Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ГЕРЦА ДЛЯ ЛИНЕЙНО- И НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А. С. Кравчук

(Москва)

Предложена и обоснована новая постановка контактной задачи, позволяющая использовать для ее решения методы современной теории оптимизации (нелинейного программирования).

В статье дано развернутое изложение результатов, аннонсированных в заметке автора [1].

Под задачей Герца в данной работе понимается проблема определения давления на части поверхности деформируемого тела конечных размеров, соприкасающегося с абсолютно жестким штампом, определения формы и размеров площадки контакта, а также нахождения напряженно-деформированного состояния внутри тела. Предлагаемая постановка отличается от большинства обычно используемых постановок задач, когда или а) зона контакта фиксируется заранее, и в этой зоне задаются одновременно часть компонент вектора смещения точек контактируемой поверхности и часть компонент вектора напряжения; или б) когда задается функция, связывающая нормальное давление с соответствующим перемещением [2–4]. Трудность рассматриваемой задачи состоит в том, что она нелинейная даже для линейно-упругих сред, и нелинейность определяется граничными условиями на части поверхности, которая может быть в контакте; эти граничные условия имеют вид неравенств.

Подобного типа задачи теории упругости были впервые рассмотрены Синьорини [5]; обзор последних достижений в таких задачах имеется в книге [6].

Сравнительно простым, но мощным инструментом для исследования указанных задач явился метод вариационных неравенств Лионса—Стампаккья [7]. Этот метод, позволяя единообразным способом ставить и изучать как задачи типа Синьорини, так и всевозможные задачи оптимизации, тем самым устанавливает аналогию между этими двумя классами задач и, следовательно, дает возможность использования эффективных методов решения задач оптимизации для решения проблем типа Синьорини.

Данная работа ограничена исследованием контактной задачи для гладких штампов, т. е. штампов, поверхность которых имеет непрерывно вращающуюся касательную плоскость (в зоне, где возможен контакт); рассмотрены случаи линейно-упругой среды и физически нелинейной упругой среды.

1. Постановка задачи. Пусть упругое тело занимает область Ω с границей S в трехмерном пространстве R_3. Будем предполагать, что граница S состоит из трех кусков: $S = S_u + S_\sigma + S_c$. На части S_u будет считать известными перемещения (для простоты будем полагать их нулевыми, а $S_u \neq \varnothing$); на части S_σ — напряжения

$$\sigma_{ij}\nu_j \,|\, _{S_\sigma} = P_i \tag{1.1}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ν_i — компоненты вектора единичной внешней нормали к S_σ.

Для описания условий на S_c предположим, что граница абсолютно жесткого штампа, который может соприкасаться с областью Ω по части поверхности S_c, задается уравнением

$$\Psi(x) = 0 \tag{1.2}$$

причем внутри штампа $\Psi(x) < 0$, вне его $\Psi(x) > 0$.

Будем обозначать перемещения точек тела Ω через $u(x)$, вектор напряжений на поверхности S_c — через σ; будем использовать представление: $\sigma = \sigma_T + \nu\sigma_N$. Очевидно, $\sigma_N = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j$, $(\sigma_T)_i = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_N\nu_i$. Условия на S_c зададим следующим образом: если после деформации тела Ω точки поверхности S_c принадлежат поверхности (1.2), т. е.

$$\Psi(x + u(x)) = 0, \quad x \in S_c \tag{1.3}$$

то в этой точке касательная составляющая σ_T вектора σ равна нулю, нормальная составляющая σ_N неположительна; в противном случае

$$\Psi(x + u(x)) > 0, \quad x \in S_c \tag{1.4}$$

вектор σ в точке x равен нулю.

Подчеркнем, что заранее неизвестно, принадлежит ли точка $x + u(x)$ поверхности (1.2), и в этом основная трудность задачи.

В дальнейшем будем предполагать, что величина $|u(x)|$ достаточно мала, $|\operatorname{grad}\Psi(x)| > 0$, $\forall x \in S_c$ и что вторые производные $\Psi(x)$ ограничены, так что можно произвести линеаризацию по u условий на S_c

$$\begin{gathered}\Psi(x) + u(x)\operatorname{grad}\Psi(x) = 0 \Rightarrow \sigma_T = 0, \quad \sigma_N \leqslant 0\\ \Psi(x) + u(x)\operatorname{grad}\Psi(x) > 0 \Rightarrow \sigma_{ij}\nu_j = 0\\ x \in S_c\end{gathered} \tag{1.5}$$

Отметим, что всегда

$$\Psi(x) + u(x)\operatorname{grad}\Psi(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in S_c \tag{1.6}$$

и это условие служит дополнением к общему определению кинематически допустимых полей перемещений при переходе к вариационной постановке задачи, которая и составляет предмет последующего рассмотрения.

Замечание 1.1. Задача Синьорини [5] получается как частный случай рассматриваемой при $\Psi(x) = 0$, $\operatorname{grad}\Psi(x) = -\nu\,|\operatorname{grad}\Psi(x)|$, т. е. когда начальная зона контакта фиксируется до приложения внешних воздействий, после деформации зона контакта может только уменьшаться.

2. Приведение проблемы к вариационной. Рассмотрим геометрически линейную задачу и примем следующую связь напряжений с деформациями [8]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2\mu\omega(e_u)\\ \omega(e_u) = 1 - \frac{\Phi(e_u)}{3\mu e_u}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \theta = \varepsilon_{ii}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь λ, μ — параметры Ляме, e_u — интенсивность деформаций, повторяющиеся индексы означают суммирование в пределах от 1 до 3, запятая — дифференцирование по соответствующей координате. Случай физически линейной изотропной среды следует из (2.1) при $\omega = 0$; обобщение для анизотропных сред очевидно:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}$$

где a_{ijkh} — тензор модулей упругости, обладающий обычными свойствами симметрии и положительной определенности.

Введем пространство С. Л. Соболева V функций, обладающих обобщенными первыми производными, суммируемыми с квадратом, и обращающихся в нуль на S_u, и подмножество K в этом пространстве, причем

$$\|v\| = \Big(\int_\Omega v_i v_i\, d\Omega + \int_\Omega v_{i,k} v_{i,k}\, d\Omega\Big)^{1/2}$$

$$K = \{v \mid v \in V;\ \ \Psi(x) + \operatorname{grad}\Psi(x)\, v(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in S_c\}$$

Подмножество K — замкнутое выпуклое в V (замкнутость — следствие теоремы Лионса о следах, выпуклость проверяется непосредственно).

Исходная задача состоит в определении вектор-функции $u = u(x)$, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям равновесия

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u + \mu\Delta u - 2\mu \operatorname{div}[\omega(e_u)\, e_D] + \rho F = 0 \tag{2.2}$$

(Δ — оператор Лапласа, e_D — девиатор тензора деформации, ρF — заданная плотность объемных сил), граничным условиям (1.1), (1.5) и $u = 0$ на S_u. В процессе решения этой задачи будет определено множество точек $x \in S_c$, для которых ограничение (1.6) выполняется со знаком строгого равенства. Это множество и представляет собой искомую зону контакта, реактивное давление в этой зоне — искомое контактное давление.

Введем в рассмотрение билинейный $a(u, v)$ (в рассматриваемом варианте $a_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})$, δ_{ij} — символы Кронекера), линейный $L(v)$ и нелинейный $j(v)$ функционалы на V

$$a(u, v) = \int_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(v)\,\varepsilon_{ij}(u)\, d\Omega$$

$$L(v) = \int_\Omega \rho F v\, d\Omega + \int_{S_\sigma} P v\, dS$$

$$j(v) = 3\mu \int_\Omega \Big(\int_0^{e_u(v)} \omega(s)\, s\, ds\Big) d\Omega$$

Теорема 2.1. Решение поставленной исходной задачи является решением вариационного неравенства

$$a(u, v - u) - j'(u, v - u) \geqslant L(v - u), \qquad \forall v \in K\ \ u \in K \tag{2.3}$$

где $j'(u, v - u)$ означает функциональную производную (Гато) в точке u по направлению $v - u$ (дифференцируемость по Гато очевидна).

Обратно, решение вариационного неравенства (2.3) удовлетворяет уравнению (2.2) и условиям (1.1), (1.5) (если входящие в (2.2), (1.1), (1.5) производные имеют смысл).

Доказательство. Пусть u — решение задачи (2.2), (1.1), (1.5). Умножим уравнение (2.2) скалярно на $v - u$, где v — произвольный элемент K, проинтегрируем получившееся выражение по Ω и применим формулу

Гаусса — Остроградского. Найдем

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \int\limits_{S_c} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j\, dS + j'(u, v-u)$$

Видно, что $\sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j = \sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)$; по условию (1.5) $\sigma_T = 0$ всегда, следовательно

$$\sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j = \sigma_N(u)(v_N - u_N) \tag{2.4}$$

При выполнении второго из условий (1.5) правая часть равенства (2.4) равна нулю; если же имеет место первое из условий (1.5), то

$$\Psi + u \operatorname{grad} \Psi = 0 \tag{2.5}$$

По определению $v \in K$, следовательно

$$\Psi + v \operatorname{grad} \Psi \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Вычитая равенство (2.5) из неравенства (2.6), получим

$$(v-u)\operatorname{grad} \Psi \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{2.7}$$

Так как в рассматриваемой точке имеет место контакт, то

$$\operatorname{grad} \Psi = -\nu\gamma(x), \quad \gamma(x) \equiv |\operatorname{grad} \Psi(x)| > 0 \tag{2.8}$$

Подставляя равенство (2.8) в неравенство (2.7), приходим к выводу, что в рассматриваемой точке x будет $u_N - v_N \geqslant 0$ для всех $v \in K$ и в силу $\sigma_N \leqslant 0$ имеем

$$\int\limits_{S_c} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j\, dS = \int\limits_{S_c} \sigma_N(v_N - u_N)\, dS \geqslant 0, \quad \forall v \in K$$

Последнее неравенство позволяет заключить, что элемент u удовлетворяет вариационному неравенству (2.3).

Обратно, пусть u — решение задачи (2.3) и пусть $\varphi = \varphi(x)$ — регулярная функция с носителем, компактным в Ω [9,10]. Очевидно, что $u \pm \pm \varphi \in K$; подставляя в (2.3) сначала сумму $u + \varphi$, а затем разность $u - \varphi$, приходим к равенству

$$a(u, \varphi) - j'(u, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \rho F \varphi\, d\Omega$$

из которого следует, что в смысле теории распределений выполнено дифференциальное уравнение (2.2).

Для обоснования законности проведенных выше рассуждений достаточно предположить, что $\rho F_i \in L_2(\Omega)$, $\sigma_{ij,j} \in L_2(\Omega)$; последнее предположение выполнено, если $u \in H^2(\Omega) \cap V$, а $\omega(e_u)$ обладает ограниченной первой производной. Для доказательства того, что решение вариационного неравенства (2.3) удовлетворяет краевым условиям на S_σ и S_c, предположим дополнительно, что $P \in L_2(S_\sigma)$ и что $S_c \subset S_\sigma$. Умножим уравнение (2.2) скалярно (в смысле $L_2(\Omega)$) на произвольный элемент $v \in K$ и, применив формулу Гаусса — Остроградского (на этом этапе используются сформулированные выше предположения о гладкости), найдем

$$a(u, v) - j'(u, v) = \int\limits_{\Omega} \rho F v\, d\Omega + \int\limits_{S_\sigma \cup S_c} \sigma_{ij}(u)\nu_j v_i\, dS \tag{2.9}$$

Полагая здесь $v = u$, вычитая из получившегося выражения (2.9) и используя вариационное неравенство (2.3), найдем

$$\int\limits_{S_\sigma} [\sigma_{ij}(u)\nu_j - P_i](v_i - u_i)\,dS + \int\limits_{S_c} \sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)\,dS \geqslant 0 \qquad (2.10)$$

$$\forall v \in K$$

Подчиним выбор v в (2.10) дополнительному ограничению $v = u$ на S_c, тогда вместо (2.10) получим

$$\int\limits_{S_\sigma} [\sigma_{ij}(u)\nu_j - P_i](v_i - u_i)\,dS \geqslant 0, \quad \forall v \in K, \quad v = u \text{ на } S_c \qquad (2.11)$$

Обозначим через φ след функции $v - u$ на S_σ, множество $\{\varphi\}$ — линейное подпространство в $H^{1/2}(S_\sigma)$ [11]; очевидно, $\varphi = 0$ на ∂S_σ — границе многообразия S_σ.

Рассмотрим сначала неравенство (2.11) в случае, когда φ пробегает множество $D(S_\sigma)$ бесконечно-дифференцируемых функций с носителем, компактным в S_σ; видно, что

$$\int\limits_{S_\sigma} [\sigma_{ij}(u)\nu_j - P_i]\varphi_i\,dS = 0, \quad \forall \varphi \in D(S_\sigma) \qquad (2.12)$$

Известно [11], что $D(S_\sigma)$ плотно в $L_2(S_\sigma)$, следовательно, из (2.12) вытекает, что

$$\sigma_{ij}(u(x))\,\nu_j = P_i(x), \quad x \in S_\sigma \qquad (2.13)$$

как элемент пространства $L_2(S_\sigma)$.

Из полученного условия (2.13), неравенства (2.10) и линейности и непрерывности отображения $H^1(\Omega)$ в $L_2(S)$ [11] следует, что

$$\int\limits_{S_c} \sigma_{ij}(u)\nu_j(v_i - u_i)\,dS \geqslant 0, \quad \forall v \in K \qquad (2.14)$$

Положим $v = u + \varepsilon\varphi$, где ε — произвольное положительное число; использовав разложение $\varphi = \varphi_N \nu + \varphi_T$, перепишем неравенство (2.14) в виде

$$\int\limits_{S_c} \sigma_N(u)\varphi_N\,dS + \int\limits_{S_c} \sigma_T(u)\varphi_T\,dS \geqslant 0 \qquad (2.15)$$

Пусть в рассматриваемой точке $x \in S_c$ имеет место контакт; учитывая (2.8), найдем, что в этой точке $\varphi_N(x) \leqslant 0$, $\varphi_T(x)$ произвольно. Если же в точке $x \in S_c$ контакта нет, то

$$\varepsilon\varphi(x)\,\mathrm{grad}\,\Psi(x) \geqslant -[\Psi(x) + u(x)\,\mathrm{grad}\,\Psi(x)] \qquad (2.16)$$

причем правая часть этого неравенства строго отрицательна; следовательно, при достаточно малых ε функция $\varphi(x)$ (и $\varphi_T(x)$) произвольна.

Заметим теперь, что множество

$$W = \{\varphi \mid \varphi = \varphi(x),\ x \in S_c,\ \varphi_N(x) = 0\}$$

— линейное подпространство в $L_2(S_c)$; рассмотрев неравенство (2.15) в $W \cap D(S_c)$, заключаем, что

$$\int\limits_{S_c} \sigma_T(u)\varphi_T\,dS = 0, \quad \forall\varphi \in W \cap D(S_c) \tag{2.17}$$

Учитывая плотность вложения $D(S_c)$ в $L_2(S_c)$, заключаем, что

$$\sigma_T(u(x)) = 0, \ \forall x \in S_c \tag{2.18}$$

как элемент $L_2(S_c)$.

Из (2.18) и непрерывности отображения $H^1(\Omega)$ в $L_2(S)$ следует, что неравенство (2.15) имеет форму

$$\int\limits_{S_c} \sigma_N(u)(v_N - u_N)\,dS \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{2.19}$$

Обозначим через S_c^v зону контакта, т. е. множество тех точек $x \in S_c$, для которых (1.6) превращается в равенство; обозначим снова через φ_N след разности $v_N - u_N$ на S_c и подчиним выбор φ_N дополнительному ограничению $\varphi_N = 0$ на S_c^v.

Способом, дважды использованным выше, убеждаемся в том, что

$$\sigma_N(x) = 0, \quad \forall x \in S_c - S_c^v$$

как элемент пространства L_2. Отсюда и из неравенства (2.19) имеем

$$\int\limits_{S_c^v} \sigma_N(u)\varphi_N\,dS \geqslant 0, \quad \forall\varphi_N \in L_2(S_c^v), \quad \varphi_N \leqslant 0$$

Отсюда следует

$$\sigma_N(u(x)) \leqslant 0, \quad \forall\, x \in S_c^v$$

что и завершает доказательство теоремы 2.1.

Замечание 2.1. Преобразования, проведенные при доказательстве теоремы 2.1 остаются законными и при $P_i \in H^{-1/2}(S_\sigma)$ [11].

Замечание 2.2. При доказательстве второй части теоремы 2.1 были использованы свойства непрерывности и плотности вложений пространств одно в другое. Эти свойства верны лишь при определенных ограничениях на форму и гладкость границы области определения; установление этих ограничений является открытой проблемой [12].

Теорема 2.2. Решение вариационного неравенства (2.3) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J(v) = {}^1/_2 a(v, v) - L(v) - j(v), \quad v \in K \tag{2.20}$$

Доказательство этой теоремы сводится, на основании известных результатов [13], к проверке выпуклости и дифференцируемости $J(v)$; эта проверка будет произведена в п. 3 при исследовании существования и единственности.

3. Существование и единственность решения.

Теорема 3.1. Если функция $\omega(s)$ непрерывна и

$$0 \leqslant \omega < d(s\,\omega(s)) / ds < 1, \quad d\,\omega(s) / ds \geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$\rho F_i \in L_2(\Omega), \quad P_i \in H^{-1/2}(S_\sigma) \tag{3.2}$$

то сформулированная в п. 2 задача минимизации функционала (2.20) имеет решение и притом только одно.

Доказательство основано на известной [14,15] теореме о существовании и единственности решения задачи выпуклого нелинейного программирования и сводится к проверке строгой выпуклости и коэрцитивности функционала (2.20); коэрцитивность означает, что

$$\lim J(v) = +\infty, \quad \| v \| \to +\infty \tag{3.3}$$

Коэрцитивность докажем без использования условий (3.1), предполагая лишь вогнутость и монотонный рост функции $\Phi(e_u)$.

Лемма 3.1. Если $\Phi(e_u)$ — строго вогнутая монотонно растущая функция, причем $\Phi(e_u) \leqslant 3\mu e_u$, $\forall e_u$, то имеем оценку

$$\int\limits_\Omega \Big[\int\limits_0^{e_u(v)} \omega(x)\, x\, dx \Big] d\Omega \leqslant c \| v \|^{2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{3.4}$$

где c и ε — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Методом от противного можно проверить, что существует $0 < \varepsilon < 1$, такое, что

$$\omega(x)\, x \leqslant x^{1-\varepsilon}, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall [a, b] \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует

$$\int\limits_0^{e_u(v)} \omega(x)\, x\, dx \leqslant c_1 [e_u(v)]^{2-\varepsilon}, \quad c_1 = \frac{1}{1-\varepsilon} \tag{3.6}$$

Докажем теперь, что

$$\int\limits_\Omega e_u(v)\, d\Omega \leqslant c_2 \| v \|_V, \quad c_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{3.7}$$

В самом деле, по определению

$$\| v \|_V^2 = \int\limits_\Omega v_i v_i\, d\Omega + \int\limits_\Omega v_{i,j} v_{i,j}\, d\Omega \geqslant \int\limits_\Omega v_i v_i\, d\Omega + \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega v_i v_i\, d\Omega + \int\limits_\Omega e_{ij}(v)\, e_{ij}(v)\, d\Omega + \int\limits_\Omega \frac{1}{3} \theta^2(v)\, d\Omega \geqslant \int\limits_\Omega \frac{3}{2} e_u^2\, d\Omega \tag{3.8}$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$\int\limits_\Omega e_u\, d\Omega \leqslant \Big(\int\limits_\Omega e_u^2\, d\Omega \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_\Omega d\Omega \Big)^{1/2} = (\mathrm{mes}\, \Omega)^{1/2} \Big(\int\limits_\Omega e_u^2\, d\Omega \Big)^{1/2}$$

Отсюда и из неравенства (3.8) следует (3.7), где $c_2 = \sqrt{2/3}\, (\mathrm{mes}\, \Omega)^{1/2}$. Для завершения доказательства леммы используем неравенство Гельдера

$$\int\limits_\Omega \varphi_1 \varphi_2\, d\Omega \leqslant \Big(\int\limits_\Omega \varphi_1^p\, d\Omega \Big)^{1/p} \Big(\int\limits_\Omega \varphi_2^q\, d\Omega \Big)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 0, \quad q > 0$$

Положив в нем $p = 2/(2-\varepsilon)$, $q = 2/\varepsilon$, $\varphi_1 = e_u^{2-\varepsilon}$, $\varphi_2 = 1$, найдем

$$\int\limits_\Omega e_u^{2-\varepsilon}\, d\Omega \leqslant \Big(\int\limits_\Omega e_u\, d\Omega \Big)^{(2-\varepsilon)/2} \tag{3.9}$$

Объединив оценки (3.6), (3.7) и (3.9), получим (3.4).

Докажем теперь коэрцитивность $J(v)$; предварительно заметим, что из неравенства положительной определенности тензора модулей упругости

$$a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}\,\varepsilon_{ij} \geqslant \beta\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}, \quad \forall\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \beta = \mathrm{const} > 0$$

и из неравенства Корна следует оценка

$$a(v, v) \geqslant \alpha^2 \| v \|^2, \quad \forall v \in V,\ \alpha \neq 0 \tag{3.10}$$

Форма $L(v)$, очевидно, непрерывна на V, следовательно

$$| L(v) | \leqslant \| L \| \| v \|$$

Таким образом

$$J(v) = {}^1/_2\, a(v, v) - L(v) - j(v) \geqslant {}^1/_2\, \alpha^2 \| v \|^2 -$$
$$-\| L \| \| v \| - c \| v \|^{2-\varepsilon} \to +\infty \quad \text{при } \| v \| \to +\infty$$

и тем самым коэрцитивность $J(v)$ установлена.

Замечание 3.1. Проведенные выкладки и рассуждения не проходят, если множество S_u пусто. Для доказательства оценки (3.10), а вместе с (3.10) существования и единственности, необходимо предполагать, что

$$\int_\Omega \rho F v\, d\Omega + \int_{S_\sigma} P v\, dS < 0, \quad \forall v = a + [b \times x]$$

где a и b — постоянные векторы; $v \neq 0$, $v \in K$. Данное условие известно под названием сильной гипотезы Синьорини [7, 12].

Замечание 3.2. Теорема существования в обычной задаче упругопластичности впервые доказана в работе [16], где также использовано условие вида (3.1).

Замечание 3.3. При доказательстве леммы 3.1 необходимо предположить, что $\Phi(0) = 0$; это условие выполняется для материалов без начальных напряжений.

Выпуклость докажем при дополнительном предположении о существовании $j''(u, \varphi, \varphi)$. Имеем

$$j''(u, \varphi, \varphi) = 2\mu \int_\Omega [\omega(e_u(u))\, {}^3/_2 e_u^2(\varphi) +$$
$$+ ({}^2/_3 \omega'(e_u(u)) / e_u(u))\, (e_{ij}(u)\, e_{ij}(\varphi))^2]\, d\Omega$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$[e_{ij}(u)\, e_{ij}(\varphi)]^2 \leqslant {}^9/_4\, e_u^2(u)\, e_u^2(\varphi) \tag{3.11}$$

Использовав (3.11) и (3.1), убеждаемся в том, что

$$j''(u, \varphi, \varphi) < a(\varphi, \varphi)$$

Отсюда, в силу известного критерия [13] следует строгая выпуклость функционала (2.12), что и завершает доказательство теоремы 3.1.

Замечание 3.4. Теорема 3.1 справедлива, а доказательство ее упрощается в случае, когда $\Phi(e_u)$ — линейная функция, растущая не быстрее $3\mu e_u$.

Поступила 7 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
5. *Signorini A.* Sopra alcune guestioni di elastostatica. Atti Soc. Ital. Progresso Sci., 1933.
6. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
7. *Lions J.-L., Stampaccnia G.* Variational inegualities. Communs Pure and Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 3, p. 493—519.
8. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
9. *Schwartz L.* Théorie des distributions, t° 1—2. Paris, Hermann, 1950—1951.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс. М., «Наука», 1965.
11. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
13. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
15. *Вайнберг И. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
16. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.