

**О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ**

М. Д. Мартыненко, В. С. Романчик

(Минск)

Предлагается метод решения интегрального уравнения контакта шероховатых тел с помощью специальной аппроксимации искомого решения.

1. Вследствие микрогеометрических поверхностных неровностей контакт поверхностей деталей машин носит дискретный характер, а контактирующие поверхности называются шероховатыми. Следуя [1], считаем, что для шероховатых тел упругие перемещения равны сумме перемещений, возникающих благодаря деформации всего упругого тела и некоторых дополнительных перемещений, определяемых поверхностной структурой тела.

На основании экспериментальных данных¹ предполагается, что дополнительное нормальное перемещение пропорционально нормальному давлению в некоторой степени. Поэтому плоскую и пространственную контактные задачи для шероховатых тел следует описывать уравнениями

$$(1.1) \quad K p^\alpha(x) + \theta \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|t-x|} p(t) dt = f(x)$$

$$(1.2) \quad K p^\alpha(x, y) + \theta \iint_{\Omega} \frac{p(t, \tau)}{\sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}} dt d\tau = f(x, y)$$

$$\theta = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2}$$

Здесь μ_i , E_i — упругие постоянные контактирующих тел; a и Ω определяют номинальные участки контакта; $f(x)$, $f(x, y)$ — функции, определяемые формой, углом поворота и смещением контактирующих тел; K , α — константы, зависящие от упругих характеристик материала и поверхностных свойств контактирующих тел, причем $0.3 \leq \alpha \leq 1$. Существование ограниченных решений уравнений (1.1) и (1.2) в замкнутой ограниченной области следует из теорем [2] о разрешимости нелинейного уравнения вида

$$y(x) = \int_B k(x, t) \Phi(t, y(t)) dt$$

¹ Рабинович А. С. Контактные задачи теории упругости для шероховатых тел. Автореф. канд. диссертации, МГУ, 1975.

к которому уравнения (1.1) и (1.2) приводятся заменой $y = f - Kp^\alpha$. Для одномерных интегральных уравнений ограниченное решение существует, если:

а) для любого фиксированного $x \in [-a, a]$, $x^* \in [-a, a]$ $k(x, t)$ суммируемо по t и

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \int_{-a}^a |k(x, t) - k(x^*, t)|^2 dt = 0$$

б) $\Phi(x, y)$ удовлетворяет условию $|\Phi(t, z)| \leq \mu^{-1}|z| + c$, где $c > 0$, $\mu > \lambda_0$; λ_0 — наибольшее положительное собственное значение для $|k(x, t)|$; если такого нет, то $\lambda_0 = 0$. Для уравнения (1.1) условия а) и

б) выполняются при

$$c = \Theta M^{1/\alpha} K^{-1/\alpha}, \quad \mu = K^{1/\alpha} \alpha [\Theta M^{1/\alpha-1} Q]^{-1}$$

$$Q = [(1 + q)^{1/\alpha} - 1] q^{-1}, \quad M = \max_{x \in [a, a]} |f(x)|$$

если

$$|y| \leq qM, \quad \mu > 2a \ln(e/a), \quad q < 1, \quad 2a \leq 1$$

(λ_0 определяется из уравнения $\ln a \sin(\pi a / \lambda) - \text{si}(\pi a / \lambda) = 0$ и находится в интервале $|\lambda_0| \leq 2a |\ln a - 1|$).

Если $p(a) = 0$, требуется выполнение условия $\mu > 2a$. Для уравнения (1.2) проводится аналогичное рассмотрение. В этом случае собственные функции и собственные значения для ядра существенно зависят от формы области.

2. Представим решение уравнений (1.1), (1.2) в виде ¹

$$(2.1) \quad p_N(x) = p_0(x) S_N(x), \quad S_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k \omega_k(x - x_k)$$

$$(2.2) \quad p_N(x, y) = p_0(x, y) \sum_{k=1}^N a_k d_k \omega_{1k}(x - x_k) \omega_{2k}(y - y_k)$$

где a_k и c_k — неизвестные коэффициенты, определяемые из условия удовлетворения (2.1) и (2.2) уравнениям (1.1), (1.2) в узлах x_k (x_k, y_k); ω_{ik} — функции вида

$$\frac{1}{b_{ik}} \exp \left[- \left(\frac{t_i - t_{ik}}{b_{ik}} \right)^2 \right], \quad \theta(h_{ik} - |t_i - t_{ik}|) \left(1 - \frac{|t_i - t_{ik}|}{q_{ik}} \right)$$

представляющие собой δ -последовательности функций [3], $\theta(x)$ — единичная функция

$$h_{ik} = t_{ik+1} - t_{ik}, \quad q_{ik} = \begin{cases} b_{ik+1}, & t_i > t_{ik} \\ b_{ik}, & t_i \leq t_{ik} \end{cases}$$

Здесь введены обозначения $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_{1k} = x_k$, $t_{2k} = y_k$; x_k (x_k, y_k) — точки дискретизации области, зависящие от ее формы; d_k — известные константы, играющие роль веса кубатурной формулы; p_0 —

¹ Романчик В. С. Об одном методе аппроксимации функций и его применении к решению интегральных уравнений первого рода. Республиканская конференция математиков Белоруссии. Тезисы докл. Минск, Изд-во Белорусск. ун-та, 1975.

функция, учитывающая поведение плотности p на краях штампа. Если расчеты ведутся без выделения особенности, полагается, что $p_0 = 1$.

Непрерывные в замкнутой ограниченной области Ω^* функции $p(x)$, $p(x, y)$ для любой внутренней точки Ω^* можно с заданной точностью приблизить к функциям вида (2.1), (2.2) для достаточно больших N и достаточно малых b_{ik} .

При этом минимальная оценка отклонения получена для $b_{ik} = h_{ik}$.

Это представление позволяет получить явное выражение для давления под основанием шероховатого штампа произвольной формы. Решения задач указанным методом при $N \leq 10$ практически совпадают с опубликованными в [1, 3].

3. Рассмотрим для определенности интегральное уравнение, описывающее задачу о давлении параболического штампа на упругую полуплоскость [3]

$$(3.1) \quad K p^\alpha(y) + \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{t-a}{t-y} \right| dt = c(a^2 - y^2)$$

К этому уравнению присоединим уравнение, выражающее условие равновесия штампа

$$(3.2) \quad \int_{-a}^a p(t) dt = P$$

Решение (3.1) представим в виде

$$(3.3) \quad p(y) = a \sqrt{1-x^2} S_N(x) \\ x = \frac{y}{a}, \quad \omega_k = \frac{1}{b_k} \exp \left[- \left(\frac{x-x_k}{b_k} \right)^2 \right]$$

В силу симметрии штампа полагаем

$$x_k = (k - 1/2)H, \quad H = 1/N, \quad k = 1, N; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Из (3.2) получим

$$(3.4) \quad a = \left\{ P \left[\sum_{k=1}^N c_k \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \omega_k(t-x_k) dt \right]^{-1} \right\}^{1/2}$$

где P — прижимающая сила.

После подстановки (3.3) и (3.4) в (3.1) и коллокации в узлах x_k получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных a и c_k

$$(3.5) \quad f_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N \\ f_i = K \left\{ P \left[\sum_{k=1}^N c_k \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \omega_k(t-x_k) dt \right]^{-1} \right\}^{\alpha/2-1} (1-x_i^2)^{\alpha/2} S_N^\alpha(x_i) + \\ + \sum_{k=1}^N c_k \int_{-1}^1 \omega_k(t-x_k) \sqrt{1-t^2} \ln \left| \frac{1-t}{t-x_i} \right| dt - c(1-x_i^2)$$

Полученная система решается методом итераций, последовательные приближения определяются по формулам (a определяется по формуле (3.4))

$$(3.6) \quad c_i^{n+1} = c_i^n - \sum_{j=1}^N [r_{ij}^n]^{-1} f_j^n, \quad i = 1, N$$

$$r_{ij}^n = r_{ij} | c_j = c_j^n, \quad f_i^n = f_i | c_i = c_i^n, \quad i = 1, N; \quad j = 1, N$$

$$(3.7) \quad r_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial c_j} = K a^{\alpha/2} (1 - x_i^2)^{\alpha/2} S_N^\alpha(x_i) \left[\frac{\alpha \omega_j(x_i - x_j)}{a S_N(x_i)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \alpha/2)}{P} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \omega_j(t - t_j) dt \right] +$$

$$+ \int_{-1}^1 \omega_j(t - t_j) \sqrt{1 - t^2} \ln \left| \frac{t - 1}{t - x_i} \right| dt$$

Преобразуем несобственные интегралы в (3.5), (3.7) к следующему виду:

$$I = \int_{-1}^1 \omega_j(t - t_j) \sqrt{1 - t^2} \ln \left| \frac{t - 1}{t - x_i} \right| dt =$$

$$= \int_0^1 \omega_j(t - t_j) \sqrt{1 - t^2} \left[\ln \left| \frac{t - 1}{t - x_i} \right| + \ln \frac{t + 1}{t + x_i} \right] dt$$

Для вычисления интегралов вида

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \varphi(t) \ln(t - x) dt$$

интервал интегрирования разбивается на отрезки $[0, x]$, $[x, 1]$, в которых производится замена $t = xu$, $t = 1 - (1 - x)u$ соответственно, а затем используются квадратурные формулы для вычисления интегралов [4]

$$\int_0^1 x^\alpha \ln \frac{e}{x} f(x) dx, \quad \int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1 - t} f(t) dt$$

Результаты вычислений на ЭВМ «Минск-32» приводятся на фиг. 1 и в таблице. Значениям $K = 0$, $K = 0.18$, $K = 0.36$ при $\alpha = 0,6666$, $c = 15.7$ и $P = 0,157$ соответствуют кривые 1—3. Решения отличаются от приведенных в [3] на 1—2%.

Полученные значения полуширины участка контакта a равны 0.1, 0.149, 0.176. В столбцах А и Б таблицы стоят значения $p(x_i)$, приведенные в [3] и полученные по предлагаемому методу при $c = 0.863 \cdot 10^5$ кг/см³, $P = 0.86 \cdot 10^5$ кг/см, $K = 0$,

x/a	1		2		3		4	
	А	Б	А	Б	А	Б	А	Б
0.0	0.550	0.550	0.485	0.505	0.385	0.385	0.225	0.227
0.2	0.539	0.538	0.483	0.497	0.373	0.370	0.216	0.219
0.4	0.504	0.500	0.446	0.459	0.334	0.332	0.191	0.192
0.6	0.440	0.433	0.378	0.390	0.266	0.265	0.147	0.148
0.8	0.330	0.320	0.264	0.269	0.164	0.161	0.086	0.085

$P = 0.8 \cdot 10^5 \text{ кг / см}$, $K = 0.1726$, $P = 0.7 \cdot 10^5 \text{ кг / см}$, $K = 1.726$, $P = 0.7 \cdot 10^5 \text{ кг / см}$, $K = 17.26$. Решения отличаются от известных не более чем на 2%. Соответственно 1—4 получены значения $a = 1.0$, $a = 1.04$, $a = 1.30$, $a = 2.34$.

4. Рассмотрим задачу о давлении плоского штампа на упругую шероховатую полуплоскость. В этом случае уравнение (1.1) и уравнение равновесия имеют вид

$$(4.1) \quad Kp^\alpha(y) + \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{1}{t-y} \right| dt = c$$

$$(4.2) \quad \int_{-a}^a p(t) dt = P$$

Сделаем замену $p(y) = p_1(ax)$ с и представим решение задачи в виде

$$(4.3) \quad p_1(ax) = S_N(x)$$

Постоянную c определим из (4.2)

$$(4.4) \quad c = P \left[a \sum_{k=1}^N a_k \int_{-1}^1 \omega_k(t - t_k) dt \right]^{-1}$$

В качестве ω_k выберем функцию

$$\omega_k = \theta(h_k - |x - x_k|) \left(1 - \frac{|x - x_k|}{b_k} \right)$$

Подобное представление обладает тем преимуществом, что интегралы в (4.1), (4.4) вычисляются точно. После подстановки (4.3), (4.4) в (4.1) и коллокации в узлах получим систему нелинейных уравнений, которую решаем аналогичным образом.

Результаты вычислений приводятся на фиг. 2. Значениям $P = 0.6$, $K = 1.364$, $\alpha = 1$, $a = 1$; $P = 0.6$, $K = 0.361$, $\alpha = 0.5$, $a = 0.7$; $P = 0.173$, $K = 1.364$, $\alpha = 0.8$, $a = 0.7$ соответствуют кривые 1 — 3. Соответственно 1 — 3 получены следующие значения c : $c = 0.932$; $c = 0.934$; $c = 0.269$. При $K = 3.1415$, $\alpha = 1$ результаты вычислений незначительно отличаются от приведенных в [1].

5. В качестве критерия прекращения итерационного процесса может быть выбрано условие близости двух соседних приближений. При вычислениях на ЭВМ «Минск-32» разность между соседними приближениями не превосходила 10^{-6} . При этом величина невязки $r_n \leq 10^{-9}$.

Согласно [5] ньютоновский процесс решения системы алгебраических уравнений $F(c) = 0$, заданной в шаре $S(c_0, R)$, сходится к решению c^* , заданному в шаре $S(c_0, r_0)$, и верна оценка

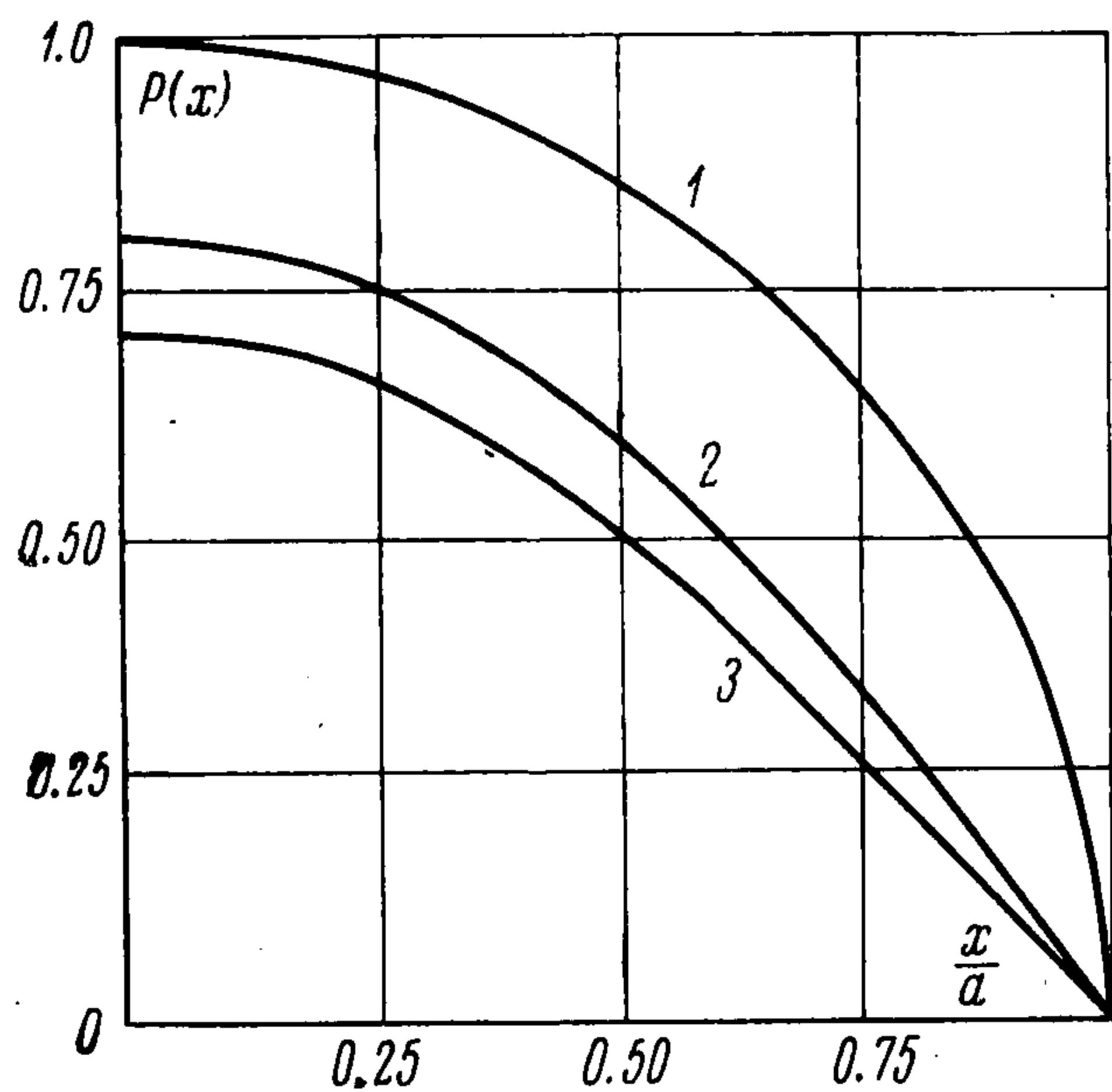
$$\|c^n - c^*\| \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{2^n-1} \eta$$

если

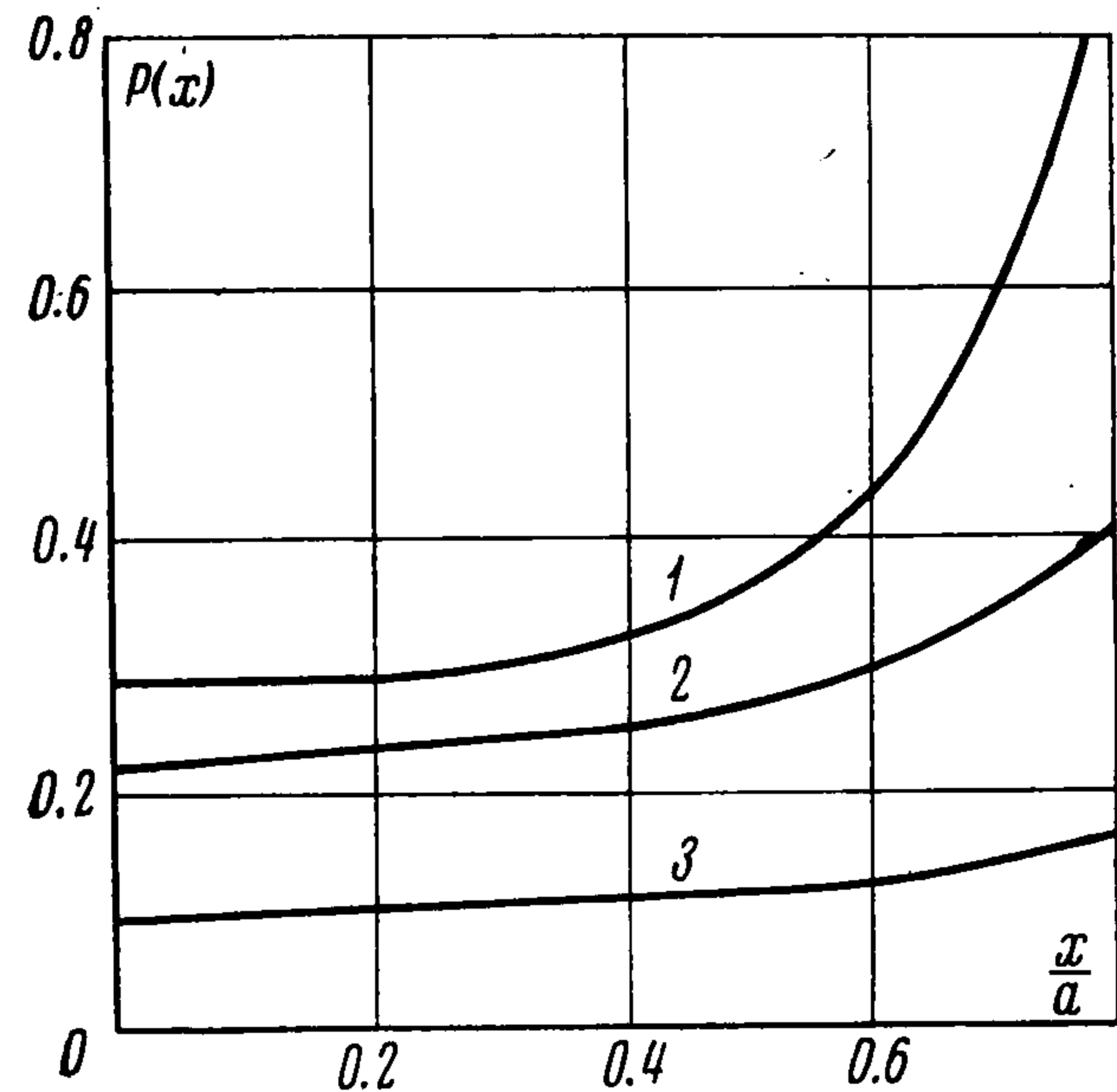
$$(5.1) \quad h_0 \leq 1/2, \quad R \geq r_0 = (1 - \sqrt{1 - 2h_0}) \eta_0 h_0^{-1}$$

Здесь $h_0 = b_0 L \eta_0$, b_0 — оценка нормы обратной матрицы $\|F'^{-1}\| \leq b_0$, η_0 характеризует выбор начального приближения: $|F'^{-1}(c_0) F(c_0)| \leq \eta_0$, L — константа Липшица для $F'(c)$. В качестве нормы матрицы выбирается

$$\|F\| = \max_{i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а величины L , b_0 , η_0 вычисляются с помощью ЭВМ. Так, например, для уравнения (3.1) при $K = 1.726$ получены значения $L = 100$, $b_0 = 0.5$. Начальное приближение выбирается таким, чтобы $\eta_0 \leq 0.01$, так что условия (5.1) выполняются и имеет место неравенство

$$(5.2) \quad \max_{k \leq N} |c_k^n - c_k| \leq \varepsilon$$

При проведении расчетов неустойчивость итерационного процесса не отмечалась, итерационный процесс сходился при произвольных начальных приближениях, что имеет место для вогнутых операторов.

С помощью неравенства (5.2) можно вывести оценку близости

$$p_N^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^N c_k^n \omega_k(x - x_k) \text{ к } p_N = S_N(x)$$

точному решению уравнения

$$K p_N^\alpha(x_i) - \int_{-a}^a k(x_i, t) p_N(t) dt = f(x_i)$$

Умножив (5.2) на $\omega_k(x - x_k)$, просуммируем по k и, перейдя к \max по x , получим

$$\max_x \left| \sum_{k=1}^N c_k^n \omega_k(x - x_k) - S_N(x) \right| \leq \varepsilon \max_x \sum_{k=1}^N \omega_k(x - x_k)$$

или

$$|p_N^{(n)}(x) - p_N(x)| \leq \varepsilon_1$$

Поступила 11 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969.
3. Рабинович А. С. Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
4. Крылов В. И., Пальцев А. А. Таблицы для численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. Минск, «Наука и техника», 1967.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.