Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.374

О КРУЧЕНИИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

П. П. Мосолов

(Москва)

Для некоторого класса анизотропных неоднородных жесткопластических сред в задаче о кручении цилиндра с произвольным поперечным сечением дано обоснование формулы для предельного момента, выведена формула для скорости депланации поперечного сечения и в случае односвязного поперечного сечения доказана теорема единственности.

1. Постановка задачи. Жесткопластическая среда [1] определяется своим диссипативным потенциалом $\varphi(x, e_{ij})$ [2] — положительной, полуаддитивной, положительно-однородной первой степени функцией e_{ij}, не зависящей от следа матрицы e_{ij}.

Пусть на среду в объеме ω действуют внешние силы с объемной плотностью f_v и поверхностной плотностью f_s. Одной из важнейших величин в теории жесткопластической среды является коэффициент предельной нагрузки c_* для данной системы внешних сил, определяемый по формуле

$$\frac{1}{c_*} = \sup_{\mathbf{u}} \left[\left(\int_{\omega} \mathbf{f}_v \mathbf{u}\, d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{f}_s \mathbf{u}\, dS \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_{\omega} \varphi(x, e_{ij}(x))\, d\omega \right)^{-1} \right], \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.1}$$

где $\partial\omega$ — граница ω. Вектор-функции $\mathbf{u}(x)$ в (1.1) образуют линейное пространство, соленоидальны и удовлетворяют определенным краевым условиям.

Обозначим $\varphi^\circ(x, \sigma_{ij})$ поляру для $\varphi(x, e_{ij})$ [3], т. е. функцию, обладающую свойствами: $\varphi^\circ(x, \sigma_{ij})$ — положительная, полуаддитивная, положительно-однородная первой степени функции σ_{ij} (матрицы σ_{ij} предполагаются имеющими нулевой след), причем для всех σ_{ij}, e_{ij}

$$\varphi^\circ(x, \sigma_{ij})\, \varphi(x, e_{ij}) \geqslant \sum_{ij} \sigma_{ij} e_{ij} \tag{1.2}$$

Для любых $e = (e_{ij})$ существуют $\sigma_{ij}(e)$, $\sum\limits_{ij} \sigma_{ij}^2(e) > 0$, такие, что в (1.2) имеет место равенство.

Можно показать, что условие текучести для жесткопластической среды дается равенством $\varphi^\circ(x, \sigma_{ij}) = 1$.

Постановка задачи о кручении жесткопластического стержня аналогична соответствующей постановке задачи для линейно-упругого стержня

[4] и состоит в следующем. Пусть ω — цилиндр

$$\omega = D \times [0, H], \quad (x_1, x_2) \in D, \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant H$$

Краевые условия на $\mathbf{u}(x)$ предполагаются имеющими вид:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = (0,\ 0,\ g_1(x_1, x_2)),\ \mathbf{u}(x_1, x_2, H) = (-\alpha x_2,\ \alpha x_1\, g_2(x_1, x_2))$$

где g_1, g_2 — произвольные функции, α — произвольное действительное число. Внешние силы действуют только на торце $x_3 = H$ и $\mathbf{f}_s = (-x_2, x_1, 0)$.

Пусть c_* — коэффициент предельной нагрузки в задаче о кручении (предельный момент). Обозначим $[\sigma_{ij}]$ систему функций, в которой σ_{13}, σ_{23} произвольны, остальные σ_{ij} равны нулю. Пусть $\lambda\ (x_1, x_2)$ — гладкая функция, $\lambda\mid_{\partial D} = \mathrm{const}$. Обозначим $[\sigma_{ij}]\ (\lambda)$ систему функций $[\sigma_{ij}]$, в которой $\sigma_{13} = \partial\lambda / \partial x_2$, $\sigma_{23} = -\partial\lambda / \partial x_1$. Тогда, если $\varphi^\circ\ (x, [\sigma_{ij}]\ (\lambda)) \leqslant 1$, то $c_* \geqslant A_1 / A_2$

$$A_1 = -\int\limits_D \left(x_1 \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right) d\mu, \quad A_2 = \int\limits_D (x_1^2 + x_2^2)\, d\mu$$

Рассмотрим вектор-функции $\mathbf{U} = (-x_2 x_3,\ x_1 x_3,\ u\,(x_1, x_2))$. Очевидно, $\mathbf{U}$ входят в класс допустимых $\mathbf{u}\,(x)$. Полагая $2e_{13} = \partial u / \partial x_1 - x_2$, $2e_{23} = \partial u / \partial x_2 + x_1$ и предполагая, что $\varphi\,(x, e_{ij}) = \varphi\,(x_1, x_2, e_{ij})$, найдем

$$\text{(1.3)} \qquad \sup_{\lambda \in \Lambda} A_1 \leqslant c_* A_2 \leqslant \inf_u \int\limits_D \varphi\,(x_1, x_2, [e_{ij}])\, d\mu$$

$$\Lambda : \lambda|_{\partial D} = \mathrm{const}, \quad \varphi^\circ\,(x_1, x_2, [\sigma_{ij}]\,(\lambda)) \leqslant 1$$

2. Вычисление предельного момента. Предположим, что $\varphi^\circ\,(x_1, x_2, [\sigma_{ij}])$ — поляра для $\varphi\,(x_1, x_2, [e_{ij}])$. Это условие будет выполнено, если

$$\inf_{e'} \varphi\,(x_1, x_2, e_{ij}) = \varphi\,(x_1, x_2, [e_{ij}]), \quad e' = \{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}, \quad e_{33} = -e_{11} - e_{22}$$

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ из R^2. Положим $\psi\,(x_1, x_2, \mathbf{e}) = \varphi\,(x_1, x_2, [e_{ij}])$, где $e_1 = 2e_{13}$, $e_2 = 2e_{23}$. Тогда $\psi^\circ\,(x_1, x_2, \sigma) = \varphi^\circ\,(x_1, x_2, [\sigma_{ij}])$, где $\sigma_1 = \sigma_{13}$, $\sigma_2 = \sigma_{23}$ ($\psi^\circ\,(x_1, x_2, \sigma)$ — поляра для $\psi\,(x_1, x_2, \mathbf{e})$). Перепишем (1.3) в виде

$$\text{(2.1)} \qquad \sup_{\lambda \in \Lambda} A_1 \leqslant c_* A_2 \leqslant \inf_u \int\limits_D \psi\,(x_1, x_2, \nabla u - \mathbf{t}_0)\, d\mu$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

$$\mathbf{t}_0 = (x_2, -x_1), \quad \Lambda : \lambda|_{\partial D} = \mathrm{const}, \quad \psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda) \leqslant 1$$

$$G\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}, -\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)$$

Обозначим $\overline{\Lambda}$ совокупность $\lambda\,(x_1, x_2)$, для которых

$$\lambda\mid_{\partial D} = \mathrm{const}, \quad \operatorname{vrai\,max} \psi^\circ\,(x_1, x_2, G\lambda) \leqslant 1$$

Теорема 1. Если D — ограниченная область с достаточно гладкой границей, $\psi\,(x_1, x_2, \mathbf{e})$ — достаточно гладкая функция своих аргументов при $|\mathbf{e}| > 0$ и $\mathbf{t}\,(x_1, x_2)$ — достаточно гладкая вектор-функция, то

$$\text{(2.2)} \qquad \inf_u \int\limits_D \psi\,(x_1, x_2, \nabla u - \mathbf{t})\, d\mu = \sup_{\lambda \in \overline{\Lambda}} -\int\limits_D \mathbf{t} G\lambda\, d\mu$$

Доказательство. Пусть $\Phi_\varepsilon(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая выпуклая функция ξ, $\xi \geqslant 0$, причем $\Phi_\varepsilon(\xi) = \xi$ при $\xi \geqslant \varepsilon$, $\Phi_\varepsilon'(\xi) \leqslant 1$, $\Phi_\varepsilon^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Положим $\psi_\varepsilon(x_1, x_2, \mathbf{e}) = \Phi_\varepsilon(\psi(x_1, x_2, \mathbf{e}))$. Тогда

$$0 \leqslant \psi_\varepsilon(x_1, x_2, \mathbf{e}) - \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}) \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

$$\mathbf{e}\nabla_e\psi_\varepsilon(x_1, x_2, \mathbf{e}) \leqslant \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}) \leqslant \varepsilon + \mathbf{e}\nabla_e\psi_\varepsilon(x_1, x_2, \mathbf{e})$$

Рассмотрим функционал

$$I_\varepsilon(v) = \int_G \left[\frac{\varepsilon}{2}(\nabla v - \mathbf{t})^2 + \psi_\varepsilon(x_1, x_2, \nabla v - \mathbf{t})\right] d\mu$$

Пусть u_ε минимизирует $I_\varepsilon(v)$. Эта функция [5,6] из $C_2(\bar{D})$ и удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{div} \mathbf{Q}_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{Q}_\varepsilon\mathbf{n} \mid_{\partial D} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \varepsilon(\nabla u_\varepsilon - \mathbf{t}) + \nabla_e\psi_\varepsilon(x_1, x_2, \nabla u_\varepsilon - \mathbf{t}), \quad \mathbf{n} \text{ — нормаль к } \partial D$$

Из (2.4) следует, что

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = G\lambda_\varepsilon \tag{2.5}$$

Из второго равенства в (2.4) и (2.5) находим, что $\lambda_\varepsilon \mid_{\partial D} = \text{const}$. Кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int_D \varepsilon^2(\nabla u_\varepsilon - \mathbf{t})^2 d\mu \to 0 \tag{2.6}$$

$$\psi^\circ(x_1, x_2, \varepsilon(\nabla u_\varepsilon - \mathbf{t})) + 1 \geqslant \psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_\varepsilon)$$

В силу (2.6) λ_ε равномерно по ε ограничены в $W_2^1(D)$ и существует λ_0 из $W_2^1(D)$ (слабо предельная точка λ_ε), такая, что

$$\lambda_0 |_{\partial D} = \text{const}, \quad \int_{D'} d\mu \geqslant \int_{D'} [\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0)]^2 d\mu, \quad D' \subseteq D$$

Таким образом, $\operatorname{vrai\,max} \psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0)^- \leqslant 1$.

Из (2.5), (2.3) находим

$$\int_D (\nabla u_\varepsilon - \mathbf{t}) G\lambda_\varepsilon d\mu + \varepsilon \operatorname{mes} D \geqslant I_0(u_\varepsilon), \quad I_0(v) = I_\varepsilon(v)|_{\varepsilon=0}$$

Отсюда следует неравенство

$$-\int_D \mathbf{t}G\lambda_0 d\mu \geqslant \inf_u \int_D \psi(x_1, x_2, \nabla u - \mathbf{t}) d\mu \tag{2.7}$$

Из неравенств (2.1), (2.7) вытекает утверждение теоремы 1.

Теорема 1 допускает усиление. Именно, если D — конечно связанная область с кусочно-гладкой границей, $\psi(x_1, x_2, \mathbf{e})$ — непрерывная функция своих аргументов, то справедливо равенство (2.2), при этом $\bar{\Lambda}$ можно заменить на Λ.

Отметим, что c_* дает оценку снизу предельного момента в задаче о стесненном кручении, т. е. при краевых условиях вида

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{u}(x_1, x_2, H) = (-\alpha x_2, \alpha x_1, 0)$$

3. Формулы для скорости депланации поперечного сечения цилиндра. Получим формулы для $u_0(x_1, x_2)$, минимизирующей $I_0(v)$. Очевидно, что

$$\inf_v I_0(v) \geqslant \inf_{\mathbf{p}} \int_D [\psi(x_1, x_2, \mathbf{p}-\mathbf{t}) - \mathbf{p}G\lambda_0]\, d\mu \tag{3.1}$$

где λ_0 (функция напряжения [1]) удовлетворяет почти всюду в D условиям: $\lambda_0|_{\partial D} = \text{const}$, $\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0) = 1$; $\lambda_0(x_1, x_2)$ — непрерывная функция. Кроме того, на λ_0 ниже будут наложены еще некоторые условия.

Значения $\mathbf{p}$, при которых подынтегральное выражение в правой части (3.1) достигает наименьшего значения, определяются из системы

$$\nabla_p \psi(x_1, x_2, \mathbf{p}-\mathbf{t}) = G\lambda_0$$

Таким образом, если найти функцию u_0, удовлетворяющую переопределенной системе уравнений

$$\nabla_p \psi(x_1, x_2, \Delta u_0 - \mathbf{t}) = G\lambda_0 \tag{3.2}$$

то $u_0(x_1, x_2)$ минимизирует $I_0(v)$.

Предположим, что $\psi(x_1, x_2, \mathbf{e})$, $\psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{e})$ — гладкие функции своих аргументов при $|\mathbf{e}| > 0$. Отсюда следует, что при фиксированных x_1, x_2 для любого $\mathbf{q}$ существует единственный вектор $\mathbf{e}(\mathbf{q})$, такой, что $\nabla_e \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}(\mathbf{q})) \parallel \mathbf{q}$ (параллелен).

Лемма 1. Соотношение $\psi(x_1, x_2, \mathbf{e})\, \psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{q}) = \mathbf{eq}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\nabla_e \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}) \parallel \mathbf{q}$.

Утверждение леммы вытекает из геометрических свойств скалярного произведения.

Следствие 1. Соотношения $\nabla_e \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}) \parallel \mathbf{q}$ и $\nabla_q \psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{q}) \parallel \mathbf{e}$ эквивалентны.

Следствие 2. Для любого $\mathbf{e}\ (|\mathbf{e}| > 0)$: $\mathbf{e} = \psi(x_1, x_2, \mathbf{e})\, \nabla_q \psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{q})\, |_{\mathbf{q} = \nabla_e \psi(x_1, x_2, \mathbf{e})}$

Лемма 2. Системы уравнений $\psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{q})\, \nabla_e \psi(x_1, x_2, \mathbf{e}) = \mathbf{q}$, $\psi(x_1 x_2, \mathbf{e})\, \nabla_q \psi^\circ(x_1, x_2, \mathbf{q}) = \mathbf{e}$ ($\mathbf{q}$ — данный вектор) эквивалентны и с точностью до множителя однозначно разрешимы.

Доказательство. Эквивалентность системы вытекает из следствия 2, их однозначная разрешимость следует из свойств $\psi(x_1, x_2, \mathbf{e})$.

Итак, в силу леммы 2, система (3.2) эквивалентна системе

$$\nabla u_0 - \mathbf{t} = \psi(x_1, x_2, \nabla u_0 - \mathbf{t})\, \nabla_q \psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0) \tag{3.3}$$

Рассмотрим сначала двусвязные области D, ограниченные кусочно-гладкими контурами Γ_1, Γ_2 (Γ_2 лежит внутри Γ_1). Частным случаем таких областей являются односвязные области, когда Γ_2 стягивается в точку. Пусть λ_0 — гладкая функция в D, кроме, быть может, конечного числа гладких кривых и

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_0|_{\Gamma_1} = 0, \quad \lambda_0|_{\Gamma_2} = \text{const}, \quad \psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0) = 1$$

Совокупность этих гладких кривых и Γ_2 будем называть множеством особенностей Γ.

Рассмотрим в D поле направлений $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = -G\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0) \,/\, |G\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0)|$$

Пусть $\mathbf{l}$ — единичный касательный вектор к линии уровня $\lambda_0 = c$, задающий обход области $\lambda_0 \geqslant c$ против часовой стрелки. Так как $(\nabla\lambda_0, \mathbf{v}) > 0$ в $D \setminus \Gamma$, то линии уровня λ_0 и интегральные кривые поля $\mathbf{v}$ образуют в $D \setminus \Gamma$ регулярную сеть линий. Пусть s — длина дуги на Γ_1, отсчитываемая от некоторой точки на Γ_1 в направлении $\mathbf{l}$, $0 \leqslant s \leqslant L$. Фиксируем точку s на Γ_1 и введем на интегральной кривой поля $\mathbf{v}$, проходящей через точку, параметр n. Именно, точке (x_1, x_2) на интегральной кривой соответствует $n = \lambda_0 (x_1, x_2)$. Из условия $(\nabla\lambda_0, \mathbf{v}) > 0$ следует, что различным точкам интегральной кривой соответствуют различные значения n, $0 \leqslant n \leqslant n(s)$. Относительно λ_0 предполагается, что через каждую точку $D \setminus \Gamma$ проходит интегральная кривая поля $\mathbf{v}$, выходящая из Γ_1. Таким образом, имеем систему

$$x_1 = x_1 (s, n), \quad x_2 = x_2 (s, n) \tag{3.4}$$

которая при фиксированном s определяет интегральную траекторию поля $\mathbf{v}$, а при фиксированном n, когда s из области определения (3.4) определяет линию уровня λ_0, параметризованную s.

Пусть область изменения s при фиксированном n состоит из конечного числа отрезков $s_i^n \leqslant s \leqslant s_{i+1}^n$, $i = 1, \ldots, r(n)$, причем $s_i^n < s < s_{i+1}^n$ дает отображение в $D \setminus \Gamma$, либо в Γ, (s_i^n, n) — точки Γ. В каждом интервале $s_i^n < s < s_{i+1}^n$ введем натуральную параметризацию куска линии уровня $\lambda_0 = n : \sigma = \sigma (s, n)$, $\partial\sigma / \partial s \geqslant 0$.

Итак, (3.4) определяет криволинейные координаты в D и

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = (\nabla\lambda_0, \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial n}, \qquad \frac{\partial}{\partial l} = \frac{1}{\partial\sigma / \partial s} \frac{\partial}{\partial s}$$

Можно показать, что система (3.3) эквивалентна соотношениям

$$\partial u_0 / \partial l \geqslant (\mathbf{t}, \mathbf{l}) \quad \partial u_0 / \partial \mathbf{v} = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$$

из которых следует, что

$$u_0 (s, n) = \int_0^n \frac{\mathbf{t}(s, \mu) \mathbf{v}(s, \mu)}{\nabla\lambda_0(s, \mu) \mathbf{v}(s, \mu)} d\mu + q(s), \quad q(L) - q(0) \leqslant 0 \tag{3.5}$$

$$q'(s) \geqslant \frac{\partial\sigma}{\partial s} \mathbf{tl} - \int_0^n \frac{\partial}{\partial s} \frac{\mathbf{tv}}{\nabla\lambda_0 \mathbf{v}} d\mu = A(s, n) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial\sigma}{\partial s} \frac{B}{\nabla\lambda_0 \mathbf{v}} + \mathbf{t}\boldsymbol{\gamma}, \quad B = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{l} - \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial l} \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\mathbf{l} \frac{\partial\sigma}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{v}}{\nabla\lambda_0 \mathbf{v}} \right)$$

Лемма 3. Справедливы равенства

$$\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad B = \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_2} - \frac{\partial t_2}{\partial x_1} \right) \nabla\lambda_0 \mathbf{v}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из равенств

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \Big/ \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial n} (\nabla\lambda_0, \mathbf{v}) \tag{3.7}$$

Второе утверждение доказывается переходом к координатам (x_1, x_2) в выражении для B в (3.6).

Предположим, что

$$(3.8) \qquad \partial t_1/\partial x_2 - \partial t_2/\partial x_1 \geqslant 0 \quad \text{в } D$$

Условие (3.8) выполнено для $\mathbf{t}_0$ в (2.1.). Из леммы 3 и условия (3.8) следует, что (3.6) эквивалентно неравенству

$$(3.9) \qquad q'(s) \geqslant A(s, \quad n(s))$$

Положим $q(s) = Q(s) + p(s)$, где $p'(s) \geqslant 0$, а $Q'(s)$ равно правой части в (3.9). Тогда

$$(3.10) \qquad u_0(s, n) = P_1(s, n) + P_2(s) + p(s)$$

$$P_1(s, n) = -\int\limits_n^{n(s)} \frac{\mathbf{t}(s, \mu)\, \mathbf{v}(s, \mu)}{\nabla\lambda_0(s, \mu)\, \mathbf{v}(s, \mu)}\, d\mu$$

$$P_2(s) = \int\limits_0^s \mathbf{t}(\alpha, n(\alpha)) \left(\frac{\partial\sigma(\alpha, n)}{\partial\alpha} \bigg|_{n=n(\alpha)} \mathbf{l}(\alpha, n(\alpha)) + \right.$$
$$\left. + \frac{n'(\alpha)\, \mathbf{v}(\alpha, n(\alpha))}{\nabla\lambda_0(\alpha, n(\alpha))\, \mathbf{v}(\alpha, n(\alpha))} \right) d\alpha$$

Заметим, что

$$P_1(s, n) = \int\limits_{C_1} \mathbf{t}(\tau)\, \mathbf{m}(\tau)\, d\tau, \quad \mathbf{m}(\tau) = -\mathbf{v}(\tau)$$

где C_1 — кусок интегральной кривой поля $\mathbf{v}$ от точки (s, n) до $(s, n(s))$, τ — длина дуги вдоль этой кривой. Кривая Γ задается уравнением $\mathbf{x}(s, n(s)) = \mathbf{x}$. Единичный касательный вектор $\mathbf{m}$ к Γ имеет вид

$$\mathbf{m} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial n} n'(s) \right) \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial n} n'(s) \right|$$

Используя (3.7), получаем

$$P_2(s) = \int\limits_{C_2} \mathbf{t}(\tau)\, \mathbf{m}(\tau)\, d\tau$$

где C_2 — кусок Γ от $(0, n(0))$ до $(s, n(s))$, τ — длина дуги вдоль C_2.

Из условия (3.5) следует, что

$$p(L) - p(0) \leqslant -\int\limits_{\Gamma} \mathbf{t}(\tau)\, \mathbf{m}(\tau)\, d\tau$$

где τ — длина дуги на Γ, возрастающая в направлении $\mathbf{m}$.

Пусть $\mathbf{t}(\tau)$ удовлетворяет условию

$$(3.11) \qquad \int\limits_{\Gamma} \mathbf{t}(\tau)\, \mathbf{m}(\tau)\, d\tau \leqslant 0$$

Условие (3.11) выполнено, например, для $\mathbf{t}_0$ в (2.1). Полученные результаты сформулируем в виде теоремы

Теорема 2. Пусть

$$(3.12) \qquad u_0(s, n) = \int\limits_{C} \mathbf{t}(\tau)\, \mathbf{m}(\tau)\, d\tau + p(s)$$

где C состоит из C_1 и C_2, $p(s)$ — неубывающая функция и

$$p(L)-p(0)\leqslant -\int_{\Gamma}\mathbf{t}(\tau)\,\mathbf{m}(\tau)\,d\tau$$

Тогда $u_0(s, n)$ минимизирует $I_0(v)$.

Следствие 3. Если D—односвязная область, то $p(s)=\mathrm{const}$ и $u_0(s, n)$— непрерывная, кусочно-гладкая функция.

Следствие 4 (теорема единственности). Пусть $\varphi(x_1, x_2, e_{ij}) > \varphi(x_1, x_2, [e_{ij}])$ при $\sum\limits_{i,j=1}^{2} e_{ij}^2>0$ и $\psi(x_1, x_2, \mathbf{e})$ — строго выпуклая функция $\mathbf{e}$. Тогда задача кручения в односвязной области ω в классе вектор-функций с интегрируемыми производными имеет единственное решение.

Доказательство. Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{H}\int_{\omega}\varphi(x_1, x_2, e_{ij})d\omega\geqslant\frac{1}{H}\int_{\omega}\varphi(x_1, x_2, [e_{ij}])\,d\omega\geqslant \tag{3.13}$$

$$\geqslant\int_{D}\psi\left(x_1, x_2, 2\frac{1}{H}\int_0^H e_{13}\,dx_3,\ 2\frac{1}{H}\int_0^H e_{23}\,dx_3\right)d\mu=$$

$$=I_0(v)=\int_{D}\psi(x_1, x_2, \nabla v-\mathbf{t}_0)\,d\mu$$

$$v=\frac{1}{H}\int_0^H u_3\,dx_3,\quad \mathbf{u}(x_1x_2, 0)=(0, 0, u_3(x_1, x_2, 0))$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, H)=(-Hx_2, Hx_1, u_3(x_1, x_2, H))$$

В соотношениях (3.13) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $e_{11}=e_{12}=e_{22}=0$ и e_{13}, e_{23} пропорциональны одной и той же функции от x_3. Единственность с точностью до постоянного слагаемого функции, минимизирующей $I_0(v)$, следует из однозначной разрешимости системы (3.2). Таким образом, если $\mathbf{u}(x)$ — решение задачи кручения в односвязной области ω, то из первого неравенства в (3.13) и условия несжимаемости следует, что

$$u_1=-c(x_3)\,x_2,\quad u_2=c(x_3)\,x_1,\quad u_3=u(x_1, x_2) \tag{3.14}$$

Из второго неравенства в (3.13) следует, что $c(x_3)=\mathrm{const}$, если функция $u(x_1, x_2)$ в (3.14) не равна постоянной. Таким образом, $c(x_3)=\mathrm{const}$, если область D отлична от круга. Если D — круг, то $u_3=u(x_1, x_2)=\mathrm{const}$ и (3.14) — решение задачи кручения для любой монотонной функции $c(x_3)$, $c(0)=0$.

Перейдем к рассмотрению многосвязных областей D. Заметим, что (3.12) содержит и разрывные функции, если $p(s)$ — разрывная функция (эти разрывные функции можно понимать как пределы гладких функций). Рассмотрим произвольную двусвязную область D, ограниченную контурами Γ_1, Γ_2 (Γ_2 лежит внутри Γ_1). Пусть $\lambda_0(x_1, x_2)$ — непрерывная функция в D, такая, что $\lambda_0\mid_{\Gamma_1}=0$, $\lambda_0\mid_{\Gamma_2}=\mathrm{const}$ и $\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0)=1$ почти всюду в D. Рассмотрим линию уровня Γ_1' : $\lambda_0=c$, такую, что контур Γ_2

находится внутри Γ_1' и Γ_1', Γ_2 имеют общие точки. Предполагается, что в области D', заключенной между Γ_1 и Γ_1', и в односвязной области D'', граница которой состоит из Γ_1', Γ_2, функция λ_0 имеет указанную выше структуру особенностей. Скорость депланации находится следующим образом. Сначала строится функция $u_0(s, n)$ в D'' по формуле (3.12). В этом случае $p(s) = \mathrm{const}$. Далее по формуле (3.12) определяется $u_0(s, n)$ в D', причем здесь $p(s)$ выбирается так, что $u_0(s, n)$ почти всюду на Γ_1' непрерывна.

Например, пусть D — область между вложенными неконцентрическими кругами K_1, K_2, $K_1 \supset K_2$ и $\psi^\circ(x_1, x_2, G\lambda_0) = |\nabla\lambda_0|$. Тогда D' — концентрическое кольцо, D'' — односвязная подковообразная область, ограниченная двумя касающимися окружностями. В этом случае $u_0(s, n)$ определяется единственным образом и является разрывной функцией с разрывом, идущим по кратчайшему отрезку, соединяющему границы K_1 и K_2. Величина разрыва определяется через интеграл по линии особенностей в подковообразной области D'' от векторного поля t. Если $t = t_0$, R — радиус K_1, r — радиус K_2, ρ — расстояние между границами K_1 и K_2, то величина скачка скорости депланации равна

$$\pi(R - \rho + r)\sqrt{(R-\rho)r}$$

Аналогичная конструкция позволяет находить скорость депланации в многосвязных областях D.

В п. 2 отмечалось, что c_* дает оценку снизу для предельного момента в задаче о стесненном кручении. Используя найденное в п. 3 выражение для скорости депланации, можно показать, что для односвязной области ω предельный момент в задаче о стесненном кручении отличается от c_* на величину P / H, где H — высота цилиндра, величина P оценивается через функцию $u_0(s, n)$, определенную в (3.12).

4. Построение функции напряжения. В п. 2, 3 была введена функция λ_0. Ниже будут указаны способы построения функции λ_0. Рассмотрим сначала случай односвязной области D.

a) Пусть $\psi^\circ(x_1 x_2, e) = |e|$. Тогда функция $\lambda_0(x_1, x_2)$ может быть найдена следующим образом. Построим семейство круговых конусов с полураствором $\pi / 4$, с вершинами в ∂D и осями, параллельными ox_3. Тогда $x_3 = \lambda_0(x_1, x_2)$ — огибающая этого семейства конусов, расположенная над D. В случае, когда $\psi^\circ = |e|$, задача о построении λ_0 и свойства λ_0, когда ∂D — жорданова кривая, рассмотрены в [7]. Если $\psi^\circ(x_1, x_2, e) = m(e)$, то схема построения λ_0 та же, только круговые конусы нужно заменить на конусы Монжа [8].

b) Пусть $\psi^\circ(x_1, x_2, e) = a(x_1, x_2)\,|e|$, $a(x_1, x_2) > c > 0$ и функция $a(x_1, x_2)$ постоянна на линиях уровня функции $\lambda_0^1(x_1, x_2)$, построенной в D для $\psi^\circ(x_1, x_2, e) = |e|$. В этом случае $\lambda_0(x_1, x_2)$ имеет те же линии уровня, что и λ_0^1, и $a(x_1, x_2)\,\partial\lambda_0 / \partial n = 1$, где $\partial / \partial n$ — дифференцирование в направлении, ортогональном к линиям уровня λ_0^1. Очевидно, что скорость депланации в этом случае такая же, как и в случае a) [9], хотя величина c_* может быть другой.

Класс функций $a(x_1, x_2)$ можно несколько расширить, учитывая, что конформное преобразование $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2)$, $i = 1,2$ переводит $\lambda_0(x_1, x_2)$

в функцию $\mu_0(\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющую уравнению $a|\nabla_x \xi_1|\nabla\xi\,\mu_0| = 1$ почти всюду в D_ξ (D_ξ — образ D при отображении ξ).

c) Пусть $\psi^\circ(x_1, x_2, e)$ — функция общего вида. В точках ∂D строим семейство конусов Монжа и берем их огибающую. На этой огибающей рассмотрим линию уровня высоты ε и построим второе семейство конусов Монжа с вершинами в точках этой линии, расположенной на высоте ε над плоскостью D. Затем рассматривается линия уровня уже на высоте 2ε, огибающей второе семейство конусов Монжа. В точках этой линии уровня строится третье семейство конусов Монжа с вершинами на высоте 2ε и т. д. Определим $\lambda_\varepsilon(x_1, x_2)$ как огибающую первого семейства конусов Монжа в подобласти D, где $0 \leqslant \lambda_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, в подобласти D, где $\varepsilon \leqslant \lambda_\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$, функция $\lambda_\varepsilon(x_1, x_2)$ — огибающая второго семейства конусов Монжа и т. д. При $\varepsilon \to 0$ функции λ_ε сходятся к искомой функции λ_0.

В случае многосвязных областей D (остановимся на случае двусвязной области) функция λ_0 определяется следующим образом. Рассмотрим односвязную область Ω, ограниченную контуром Γ_1, и в ней построим функцию напряжения λ_0^1. Проведем линию уровня Γ: $\lambda_0^1 = c$, такую, что Γ_2 находится внутри Γ и Γ, Γ_2 имеют общие точки. Затем в односвязной области, ограниченной Γ, Γ_2, строится функция напряжения $\lambda_0^2(x_1, x_2)$. Искомая функция λ_0 совпадает с λ_0^1 в кольцеобразной области, ограниченной Γ_1, Γ, и совпадает с $\lambda_0^2 + c$ в односвязной области, ограниченной кривыми Γ_2, Γ_1.

5. **Обзор исследований по кручению жесткопластических стержней.** Решение задачи о кручении жесткопластических стержней изложено во многих монографиях, обзорах и учебных руководствах по теории пластичности (см., например, [1,10–14], где приведены также ссылки на журнальную литературу). Предлагаемое в [1,10–14] решение задачи о кручении состоит в следующем. Рассматривается специальное тензорное поле $\sigma_{13}^\circ = \partial\lambda_0 / \partial x_2$, $\sigma_{23}^\circ = -\partial\lambda_0 / \partial x_1$, остальные σ_{ij}° равы нулю, причем $\lambda_0(x_1, x_2)$ такова, что $\lambda_0\,|_{\partial D} = c$ и $|\nabla\lambda_0| = k(x_1, x_2)$ почти всюду в D (рассматривались только изотропные неоднородные среды) и λ_0 дает верхнюю грань функционалу

$$\Phi(\lambda) = -\int_D \mathbf{t}_0 G\lambda\, d\mu \left(\int_D (x_1^2 + x_2^2)\, d\mu\right)^{-1}, \quad \sup_\lambda \Phi(\lambda) + \Phi(\lambda_0)$$

Утверждается, что $\Phi(\lambda_0)$ — предельный момент.

В п. 1 данной работы показано, что $\Phi(\lambda_0)$, вообще говоря, дает оценку снизу предельного момента. В п. 2 доказано, что $\Phi(\lambda_0)$ — предельный момент.

Другой путь получения этого результата (этот путь рассматривается в цитированной литературе, он же реализуется в п. 3 работы) состоит в нахождении поля скоростей, соответствующего специальному полю напряжений, что эквивалентно разрешимости переопределенной системы (3.2), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{k(\partial u / \partial x_1 - x_2)}{|\nabla u - \mathbf{t}_0|} = \frac{\partial\lambda_0}{\partial x_2}, \quad \frac{k(\partial u / \partial x_2 + x_1)}{|\nabla u - \mathbf{t}_0|} = -\frac{\partial\lambda_0}{\partial x_1} \tag{5.1}$$

Однако далее в цитированной выше литературе исследуется не эта система, а следствие из нее

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\lambda_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\lambda_0}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial\lambda_0}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\lambda_0}{\partial x_1} = 0 \tag{5.2}$$

Ясно, что уравнение (5.2) не эквивалентно системе (5.1).

Отсутствие эквивалентности можно обнаружить на простейших примерах. Пусть D — круговое концентрическое кольцо с внутренним радиусом r_- и внешним радиусом

r_+. Тогда общее решение (5.2) имеет вид $u = c(\theta)$, θ — полярный угол с полюсом в центре кольца, $c(\theta)$ — произвольная функция. В то же время общее решение системы (5.1) имеет вид

$$u = -r_-^2\theta + k(\theta), \quad k'(\theta) \geqslant 0, \quad k(2\pi) - k(0) \leqslant r_-^2 2\pi$$

Конечно, в конкретных задачах можно решить (5.2) и подстановкой убедиться в том, что выполнены соотношения (5.1). Такую проверку по-видимому нетрудно сделать, когда решение (5.2) задано в явной форме и является непрерывным. Такие формулы для нескольких односвязных областей (специального вида овалы, равносторонний треугольник, прямоугольник, уголок) в случае однородной изотропной среды приведены в [12]. Для специального вида неоднородной изотропной среды соответствующая формула для скорости депланации поперечного сечения цилиндра прямоугольной формы содержится в [9].

В случае двусвязных поперечных сечений скорость депланации, как было показано в п. 3, вообще говоря, является разрывной функцией, и здесь исследование системы (5.1) нельзя заменить исследованием уравнения (5.2). Кроме того, в прежнем изложении задачи оставался открытым вопрос о единственности решения. Отметим, еще, что формула (3.12) для скорости депланации ранее не была известна и в случае однородной, изотропной жесткопластической среды.

Поступила 12 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1971.
3. *Рокафеллар Р. Т.* Выпускной анализ. М., «Мир», 1973.
4. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. М., Физматгиз, 1961.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
6. *Morrey C. B.* Existence and differentiability theorems for the solutions of variational problems for multiple integral. Bull. Amer. Math., Soc., 1940, vol. 46, № 6.
7. *Ting T. W.* The ridge of a Jordan domain and completely plastic torsion. J. Math. and Mech., 1966, vol. 15, No. 1.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
9. *Кузнецов А. И.* Кручение неоднородных пластических стержней. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, т. 11.
10. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
11. *Прагер В., Ходж Ф. Г.* Теория идеально пластических тел. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
12. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
13. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
14. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.