УДК 62.50

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛЬНОГО МОСТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИГР

В. И. Ухоботов

(Челябинск)

Построен u-стабильный мост (вообще говоря, не максимальный) для одного класса игр. Найдены достаточные условия, при выполнении которых в рассматриваемом классе игр возможно окончание игры за время, равное первому моменту поглощения.

1. В n-мерном линейном евклидовом пространстве R^n происходит движение вектора z, которое подчиняется уравнению

$$z^{\cdot} = Cz - u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь C — постоянная $n \times n$-матрица, P и Q — выпуклые компакты в R^n.

Предполагается, что заданы m-мерное линейное евклидово пространство R^m $(m \leqslant n)$, линейное отображение π пространства R^n в R^m, а также замкнутое и выпуклое множество $X \subset R^m$.

В R^n выделено терминальное множество Z, которое имеет следующий вид:

$$Z = \{z \in R^n : \pi z \in X\} \tag{1.2}$$

Рассматривается задача о попадании вектора z на терминальное множество Z в заданный момент времени t_1. Первый игрок, распоряжающийся выбором управления $u \in P$, стремится осуществить это попадание. Второй игрок, выбирая управление $v \in Q$, препятствует намерению первого игрока. Стратегии игроков отождествляются с функциями $u(t, z) \in P$, $v(t, z) \in Q$ (см. [1], стр. 31—36). В монографии [1] показано, что экстремальная к u-стабильному мосту W, ведущему на цель Z, стратегия первого игрока обеспечивает попадание вектора z на множество Z.

Будем искать u-стабильный мост W в следующем виде:

$$W = \{(\tau, z): \ 0 \leqslant \tau \leqslant t_1, \ \pi e^{\tau C} z \in T(\tau)\} \tag{1.3}$$

Семейство множеств $T(\tau) \subset R^m$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t_1)$ находится на основании свойства u-стабильности моста W и условия $T(0) = X$. Мост (1.3) будет u-стабильным (см. [1], стр. 52—53) при выполнении следующего условия: если $(\tau, z_0) \in W$ и при $0 \leqslant t \leqslant \sigma$ $(\sigma \leqslant \tau)$ выбрано измеримое управление $v(t) \in Q$, то существует измеримое управление $u(t) \in P$ $(0 \leqslant t \leqslant \sigma)$, при котором $(\tau - \sigma, z(\sigma)) \in W$. Здесь $z(\sigma)$ — положение вектора z, в которое он сместится в момент времени σ в силу уравнения (1.1) при управлениях $u(t)$, $v(t)$ из начального положения z_0. Известно [2], что для этого достаточно потребовать выполнения следующего включения:

$$T(\tau) \subset \left(T(\tau - \sigma) + \int_{\tau-\sigma}^{\tau} \pi e^{tC} P\, dt\right) \overset{*}{-} \left(\int_{\tau-\sigma}^{\tau} \pi e^{tC} Q\, dt\right) \tag{1.4}$$

Здесь $A \overset{*}{-} B = \bigcap (A - b)$ $(b \in B)$ — геометрическая разность (см. [3]) двух множеств $A \subset R^m$ и $B \subset R^m$.

2. Построим семейство множеств $T(\tau)$, удовлетворяющих включению (1.4) и условию $T(0) = X$, в предположении, что выполнено следующее условие:

$$\pi e^{tC} P = y_1(t) + k_1(t) S_1, \quad \pi e^{tC} Q = y_2(t) + k_2(t) S_2 \tag{2.1}$$

Здесь S_i — выпуклые компакты в R^m, $k_i(t)$ — непрерывные скалярные функции, $k_i(t) \geqslant 0$, при $t \geqslant 0$, $y_i(t)$ — непрерывные m-мерные вектор-функции; $i = 1, 2$.

Ищем множество $T(\tau)$ в следующем виде:

$$T(\tau) = \int_0^{\tau} (y_1(t) - y_2(t))\, dt + W(\tau) \tag{2.2}$$

Подставляя множество (2.2) в соотношение (1.4) и используя условие (2.1), получим включение, которому должно удовлетворять множество $W(\tau)$

(2.3) $$W(\tau)\subset \left(W(\tau-\sigma)+\left(\int\limits_{\tau-\sigma}^{\tau} k_1(t)\,dt\,S_1\right)\overset{*}{-}\left(\left(\int\limits_{\tau-\sigma}^{\tau} k_2(t)\,dt\right)S_2\right)\right.$$

Для дальнейшего потребуются некоторые свойства операции геометрической разности. Пусть A — замкнутое выпуклое множество в R^m, B и K — выпуклые компакты в R^m, σ_1 и σ_2 — неотрицательные числа. Тогда

(2.4) $$(A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} K = A \overset{*}{-} (B + K)$$

(2.5) $$(A + B) \overset{*}{-} K \supset (A \overset{*}{-} K) + B$$

(2.6) $$(((A + \sigma_1 B) \overset{*}{-} \sigma_1 K) + \sigma_2 B) \overset{*}{-} \sigma_2 K = (A + (\sigma_1 + \sigma_2) B) \overset{*}{-} (\sigma_1 + \sigma_2) K$$

(2.7) $$(A + B) * (K + B) = A * K$$

Доказательство свойств (2.4), (2.5) и включения $(A + B) \overset{*}{-} (K + B) \supset A \overset{*}{-} K$ для произвольных множеств A, B и K содержится в [3] (см. стр. 204). Свойство (2.6) показано в [4, 5] при доказательстве равенства $T_{\sigma_1}T_{\sigma_2} = T_{\sigma_1+\sigma_2}$ для игр с простым движением и выпуклым терминальным множеством. Это доказательство проводится в [4, 5] посредством привлечения понятия опорной функции выпуклого замкнутого множества Используя это понятие, нетрудно доказать и свойство (2.7).

Следующая лемма обобщает свойство (2.6).

Лемма. Пусть числа $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$ таковы, что

(2.8) $$p_2\delta_1 - p_1\delta_2 \geqslant 0$$

Тогда имеет место следующее равенство:

(2.9) $$(((A + p_2 B) \overset{*}{-} \delta_2 K) + p_1 B) * \delta_1 K = (A + (p_1 + p_2) B) \overset{*}{-} (\delta_1 + \delta_2) K$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $p_1 = 0$. Тогда соотношение (2.9) следует из свойства (2.4) и равенства $(\delta_1 + \delta_2) K = \delta_1 K + \delta_2 K$.

Пусть $p_1 > 0$. Тогда в силу условия (2.8) можно определить неотрицательное число

(2.10) $$\varepsilon = (p_2\delta_1 - p_1\delta_2) / p_1$$

Можно также считать, что в рассматриваемом случае ($p_1 > 0$) число $p_2 > 0$. В противном случае, как следует из условия (2.8), $p_2 = \delta_2 = 0$ и равенство (2.9) является очевидным.

Положим $A_1 = A + \varepsilon K$. Тогда на основании свойства (2.7) будем иметь равенство

(2.11) $$(A + p_2 B) \overset{*}{-} \delta_2 K = (A_1 + p_2 B) \overset{*}{-} (\delta_2 + \varepsilon) K$$

Согласно выбору числа ε (2.10) имеем

(2.12) $$\delta_1/p_1 = (\delta_2 + \varepsilon)/p_2 = \alpha \geqslant 0$$

Обозначим $K_1 = \alpha K$. Тогда, учитывая равенство (2.12), получим $(\delta_2 + \varepsilon) K = p_2 K_1$, $\delta_1 K = p_1 K_1$. Отсюда и из равенства (2.11) следует, что левая часть доказываемого соотношения (2.9) имеет вид

$$(((A_1 + p_2 B) \overset{*}{-} p_2 K_1) + p_1 B) \overset{*}{-} p_1 K_1$$

Это множество согласно свойству (2.6) равняется

$$(A_1 + (p_1 + p_2) B) \overset{*}{-} (p_1 + p_2) K_1$$

Подставляя сюда $A_1 = A + \varepsilon K$, $(p_1 + p_2) K_1 = (\delta_1 + \delta_2) K + \varepsilon K$ и используя свойство (2.7), получим требуемое равенство (2.9).

3. Перейдем теперь к нахождению семейства множеств $W(\tau)$, удовлетворяющих включению (2.3) и условию $W(0) = X$.

Определим функцию $f(\tau)$ при $\tau \geqslant 0$ как решение следующего дифференциального уравнения:

(3.1) $$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \max\left\{k_2(\tau);\ \frac{f(\tau)\,k_1(\tau)}{J_1(0,\tau)}\right\}, \quad f(0) = 0$$

Здесь

$$J_\alpha(a, b) = \int_a^b k_\alpha(t)\,dt, \quad \alpha = 1, 2$$

Заметим, что если $J_1(0, \tau) = 0$ при некотором $\tau > 0$, то $k_1(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Отсюда и из условия (2.1) будет следовать, что при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и для любых $u_1 \in P$, $u_2 \in P$ выполняется равенство

$$\pi e^{tC} u_1 = \pi e^{tC} u_2 \tag{3.2}$$

Представляя матрицу e^{tC} в виде степенного ряда и устремляя t к нулю, получим $\pi C^i u_1 = \pi C^i u_2$ при всех t. Отсюда следует, что равенство (3.2) выполняется при всех t. Это значит, что в первом равенстве (2.1) можно положить $k_1(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. В этом случае полагаем правую часть уравнения (3.1) равной $k_2(t)$.

Из уравнения (3.1) можно получить следующие свойства функции $f(\tau)$:

$$f(\tau) \geqslant J_2(0, \tau) \geqslant 0, \ f(\tau) - f(\tau - \sigma) \geqslant J_2(\tau - \sigma, \tau) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

$$J_1(0, \tau - \sigma) f(\tau) \geqslant J_1(0, \tau) f(\tau - \sigma), \ 0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \tag{3.4}$$

Докажем неравенство (3.4). Положим

$$x(\tau) = f(\tau) \,/\, J_1(0, \tau)$$

Тогда, как следует из уравнения (3.1), $dx(\tau) / d\tau \geqslant 0$ при $\tau > 0$. Это значит, что $x(\tau) \geqslant x(\tau - \sigma)$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$. Отсюда, учитывая вид функции $x(\tau)$, получим неравенство (3.4).

При каждом $\tau \geqslant 0$ положим

$$M(\tau) = (X + J_1(0, \tau) S_1) \overset{*}{-} f(\tau) S_2 \tag{3.5}$$

Отметим, что множество $M(\tau)$, как геометрическая разность двух выпуклых множеств, является выпуклым.

Утверждение. Пусть при каждом $\tau \in [0, t_1]$ множество $M(\tau)$ не пусто. Тогда при $\tau \in [0, t_1]$ включению (2.3) удовлетворяет следующее семейство множеств:

$$W(\tau) = M(\tau) + (f(\tau) - J_2(0,\tau)) S_2 \tag{3.6}$$

Доказательство. Из неравенства (3.4) следует, что

$$(f(\tau) - f(\tau - \sigma)) J_1(0, \tau - \sigma) \geqslant f(\tau - \sigma) J_1(\tau - \sigma, \tau)$$

Отсюда, а также из формулы (3.5) и доказанной леммы получим следующее соотношение:

$$(M(\tau - \sigma) + J_1(\tau - \sigma, \tau)S_1) \overset{*}{-} (f(\tau) - f(\tau - \sigma))S_2 = M(\tau) \tag{3.7}$$

Покажем теперь, что

$$(M(\tau - \sigma) + J_1(\tau - \sigma, \tau)S_1) \overset{*}{-} J_2(\tau - \sigma, \tau)S_2 \supset M(\tau) + \varepsilon_1 S_2 \tag{3.8}$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = f(\tau) - f(\tau - \sigma) - J_2(\tau - \sigma, \tau) \geqslant 0 \tag{3.9}$$

Обозначим через I множество, стоящее в левой части доказываемого включения (3.8). Тогда из свойства (2.7) и из (3.9) следует, что

$$I = (M(\tau - \sigma) + J_1(\tau - \sigma, \tau)S_1 + \varepsilon_1 S_2) \overset{*}{-} (f(\tau) - f(r - \sigma))S_2$$

Отсюда, применяя вначале свойство (2.5), а затем равенство (3.7), получим включение (3.8).

Подставим множество (3.6) в правую часть доказываемого включения (2.3). Множество, получаемое в результате этой подстановки, обозначим через I_1. Согласно свойству (2.5) будем иметь следующее включение:

$$I_1 \supset ((M(\tau - \sigma) + J_1(\tau - \sigma, \tau)S_1) \overset{*}{-} J_2(\tau - \sigma, \tau)S_2) + (f(\tau - \sigma) - \\ - J_2(0, \tau - \sigma))S_2$$

Отсюда, используя доказанное соотношение (3.8) и обозначение (3.9), получим требуемое включение $I_1 \supset W(\tau)$.

Из доказанного утверждения, а также из формул (1.3), (2.2) следует, что из начального положения z_0 первый игрок сможет осуществить попадание вектора z на терминальное множество (1.2) в момент времени $t_1 > 0$, если

$$\pi e^{t_1 C} z_0 \in \int_0^{t_1} (y_1(t) - y_2(t))\, dt + M(t_1) + (f(t_1) - J_2(0, t_1) S_2 \tag{3.10}$$

В работе [6] введено понятие первого момента поглощения. Известно [7], что в ряде случаев возможно окончание игры за время, равное первому моменту поглощения. Приведем достаточные условия, при выполнении которых в рассматриваемом классе игр возможно окончание игры за время, равное первому моменту поглощения.

При выполнении условия (2.1), если существует первый момент поглощения $t_1 = t_1(z_0)$, выполняется следующее включение:

$$\pi e^{t_1 C} z_0 \in \int_0^{t_1} (y_1(t) - y_2(t))\, dt + (X + J_1(0, t_1) S_1) \overset{*}{-} J_2(0, t_1) S_2 \tag{3.11}$$

Из включений (3.10) и (3.11) видно, что искомые достаточные условия можно получить, если потребовать равенства множеств, стоящих в правых частях этих включений. Для этого, как следует из формулы (3.5), достаточно потребовать, чтобы $f(\tau) = J_2(0, \tau)$. Последнее равенство выполняется, если, как это видно из уравнения (3.1), справедливо следующее неравенство:

$$k_2(\tau) \int_0^{\tau} k_1(t)\, dt \geqslant k_1(\tau) \int_0^{\tau} k_2(t)\, dt, \quad \tau \geqslant 0 \tag{3.12}$$

Таким образом, если терминальное множество имеет вид (1.2), выполнены условия (2.1) и неравенство (3.12), то игра может быть закончена за время, равное первому моменту поглощения.

Поступила 30 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
3. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966.
4. *Пшеничный Б. Н.* Игра с простым движением и выпуклым терминальным множеством. Теория оптимальных решений. Тр. Ин-та кибернетики, 1969, № 3.
5. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
6. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
7. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.