

ДИСКРЕТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНЫ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ

Л. С. Рыбаков, Г. П. Черепанов

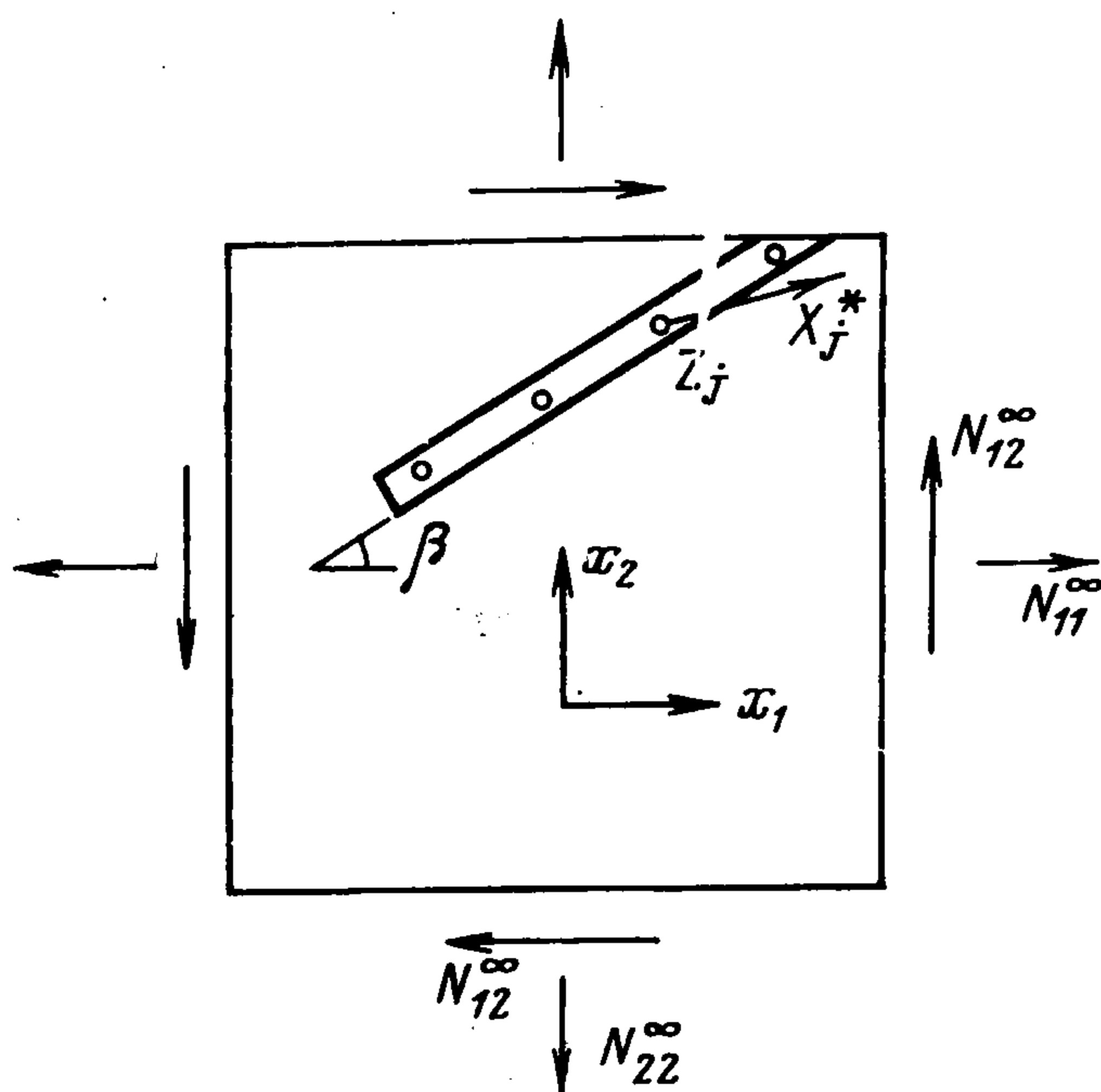
(Москва)

Рассматривается плоская контактная задача о взаимодействии бесконечной пластины и полубесконечного стрингера через бесконечную систему жестких круглых включений (заклепок). Задача приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от разности индексов; точное решение этой системы строится сведением ее к изученной проблеме Римана — Гильберта методом Я. Н. Фельда [1]. Данную задачу можно рассматривать как дискретный аналог задачи о непрерывном взаимодействии пластины с полубесконечным стрингером [2].

При расчете на прочность клепаных панелей, в которых взаимодействие тонкой пластины с одномерными подкрепляющими элементами осуществляется через дискретную систему заклепок, обычно предполагают, что пластина и подкрепляющие элементы взаимодействуют по всей линии контакта (непрерывное взаимодействие). Такой подход правомерен при частом расположении заклепок, когда учет дискретного характера взаимодействия элементов панели не играет существенной роли.

Ряд задач о непрерывном взаимодействии бесконечных и полубесконечных пластин с конечным, полубесконечным и бесконечным стрингером рассмотрен в работах [2-6] и др.

В работе [7] дано решение задачи о передаче силы от бесконечного стрингера к бесконечной пластине через периодическую систему заклепок. Ниже дается точное решение более трудной задачи о взаимодействии бесконечной пластины с полубесконечным стрингером, прикрепленным к пластине при помощи бесконечного числа заклепок, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга.



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Пусть к бесконечной тонкой пластине приклепан под углом β к оси ox_1 полубесконечный стрингер постоянного поперечного сечения F_0 (x_1, x_2 — прямоугольные декартовы координаты в срединной плоскости пластины, $z = x_1 + ix_2$ — комплексная переменная). Заклепки расположены с постоянным шагом R и имеют одинаковый радиус r (фиг. 1).

Примем следующие допущения: 1) силы трения между пластиной и стрингером отсутствуют. 2) Пренебрежем эффектом эксцентричного (относительно срединной плоскости пластины) прикрепления стрингера. 3) В пластине реализуется плоское напряженное состояние, а заклепки в пластине моделируются круглыми жесткими включениями. 4) Стрингер работает только на растяжение — сжатие, причем ослабление его за счет постановки заклепок не учитывается.

Ограничимся рассмотрением случая, когда пластина загружена на бесконечности постоянными усилиями, характеризуемыми тензором $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), а к центрам заклепок z_j приложены сосредоточенные силы $X_j^* = X_{1j}^* + iX_{2j}^*$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Отделим мысленно стрингер от пластины и приложим к центрам заклепок z_j пластины и стрингера неизвестные силы взаимодействия $X_j = X_{1j} + iX_{2j}$ и $-X_j$ соответственно. Пусть N_j — усилие в стержне на участке между j -й и $(j + 1)$ -й заклепками. Из равновесия части стрингера в окрестности j -й заклепки следует

$$(1.1) \quad X_j = X_j^* + (N_j - \theta_{j-1}N_{j-1})e^{i\beta} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{при } j = -1, -2, \dots \end{cases}$$

С учетом обозначений

$$P_j + iQ_j = X_j e^{-i\beta}, \quad P_j^* + iQ_j^* = X_j^* e^{-i\beta} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

соотношениям (1.1) можно придать вид

$$(1.2) \quad P_j = P_j^* + N_j - \theta_{j-1}N_{j-1}$$

$$Q_j = Q_j^* \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(1.3) \quad N_k = \sum_{j=0}^k (P_j - P_j^*) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

С целью определения передаваемых через заклепки неизвестных сил P_j запишем условия совместности взаимных смещений смежных заклепок в пластине и стрингере. Пусть γ_k — взаимное смещение k -й и $(k + 1)$ -й заклепок в пластине по направлению стрингера. Тогда

$$(1.4) \quad \gamma_k = \operatorname{Re} \{ [w(z_{k+1}) - w(z_k)] e^{-i\beta} \} = \frac{RN_k}{E_0 F_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(1.5) \quad (1 - \nu)Bw(z) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

$$(B = Eh / (1 - \nu^2), \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu))$$

где соотношение (1.5) для определения комплексного вектора перемещений $w = u_1 + iu_2$ записано согласно [8]; h — толщина пластины, ν , E — соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластины, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы, E_0 — модуль Юнга материала стрингера.

Для нахождения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ необходимо решить плоскую задачу теории упругости для плоскости с бесконечным числом жестких круг-

лых включений, имитирующих заклепки. Однако в большинстве практически важных случаев радиус заклепок мал по сравнению с их шагом ($r/R = 0.02-0.1$). Это позволяет ограничиться учетом асимптотического взаимодействия включений и использовать принцип суперпозиции в следующем виде:

$$(1.6) \quad \varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \psi_*(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z)$$

Здесь

$$(1.7) \quad \varphi_*(z) = \Gamma z, \quad \psi_*(z) = \Gamma' z$$

$$\varphi_j(z) = -\frac{X_j}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_j)$$

$$\psi_j(z) = \frac{\kappa \bar{X}_j}{2\pi(1+\kappa)} \ln(z - z_j) + \frac{X_j}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{z}_j}{z - z_j} + \frac{r^2}{(z - z_j)^2} \right]$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots; 4\Gamma = N_{11}^{\infty} + N_{22}^{\infty}; 2\Gamma' = N_{22}^{\infty} - N_{11}^{\infty} + 2iN_{12}^{\infty})$$

где $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ — потенциалы заданного однородного внешнего поля, $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ — потенциалы для плоскости с одним j -м жестким круговым включением, к центру которого приложена сила X_j .

Учитывая, что $(r/R)^2 \ll 1$, после некоторых преобразований условия совместности (1.4) при помощи соотношений (1.5) — (1.7) можно привести к виду

$$(1.8) \quad \gamma_0 - \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_{k-j} P_j = \frac{N_k}{\omega} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$(1.9) \quad \gamma_0 = \frac{4\pi R}{1+\nu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} (N_{11}^{\infty} + N_{22}^{\infty}) + \right. \\ \left. + (N_{11}^{\infty} - N_{22}^{\infty}) \cos 2\beta + 2N_{12}^{\infty} \sin 2\beta \right]$$

$$(1.10) \quad \Gamma_k = -\Gamma_{-k-1} = \begin{cases} 1 + 2\kappa \ln \varepsilon, & k = -1 \\ -1 - 2\kappa \ln \varepsilon, & k = 0 \\ 2\kappa \ln(1 + 1/k), & k \neq 0, -1 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{(1+\nu) E_0 F_0}{8\pi(1-\nu) BR}, \quad \varepsilon = r/R$$

Вычитая в системе (1.8) из k -го уравнения уравнение $k-1$ (при $k=1, 2, \dots$), с учетом (1.2) найдем

$$(1.11) \quad P_0 + \omega \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_{-j} P_j = \omega \gamma_0 + P_0^* \\ P_k + \omega \sum_{j=0}^{\infty} b_{k-j} P_j = P_k^* \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где

$$(1.12) \quad b_k = b_{-k} = \Gamma_k + \Gamma_{-k} = \begin{cases} 2\Gamma_0, & k = 0 \\ 1 + 2\kappa \ln 2\varepsilon, & |k| = 1 \\ 2\kappa \ln(1 - k^{-2}), & |k| = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Уравнения (1.11) служат для определения передаваемых через заклепки сил P_j ; усилия в стрингере N_j находятся затем из соотношения (1.3). Поле в пластине легко определяется по найденным P_j формулами (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7).

2. Решение бесконечной алгебраической системы. Следуя методу, предложенному Я. Н. Фельдом [1], рассмотрим функции

$$(2.1) \quad B(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad \Gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k z^k$$

Так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [2k |\ln(1 - k^{-2})|]^{1/k} = 1$$

и ряд

$$(2.2) \quad b(\tau) = B(e^{i\tau}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\cos k\tau - 1)$$

сходится, то функция $B(z)$ регулярна на единичной окружности C . Можно, далее, показать с помощью соотношений (1.10), (1.12), что

$$B(z) = (1 - z)\Gamma(z)$$

Предположим, что функции

$$P^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k, \quad P^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^* z^k$$

аналитичны в области $D_+ + C$ (D_+ и D_- — области внутри и вне единичной окружности соответственно). В отношении функции $P^+(z)$ это допущение оправдывается после решения задачи. Аналитичность функции $P^*(z)$ в области $D_+ + C$ обеспечивается рассматриваемым характером распределения внешних сил P_k^* .

Из этих рассуждений следует

$$(2.3) \quad P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C P^+(\zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta = P^{+(k)}(0)/(k!) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

причем

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P^+(\zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta = \begin{cases} P_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & k = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Аналогичные соотношения имеют место для величин P_k^* и $P^*(z)$.

С учетом этих выражений уравнения (1.11) принимают вид

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 + \omega \Gamma(\zeta)}{\zeta} P^+(\zeta) d\zeta = \omega \gamma_0 + P_0^*$$

$$(2.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(\zeta) P^+(\zeta) - P^*(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$(2.7) \quad G(\zeta) = 1 + \omega B(\zeta) = 1 + \omega(1 - \zeta)\Gamma(\zeta)$$

Введем в рассмотрение кусочно-аналитическую функцию

$$P(z) = \begin{cases} P^+(z), & z \in D_+ \\ P^-(z), & z \in D_- \end{cases}$$

являющуюся решением краевой задачи Римана — Гильберта

$$(2.8) \quad P^-(\zeta) = G(\zeta)P^+(\zeta) - P^*(\zeta) \quad (\zeta \in C)$$

Тогда условия (2.4) и (2.6) будут выполняться в силу определения функции $P(z)$, а уравнение (2.5) с учетом (2.7) и (2.8) переходит в соотношение

$$(2.9) \quad P^+(1) = \omega\gamma_0 + P^*(1)$$

отражающее условие равновесия отделенного от пластины полубесконечного стрингера.

Согласно (2.2) и (2.7) функция $G(\zeta)$ ($\zeta \in C$) действительна и положительна, так что ее индекс по окружности C равен нулю. Поэтому решение задачи (2.8) имеет вид [9]

$$(2.10) \quad P^\pm(z) = X^\pm(z) [f^\pm(z) + P^-(\infty)], \quad X^\pm(z) = \exp[-F^\pm(z)]$$

$$F^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{X^-(\zeta)(\zeta - z)}$$

Находя постоянную $P^-(\infty)$ из уравнения равновесия (2.9)

$$P^-(\infty) = \frac{\omega\gamma_0 + P^*(1)}{X^+(1)} - f^+(1)$$

запишем окончательно решение в следующем виде:

$$P^\pm(z) = \left[\frac{\omega\gamma_0 + P^*(1)}{X^+(1)} - f^+(1) + f^\pm(z) \right] X^\pm(z)$$

Отсюда согласно (1.7) находим

$$(2.11) \quad P_k = \left[\frac{\omega\gamma_0 + P^*(1)}{X^+(1)} - f^+(1) \right] \frac{X^{+(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{k!} [f^+(z) X^+(z)]_{z=0}^{(k)}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

Отметим в заключение более удобную для вычислений форму записи последнего уравнения. Для этого используем следующие рекуррентные соотношения:

$$(2.12) \quad \frac{X^{+(k)}(z)}{k!} = -\frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} (k-m) \frac{X^{+(m)}(z) F^{+(k-m)}(z)}{m!(k-m)!} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$(2.13) \quad \frac{[f^+(z) X^+(z)]^{(k)}}{k!} = \sum_{m=0}^k \frac{f^{+(m)}(z) X^{+(k-m)}(z)}{m!(k-m)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Обозначим

$$(2.14) \quad p_k = \frac{1}{k!} X^{+(k)}(0), \quad \delta_k = \frac{1}{k!} [f^+(z) X^+(z)]_{z=0}^{(k)}$$

$$(2.15) \quad \lambda_k = \frac{F^{+(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln g(\sigma) \cdot \cos k\sigma d\sigma \quad (g(\sigma) = G(e^{i\sigma}))$$

$$(2.16) \quad \eta_k = \frac{f^{+(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{X^-(\zeta) \zeta^{k+1}}$$

Учитывая, что

$$(2.17) \quad p_0 = X^+(0) = \exp[-F^+(0)], \quad X^+(1) = \exp[-F(1)]$$

$$F^+(0) = \lambda_0, \quad F(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-1} d\zeta = \frac{\lambda_0}{2}$$

при помощи (2.11) — (2.16) получим

$$(2.18) \quad P_k = \left[\frac{\omega \gamma_0 + P^*(1)}{\sqrt{p_0}} - f^+(1) \right] p_k + \delta_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

где

$$(2.19) \quad p_k = -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k n p_{k-n} \lambda_n \quad (k=1, 2, \dots)$$

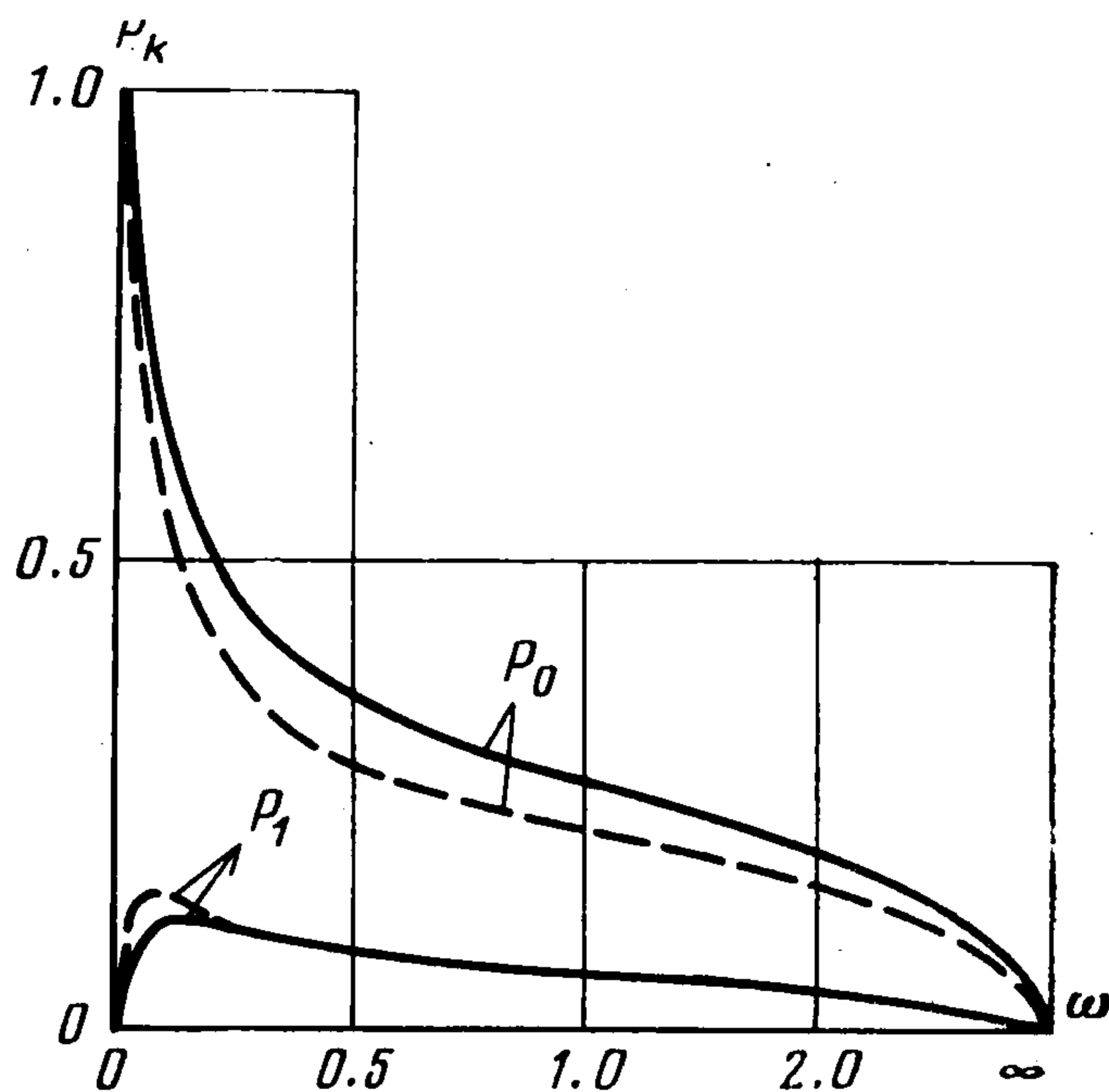
$$(2.20) \quad \delta_k = \sum_{m=0}^k p_{k-m} \eta_m \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

3. Численные результаты. В качестве иллюстрации полученного общего решения рассмотрим частный случай, когда внешнее поле отсутствует, т. е. $N_{\alpha\beta}^{\infty} = 0$ и $\gamma_0 = 0$, а к крайней заклепке ($k=0$) приложена сила $X_0^* = e^{i\beta}$. Тогда $P_0^* = P^*(z) = 1$, $f^+(z) = 0$, $\eta_k = 0$ и согласно (2.18), (2.20)

$$P_k = p_k / \sqrt{p_0} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Теперь требуется найти квадратуры (2.15) и применить рекуррентную формулу (2.19).

На фиг. 2 при $\nu = 1/3$ представлены кривые зависимости усилий P_0 и P_1 в двух крайних заклепках от относительного параметра жесткости ω при двух значениях параметра ε , равных 0.02 (пунктир) и 0.1 (сплошные линии). Между этими значениями расположена область встречающихся на практике величин ε . Вычисления проводились на М-222М; время счета составило около двух минут (при 17 точках на каждой кривой).



Фиг. 2

Отметим, что на фиг. 2 вдоль оси ω использован переменный масштаб: левее 1 отложены значения самого параметра ω , а правее 1 — значения $1/\omega$, так что при $\omega \leq 1$ точки ω и $1/\omega$ располагаются симметрично относительно точки $\omega = 1$.

Зависимость P_k при $k=2, 3, \dots$ от параметра ω качественно повторяет кривые на фиг. 2 для P_1 . О распределении сил P_k по заклепкам можно судить по следующим данным (приведены значения $10^4 \cdot P_k$, $k=0, 1, \dots, 5$):

ε	ω	$k=0$	1	2	3	4	5
0.1	0.1	6325	1162	526	294	185	126
	1.0	2617	566	376	280	222	182
	10	871	124	91	74	63	55
0.02	0.1	5360	1397	651	355	216	142
	1.0	2089	537	369	277	219	179
	10	689	112	84	69	59	51

Отметим, что при наличии одного внешнего поля, когда $N_{\alpha\beta}^{\infty} \neq 0$ (а $X_k^* = 0$), имеем

$$P_k / \gamma_0 = \omega p_k / \sqrt{p_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

что с точностью до множителя ω совпадает с рассмотренным только что случаем.

Поступила 15 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 2.
2. Koiter W. T. On the diffusion of load from a stiffenan into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, pt 2.
3. Melan. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr-Arch., 1932, Bd3, H2.
4. Buell E. L. On the distribution of plane stress in semi-infinite plate with partially stiffened edge. J. Math. and Phys., 1948, vol. 26, No. 4.
5. Benscoter S. U. Analysis of a single stiffener on an infinite sheet. J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 3.
6. Brown E. H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet. Proc. Roy. Soc. London A, 1957, vol. 239, No. 1218.
7. Buidiansky B., Wu Tai Te. Transfer of load to a sheet from a rivet-attached stiffener. J. Math. and Phys., 1961, vol. 40, No. 2.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.