A_{ij}, зависящего от взаимного расположения пузырьков, которое можно рассчитывать, например, методами кинетической теории.

Авторы благодарят Р. И. Нигматулина за обсуждение результатов работы.

Поступила 19 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Об уравнениях движения жидкости с пузырьками. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
2. *Гарипов Р. М.* Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. ПМТФ, 1973, № 6.
3. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5.
4. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.