УДК 531.36

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Л. А. Кипнис

(Воронеж)

Доказывается существование и единственность T-периодического решения нелинейного дифференциального уравнения

(1) $$d^n x / dt^n + f(t, x) = 0 \quad (n \geqslant 3)$$

и изучается устойчивость решений эквивалентной уравнению системы

(2) $$dz / dt = F(t, z)$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad F = (F_1, F_2, \ldots, F_n), \quad z_1 = x, \quad F_i = z_{i+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad F_n = -f(t, z_1)$$

В дальнейшем E_n — n-мерное евклидово пространство элементов z со скалярным произведением

$$(z, h) = \sum_{i=1}^{n} z_i h_i \quad (z, h \in E_n, \ \| z \| = (z, z)^{1/2})$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям

1) f и $\partial f / \partial x$ непрерывны при всех $t, x \in (-\infty, \infty)$;

2) существует число T, такое, что $f(t + T, x) \equiv f(t, x)$ при всех t, x;

3) при всех t, x выполняется неравенство $a \leqslant \partial f / \partial x \leqslant b$, где a и b — некоторые постоянные.

Тогда в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2k + 3 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad ab > 0$;

б) $n = 4k + 4 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad a > 0, \ b > 0$;

в) $n = 4k + 6 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad a < 0, \ b < 0$

уравнение (1) имеет единственное T-периодическое решение.

Доказательство. Из [1] следует, что для существования единственного T-периодического решения системы (2) достаточно, чтобы для всех $t, x \in (-\infty, \infty)$, $z, h \in E_n$ выполнялись условия

(3) $$(-(U[\partial F / \partial z] + [\partial F / \partial z]' U)h, h) \geqslant \| h \|^2$$

(4) $$\| F(t, z) - F(t, h) \| \leqslant L \| z - h \|, \quad 0 < L = \text{const}$$

Здесь U — симметрическая обратимая матрица, имеющая как положительные, так и отрицательные собственные числа, $[\partial F / \partial z]'$ — транспонированная к $\partial F / \partial z$ матрица. При выполнении условий (3) и (4) других ограниченных решений система (2) не имеет.

Условие (4) очевидным образом следует из неравенства 3) теоремы. Покажем, что из (3) автоматически следует обратимость матрицы U и тот факт, что она имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. Действительно, обозначая для произвольных t_0, z° $\partial F(t_0, z^\circ) / \partial z = A$, имеем

$$\| h \|^2 \leqslant (-(UA + A'U)h, h) \leqslant 2 \| A \| \, \| h \| \, \| Uh \|$$

поэтому $\| Uh \| \geqslant \| h \| / (2 \| A \|)$. Отсюда следует обратимость U. Легко видеть, что матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид: $a_{n1} = -p_0 = -\partial f(t_0, z_1^\circ) / \partial z_1$, $a_{ii+1} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, остальные a_{ij} равны нулю, $z^\circ = (z_1^\circ, z_2^\circ, \ldots, z_n^\circ)$.

Согласно условию теоремы может быть лишь $p_0 > 0$ или $p_0 < 0$.

Пусть $p_0 > 0$. Собственные числа матрицы A вычисляются из уравнения $l^n + p_0 = 0$ и равны

$$l_k = \sqrt[n]{p_0} \left[\cos \frac{\pi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{n} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Допустим, что спектр матрицы U положителен. Тогда из условия (3) следует, что $\operatorname{Re} l_k < 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ (см. [2]), что невозможно, так как $\operatorname{Re} l_0 > 0$.

Предположим теперь, что спектр матрицы U отрицателен. Тогда из условия (3) вытекает, что $\operatorname{Re} l_k > 0$. Действительно, если h_k — собственный вектор матрицы A, отвечающий l_k, то

$$\begin{aligned}(-(UA + A'U)h_k, h_k) &= (-UAh_k, h_k) + (-Uh_k, Ah_k) = \\ &= l_k(-Uh_k, h_k) + \bar{l}_k(-Uh_k, h_k) = (2\operatorname{Re} l_k)\cdot(-Uh_k, h_k) \geqslant \| h_k \|^2\end{aligned}$$

где $\bar{l}_k$ — число, сопряженное с l_k. Так как $(-Uh_k, h_k) > 0$, то

$$2\operatorname{Re} l_k \geqslant \| h_k \|^2 / (-Uh_k, h_k) \geqslant \| h_k \|^2 / (\| U \| \, \| h_k \|^2) = 1 / \| U \|$$

С другой стороны, если выбрать целое число k так, чтобы $\frac{1}{4}n - \frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}n - \frac{1}{2}$, то $\cos(\pi + 2\pi k) / n < 0$, что противоречит условию $\operatorname{Re} l_k > 0$.

Аналогично рассматривается случай $p_0 < 0$.

Значит, матрица U имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, что матрица U удовлетворяет условию (3), которое означает неотрицательную определенность матрицы $B = (b_{ij})$ $(i, j) = (1, \ldots, n)$ вида

$$\begin{aligned}&b_{11} = 2pu_{1n} - 1, \quad b_{ii} = -2u_{i-1i} - 1 \\ &(i = 2, 3, \ldots, n), \quad b_{1j} = pu_{jn} - u_{1j-1} \quad (j = 2, 3, \ldots, n) \\ &b_{ij} = -(u_{ij-1} + u_{i-1j}) \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1;\ j = i+1, i+2, \ldots, n)\end{aligned}$$

где $p = \partial f(t, z_1) / \partial z_1$, а u_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — элементы матрицы U, причем $u_{ji} = u_{ij}$.

Рассмотрим раздельно случаи а), б), в). В случае а) положим $u_{i-1i} = -1$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $u_{ij-1} + u_{i-1j} = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1;\ j = i+1, i+2, \ldots$ $\ldots, n)$, $u_{1n} = u$. Последовательные главные диагональные миноры Γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ полученной матрицы B будут иметь вид

$$\Gamma_k = 2pu + a_k p^2 + b_k p + c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

где a_k, b_k, c_k — некоторые числа. Если $a > 0$, $b > 0$, то, выбирая $u > 0$ достаточно большим, получим $\Gamma_k > 0$. Если $a < 0$, $b < 0$, то, взяв $u < 0$ достаточно большим по модулю, также получим $\Gamma_k > 0$. Отсюда и из критерия Сильвестра следует положительная определенность матрицы B.

В случае б) возьмем $u_{i-1i} = -1$ $(i = 2, 3, \ldots, n/2,\ n/2 + 2, \ldots, n)$, $u_{ij-1} + u_{i-1j} = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ $(j = i+1, \ldots, n)$, $u_{1n} = u$. Тогда $u_{n/2\, n/2+1} = -u$ и последовательные главные диагональные миноры полученной матрицы B будут иметь вид

$$\Gamma_k = \begin{cases} 2pu + a_k p^2 + b_k p + c_k & (k = 1, 2, \ldots, n/2) \\ 4pu^2 + \sum\limits_{i=1}^{2} (a_{ki} p^2 + b_{ki} p + c_{ki}) u^{2-i} & (k = n/2 + 1, \ldots, n) \end{cases}$$

где $a_k, b_k, c_k, a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}$ — некоторые числа. Выбирая $u > 0$ достаточно большим, получим $\Gamma_k > 0$, что обеспечит положительную определенность матрицы B.

В случае в), наложив на элементы матрицы U те же ограничения, что и в случае б), получим

$$u_{n/2\, n/2+1} = u$$

$$\Gamma_k = \begin{cases} 2pu + a_k p^2 + b_k p + c_k & (k = 1, 2, \ldots, n/2) \\ -4pu^2 + \sum\limits_{i=1}^{2} (a_{ki} p^2 + b_{ki} p + c_{ki}) u^{2-i} & (k = n/2 + 1, \ldots, n) \end{cases}$$

где $a_k, b_k, c_k, a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}$ — некоторые числа. Взяв $u < 0$ достаточно большим по модулю, получим $\Gamma_k > 0$.

Теорема доказана.

Замечание. В случаях $n = 4k + 4$, $a < 0$, $b < 0$ и $n = 4k + 6$, $a > 0$, $b > 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) теорема 1 не верна. Действительно, уравнения

$$d^{4k+4}x \,/\, dt^{4k+4} - (2\pi \,/\, T)^{4k+4}x = 0$$

$$d^{4k+6}x \,/\, dt^{4k+6} + (2\pi \,/\, T)^{4k+6}x = 0$$

имеют бесконечное множество T-периодических решений.

Так как для системы (2) в условиях теоремы 1 выполнены все требования теоремы II из [3], то справедливо

Следствие. Пусть $z^\circ(t)$ — единственное T-периодическое решение системы (2) Тогда в пространстве E_n существуют многообразия M_1 и M_2, пересекающиеся лишь в точке $z^\circ(0)$, такие, что для решений $z(t)$ системы (2) имеем

(5)
$$\begin{aligned}
&\|z(t) - z^\circ(t)\| \leqslant Ne^{-mt}\|z(0) - z^\circ(0)\|, \quad \text{если} \quad t \geqslant 0 \text{ и } z(0) \in M_1\\
&\|z(t) - z^\circ(t)\| \leqslant Ne^{mt}\|z(0) - z^\circ(0)\|, \quad \text{если} \quad t \leqslant 0 \text{ и } z(0) \in M_2\\
&\|z(t) - z^\circ(t)\| \geqslant Ke^{mt}, \quad \text{если} \quad t \geqslant t_0 \text{ и } z(0) \overline{\in} M_1 \cup M_2
\end{aligned}$$

где $N > 0$, $K > 0$, $m > 0$, t_0 — постоянные числа.

Таким образом, единственное T-периодическое решение системы (2), являясь неустойчивым по Ляпунову, условно асимптотически устойчиво вправо (влево) относительно многообразия M_1 (M_2). Более того, для системы (2) имеет место нелинейная экспоненциальная дихотомия решений (см. [3]).

Теорема 2. Пусть при $t, x \in (-\infty, \infty)$ выполнены условия:

1) функция $f(t, x)$ непрерывна вместе с производной $\partial f \,/\, \partial x$ и T-периодична по t;

2) $f(t, 0) \equiv 0$.

Тогда в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2k + 3$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\partial f(t, 0) \,/\, \partial x \neq 0$;

б) $n = 4k + 4$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\partial f(t, 0) \,/\, \partial x > 0$;

в) $n = 4k + 6$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\partial f(t, 0) \,/\, \partial x < 0$

нулевое решение системы (2) неустойчиво.

Доказательство. Рассмотрим для системы (2) относительно ее нулевого решения уравнение в вариациях

(6)
$$dz \,/\, dt = (\partial F(t, 0) \,/\, \partial z)z$$

Для уравнения (6) выполнены все условия теоремы 1 и поэтому справедлива последняя из оценок (5), из которой следует положительность характеристического показателя Ляпунова решения $z(t)$ системы (6). Как известно (см., например, [4]), нулевое решение системы (2) тогда будет неустойчивым.

Теорема доказана.

Уравнение (1) рассматривалось при $n \geqslant 3$. При $n = 2$ условия 1) — 3) теоремы 1 и условие $a < 0$, $b < 0$ обеспечивают существование единственного T-периодического решения уравнения (1) и нелинейную экспоненциальную дихотомию решений системы (2). Однако уравнение второго порядка, более общее чем (1), рассматривалось в [1].

При $n = 1$ условия 1), 2) теоремы 1 и условие

(7)
$$\partial f(t, x) \,/\, \partial x \geqslant a > 0$$

(8)
$$\partial f(t, x) \,/\, \partial x \leqslant b < 0$$

обеспечивают существование единственного T-периодического решения уравнения (1). Это решение устойчиво в целом а уравнение (1) является частным случаем монотонного дифференциального уравнения, изучаемого в [2].

Автор благодарит А. И. Перова за внимание к этой задаче.

Поступила 9 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перов А. И.* Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $dx/dt = f(t, x)$. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. *Перов А. И.* Периодические колебания. Изд-во Воронежск. ун-та, 1973.
3. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. Тр. н.-и. ин-та матем. и механ. Воронежск. ун-та, 1973.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.

УДК 531.38

ДВА СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РОЗЕ

В. Г. Демин, А. И. Прокофьев

(Москва)

Методом Рауса доказывается устойчивость стационарного движения в задаче Розе [1,2]. С использованием теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле строятся периодические решения в окрестности устойчивого невозмущенного движения.

Рассмотрим движение системы, состоящей из двух тяжелых гироскопов Лагранжа вокруг неподвижной точки, лежащей на оси динамической симметрии первого гироскопа. Будем полагать, что оси динамической симметрии волчков соединены цилиндрическим шарниром, который принуждает их оставаться в одной вертикальной плоскости, но позволяет им принимать любой наклон к вертикали. Пусть s — расстояние от неподвижной точки до шарнира, l_1 — расстояние от неподвижной точки до центра масс первого гироскопа, l_2 — расстояние от шарнира до центра масс второго гироскопа, A_1', A_2 и C_1, C_2 — экваториальные и осевые моменты инерции гироскопов.

Такая система имеет пять степеней свободы и ее положение в пространстве можно задавать соответствующими углами нутации θ_1, θ_2, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, углами собственного вращения φ_1, φ_2 и общим углом прецессии ψ. Функция Лагранжа будет иметь вид

$$
\begin{gathered}
L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} [A_i (\dot\theta_i^{2} + \dot\psi^{2} \sin^2 \theta_i) + C_i (\dot\varphi_i + \dot\psi \cos \theta_i)^2] + \\
+ B [\dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \dot\psi^{2} \sin \theta_1 \sin \theta_2] - \\
- g [(m_1 l_1 + m_2 s) \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2] \\
A_1 = A_1' + m_2 s^2, \quad B = m_2 l_2 s
\end{gathered} \tag{1}
$$

где m_1 и m_2 — массы гироскопов, g — ускорение силы тяжести.

Циклическим координатам φ_1, φ_2, ψ соответствуют первые интегралы (n_1, n_2, n — постоянные интегрирования)

$$
C_i (\dot\varphi_i + \dot\psi \cos \theta_i) = n_i, \quad i = 1, 2, \quad N\dot\psi = \nu
$$

$$
N = A_1 \sin^2 \theta_1 + A_2 \sin^2 \theta_2 + 2B \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \nu = n - n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2
$$

Исключая из (1) циклические координаты, находим функцию Рауса

$$
R = L - n_1\dot\varphi_1 - n_2\dot\varphi_2 - n\dot\psi = 1/2 [A_1\dot\theta_1^2 + A_2\dot\theta_2^2 + 2B\dot\theta_1\dot\theta_2 \cos (\theta_1 - \theta_2)] - W (\theta_1, \theta_2, n_1, n_2, n)
$$

$$
W = \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{N} + g [(m_1 l_1 + m_2 s) \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2]
$$

Стационарные движения исходной системы получим из условий [1, 2]

$$
\partial W/\partial \theta_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{2}
$$