УДК 62.50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ОДНОГО ИГРОКА

В. А. Корнеев, А. А. Меликян

(Москва)

Рассматривается дифференциальная игра сближения, в которой минимизирующий игрок импульсно управляет своим ускорением. Противник управляет своей скоростью, ограниченной по величине. Решена задача об оптимальном распределении моментов импульсов при фиксированном их числе. Работа близка по тематике к исследованиям [1–3].

1. Постановка задачи. Пусть движение игроков X и Y на фиксированном интервале времени $[0, T]$ задается уравнениями движения с начальными условиями

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = u, \qquad y^{\cdot} = v \tag{1.1}$$

$$x_1(0) = x_1^{\circ}, \qquad x_2(0) = x_2^{\circ}, \qquad y(0) = y^{\circ}$$

Размерности векторов x_1, x_2, u, y, v одинаковы и произвольны. На интервале $[0, T]$ фиксированы n моментов времени t_i, $i = 1, \ldots, n$, причем

$$t_0 = 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} = T \tag{1.2}$$

Реализации $u(t)$ управления игрока X и $v(t)$ — игрока Y подчинены следующим ограничениям ($\delta(t)$ — дельта-функция):

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta(t - t_k), \qquad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant Q, \qquad Q > 0; \qquad |v(t)| \leqslant 1 \tag{1.3}$$

Таким образом, скорость игрока X в момент t_k претерпевает скачок величиной u_k. Целью игрока является минимизация функционала

$$J = |x_1(T) - y(T)| \tag{1.4}$$

Игрок Y, напротив, максимизирует функционал (1.4), реализуя интегрируемые управления $v(t)$, подчиненные ограничению (1.3).

Будем считать, что игроку X известны соотношения (1.1) — (1.4), а фазовый вектор противника он наблюдает лишь в моменты t_i, $i = 1, \ldots, n$, т. е. непосредственно перед импульсом. Следовательно, величины u_k в (1.3) можно считать функциями вида $u_k = u_k(x_{1k}, x_{2k}, y_k)$, где x_{1k}, x_{2k}, y_k — значения векторов непосредственно перед k-м импульсом. Управления (1.3) с такими u_k будем называть стратегиями игрока X.

Задача 1. Найти оптимальную гарантированную стратегию u^* игрока X и гарантированное значение J^* функционала (1.4), удовлетворяющее соотношению

$$J^* = \min_u \sup_v J[u, v] = \sup_v J[u^*, v] \tag{1.5}$$

Здесь $J[u, v]$ — значение функционала (1.4), соответствующее данным стратегии u и управлению v.

2. Эквивалентная многошаговая игра. Введением переменной $z(t) = x_1(t) + (T - t) x_2(t) - y(t)$ соотношения (1.1) и функционал (1.4) можно привести к простому виду

$$z^{\cdot} = (T - t) u + v, \qquad t \in [0, T]; \qquad J = |z(T)| \tag{2.1}$$

$$z(0) = z^{\circ} = x_1^{\circ} + T x_2^{\circ} - y^{\circ}$$

Далее, используя технику сведения дифференциальных игр с неполной информацией к эквивалентным играм с полной информацией (см. [4,5]), игру (2.1), (1.3) можно заменить игрой

$$z_{k+1} = z_k + (T - t_k) u_k + (t_{k+1} - t_k) v_k, \qquad z_k = z(t_k - 0) \tag{2.2}$$

$$z_0 = z^{\circ}, \qquad u_0 = 0, \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant Q, \quad |v_k| \leqslant 1, \quad k = 0, \ldots, n, J = |z_{n+1}|$$

Равенство $u_0 = 0$ отражает то обстоятельство, что игрок X до момента первого импульса не управляет своим движением. Введем скалярную переменную q_k — оставшийся ресурс управления

$$q_0 = q_1 = Q, \quad q_k = Q - \sum_{i=1}^{k-1} |u_i| \geqslant 0, \quad k = 2, \ldots, n+1 \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует рекуррентное соотношение

$$q_0 = Q, \ q_{k+1} = q_k - |u_k|, \qquad |u_k| \leqslant q_k, \qquad k = 0, \ldots, n \tag{2.4}$$

Объединяя (2.2) и (2.4), получим многошаговую игру

$$\begin{gathered} z_{k+1} = z_k + (T - t_k) u_k + (t_{k+1} - t_k) v_k \\ q_{k+1} = q_k - |u_k|, \ |u_k| \leqslant q_k, \ |v_k| \leqslant 1, \quad k = 0, \ldots, n \\ z_0 = z,^\circ \qquad q_0 = Q, \qquad J = |z_{n+1}| \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для решения игры (2.5) введем в рассмотрение функцию Беллмана $S_k(z_k, q_k)$, равную минимальному гарантированному для игрока X значению функционала J из (2.7) при условии, что игра начинается с k-го шага, причем значения фазовых переменных равны z_k, q_k. Эта функция удовлетворяет рекуррентному соотношению с граничным условием (см. [5])

$$\begin{gathered} S_k(z_k, q_k) = \min_{|u_k| \leqslant q_k} \max_{|v_k| \leqslant 1} S_{k+1}(z_{k+1}, q_{k+1}) \\ k = 0, 1, \ldots, n, \qquad S_{n+1}(z_{n+1}, q_{n+1}) = |z_{n+1}| \end{gathered} \tag{2.6}$$

Гарантированное значение функционала (1.5) имеет вид $J^* = S_0'(z^\circ, Q)$. Непосредственно проверкой можно убедиться, что задача (2.6), (2.5) имеет единственное решение

$$\begin{gathered} S_k(z_k, q_k) = \max \{f_k^{\ k}, f_{k+1}^k, \ldots, f_n^{\ k}, f_{n+1}^k\} \\ f_m^{\ k} = \vartheta_m \left(\sum_{i=k+1}^{m} \frac{\vartheta_{i-1}}{\vartheta_i} - m + k + 1 + \frac{|z_k| - \vartheta_k q_k}{\vartheta_k} \right) \\ m = k, k+1, \ldots, n, \qquad f_{n+1}^k = \vartheta_n, \qquad k = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} S_0(z^\circ, Q) = \max \{f_1^\circ, \ldots, f_{n+1}^\circ\} = J^* \\ f_m^\circ = \vartheta_m \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\vartheta_{i-1}}{\vartheta_i} - m + 1 + \frac{|z^\circ| - \vartheta_1 Q}{\vartheta_1} \right). \\ m = 1, \ldots, n, \ f_{n+1}^\circ = \vartheta_n; \ \vartheta_m = T - t_m, \ m = 0, \ldots, n+1 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Некоторое отличие формулы (2.8) от (2.7) объясняется тем, что первый шаг в (2.2) является нестандартным ($u_0 = 0$).

Величина f_k°, $k = 1, \ldots, n$ в (2.8) соответствует случаю, когда весь ресурс Q расходуется на первые k импульсов; величина f_{n+1}° соответствует случаю, когда после n-го импульса остается ненулевой ресурс.

Вычисление экстремумов в (2.6) дает следующие оптимальные импульсы в игре (2.5):

$$\begin{gathered} u_m^* = -\frac{z_m}{\vartheta_m}, \quad |z_m| \leqslant \vartheta_m q_m; \quad u_m^* = -\frac{z_m}{|z_m|} q_m \\ |z_m| > \vartheta_m q_m, \qquad m = 1, \ldots, n \\ v_k^* = \frac{z_k}{|z_k|}, \quad z_k \neq 0; \quad v_k^* = e, \quad |e| = 1, \quad z_k = 0; \quad k = 0, 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{2.9}$$

3. Оптимизация моментов импульсов. Выше моменты импульсов считались фиксированными. Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 2. Пусть игроку X до начала игры известны величины z° и Q. Найти такое распределение t_i^*, $i = 1, \ldots, n$ моментов (1.2), при котором величина (1.5) или, что то же самое, — (2.8), принимает свое минимальное значение.

Ясно, что искомое распределение можно найти, минимизируя величину (2.6) по моментам $\{t_i\}$ при ограничениях (1.2). В терминах ϑ_i из (2.8) ограничения (1.2) имеют вид

$$T = \vartheta_0 \geqslant \vartheta_1 \geqslant \ldots \geqslant \vartheta_n \geqslant \vartheta_{n+1} = 0 \tag{3.1}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$|z^\circ| - TQ \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Из (2.8) следует, что при любом распределении ϑ_i вида (3.1) имеет место

$$f_1^\circ \geqslant f_2^\circ \geqslant \ldots \geqslant \overset{\circ}{f}_{n+1}, \qquad J^* = f_1^\circ = |z^\circ| - \vartheta_1 Q + \vartheta_0$$

Таким образом, в случае (3.2) величина J^* зависит только от ϑ_1. Оптимальное значение ϑ_1^* величины ϑ_1 находится из условия

$$J^\circ = \min_{0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_0} J^* = |z^\circ| + \vartheta_0(1 - Q) = |z^\circ| + T(1 - Q)$$

и равно T, т. е. $t_1^* = t_0 = 0$. Итак, при выполнении (3.2) весь ресурс тратится в начальный момент времени. Пусть теперь имеет место случай

$$|z^\circ| - TQ < 0 \tag{3.3}$$

Из (2.8) следует, что для любого распределения $\{\vartheta_i\}$ при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant n + 1$ выполнены соотношения

$$f_1^\circ \leqslant \ldots \leqslant \overset{\bullet}{f}_{k-1} < f_k^\circ \geqslant \overset{\bullet}{f}_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant \overset{\bullet}{f}_{n+1}, \qquad J^* = f_k^\circ \tag{3.4}$$

$$\vartheta_k < \vartheta_{k-1} \tag{3.5}$$

Из (3.4) следует, что на оптимальном наборе $\{\vartheta_i^*\}$, быть может не единственном, можно считать выполненным либо соотношение (3.4) при $k = n + 1$, либо

$$f_1^\circ = \ldots = \overset{\circ}{f}_{n-k+1} \leqslant \ldots \leqslant \overset{\bullet}{f}_{n-1} < f_n^\circ \geqslant \overset{\circ}{f}_{n+1} \tag{3.6}$$

Действительно, если в (3.4) для $\{\vartheta_i^*\}$ имеет место $k \neq n + 1$, то построим набор $\{\vartheta_i'\}$, $\vartheta_i' = \overset{\bullet}{\vartheta}_{k-n+i}$, $i = n - k + 1, \ldots, n$, $\vartheta_i' = \vartheta_1^*$, $i = 1, \ldots, n - k$. С помощью (2.8) и (3.4) получаем, что на наборе $\{\vartheta_i'\}$ выполнено условие (3.6) с прежним значением J°.

Покажем, что на оптимальном наборе имеет место равенство

$$f_n^\circ = \overset{\circ}{f}_{n+1} = \vartheta_n^* = J^\circ \tag{3.7}$$

Предположим противное: $f_n^\circ \neq \overset{\circ}{f}_{n+1}$. При $f_n^\circ > \overset{\bullet}{f}_{n+1}$ из (3.6) и (3.5) следует $\vartheta_n^* < \overset{\bullet}{\vartheta}_{n-1}$. Заметим, что функции f_k° из (2.8) обладают свойством $\partial f_k^\circ / \partial\vartheta_k < 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда существует вариация $\delta\vartheta_n > 0$ момента ϑ_n^*, такая, что на проварьированном наборе сохраняется условие (3.6), а величина $f_n^\circ = J^\circ$ строго уменьшается. При $f_n^\circ < \overset{\bullet}{f}_{n+1}$ имеем из (3.5): $\vartheta_{n+1} < \vartheta_n$. Тогда найдется вариация $\delta\vartheta_n < 0$ момента ϑ_n^*, такая, что на проварьированном наборе величина $J^\circ = \overset{\circ}{f}_{n+1}$ строго уменьшается. Поэтому, выбрав в качестве ϑ_n величину $\vartheta_n + \delta\vartheta_n$, где $\delta\vartheta_n$ — достаточно малое положительное число, можно строго уменьшить величину f_n° и, тем самым, значение функционала J°. Получили противоречие, ибо по предположению J° — минимальное значение функционала.

Итак, на оптимальном наборе $\{\vartheta_i^*\}$ имеет место равенство (3.7) или, после сокращения на ϑ_n

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\vartheta_{i-1}}{\vartheta_i} - n + \frac{|z^\circ| + \vartheta_1 Q}{\vartheta_1} = 0 \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) эквивалентно требованию, что за n шагов должен быть израсходован весь ресурс Q. Соотношение $J^* = \vartheta_n = f_n^\circ$ задает величину J^* в виде функции от $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$. Оптимальный набор $\{\vartheta_i^*\}$ является точкой экстремума функции f_n°.

Нетрудно проверить, что при

$$|z^\circ| < TQ / n \tag{3.9}$$

точка экстремума является внутренней точкой области (3.1). Имеем, следовательно

$$\partial f_n^\circ / \partial \vartheta_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{3.10}$$

откуда с помощью (2.8) получаем

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{|z^\circ| + \vartheta_0}{\vartheta_1}, \quad \frac{\vartheta_{k-1}}{\vartheta_k} = \frac{\vartheta_k}{\vartheta_{k+1}}, \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{3.11}$$

Равенства (3.11) вместе с (3.8) представляют собой n уравнений, из которых определяются ϑ_k^*

$$\vartheta_k^* = (|z^\circ| + T)\left(\frac{n}{Q+n}\right)^k, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.12}$$

В случае (3.9) все точки (3.12) располагаются строго внутри интервала движения. Если выполнено условие

$$TQ/n \leqslant |z^\circ| < TQ \tag{3.13}$$

то в точке экстремума функции f_n° переменная ϑ_1 принимает граничное значение $\vartheta_1^* = \vartheta_0 = T$. Для переменных $\vartheta_k, k = 2, \ldots, n-1$ выполнены условия вида (3.10), (3.11), из которых можно получить оптимальный набор для случая (3.13)

$$\vartheta_k^* = T\left(\frac{n-1}{Q - |z^\circ| / T + n - 1}\right)^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

Построенное выше решение можно использовать для нестрогого рассмотрения непрерывного аналога игры (1.1) — (1.4), в котором игрок X ведет наблюдение на всем интервале $[0, T]$ и применяет конечно-импульсное управление при ограничении

$$\int_0^T |u(t)|\, dt \leqslant 0$$

Из (3.14) следует,что при $n \to \infty$ момент подачи последнего импульса и значение функционала стремятся к величинам

$$t_\infty = T - \vartheta_\infty, \quad \vartheta_\infty = Te^{|z^\circ|/T - Q}$$

Предельное при $n \to \infty$ оптимальное поведение игрока предполагает знание вектора $v(t)$ и состоит в следующем. В начальный момент подается импульс интенсивности $z^\circ| / T$, затем на интервале $(0, t_\infty]$ применяется управление $u(t) = v(t) / (T - t)$, которое до исчерпания всех ресурсов сохраняет нулевое значение вектора $z(t)$.

Отметим, что полученный при $|z^\circ| < TQ$ предельный результат совпадает с результатом, полученным на основе теории, развитой в [3].

Поступила 9 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбунов В. К., Черноусько Ф. Л.* Задача оптимальной многоимпульсной коррекции возмущений. Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.
2. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
3. *Ухоботов В. И.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
4. *Меликян А. А., Черноусько Ф. Л.* О дифференциальных играх с переменными условиями информированности. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1.
5. *Меликян А. А.* О минимальных наблюдениях в одной игре сближения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.