

**МАССОПЕРЕНОС В ДИФФУЗИОННОМ СЛЕДЕ КАПЛИ
ПРИ СТОКСОВОМ ОБТЕКАНИИ**

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Исследуется диффузия вещества в области за сферической каплей в стоксовом потоке при больших числах Пекле. Методом сращиваемых асимптотических разложений получено распределение концентрации в диффузионном следе капли и определен локальный диффузионный поток к кормовой части ее поверхности. Показано, что за каплей вдоль оси симметрии течения концентрация линейно растет с расстоянием от задней критической точки и повышается с увеличением отношения β вязкости капли к вязкости окружающей жидкости. Локальное число Шервуда достигает минимума в задней критической точке и равно $[6\pi^{-1}(\beta + 1)P^{-1}]^{1/2}$ (P — число Пекле). При этом толщина диффузионного пограничного слоя будет порядка $P^{1/2}$.

Решение задачи о массообмене капли при больших числах Пекле, получаемое методом диффузионного пограничного слоя [1], как известно, становится непригодным в области диффузионного следа, включая окрестность задней критической точки, где этот метод приводит к бесконечному возрастанию толщины пограничного слоя. Между тем исследование распределения концентрации в этой области служит важным этапом при анализе диффузионного взаимодействия частиц или капель между собой. Оно дает также возможность устранить особенность в задней критической точке.

Ранее аналогичная задача рассматривалась для твердой сферы [2-4]. Подвижность поверхности капли обуславливает отличия картины обтекания и распределения концентрации по сравнению с твердой частицей.

1. Постановка задачи. Распределение концентрации во всей области вне капли, движущейся поступательно со скоростью U при малых числах Рейнольдса, в предположении полного поглощения вещества на поверхности капли и постоянной концентрации вдали от нее дается решением следующей краевой задачи:

$$(1.1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = e^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right\}$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad e^{-2} = P = \frac{aU}{D}$$

$$\psi = \frac{1}{4} (r - 1) \left(2r - \frac{\beta}{\beta + 1} - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta$$

$$(1.2) \quad r = 1, \quad c = 0; \quad r = \infty, \quad c = 1$$

$$\theta = \pi, \quad \partial c / \partial \theta = 0; \quad \theta = 0, \quad \partial c / \partial \theta = 0$$

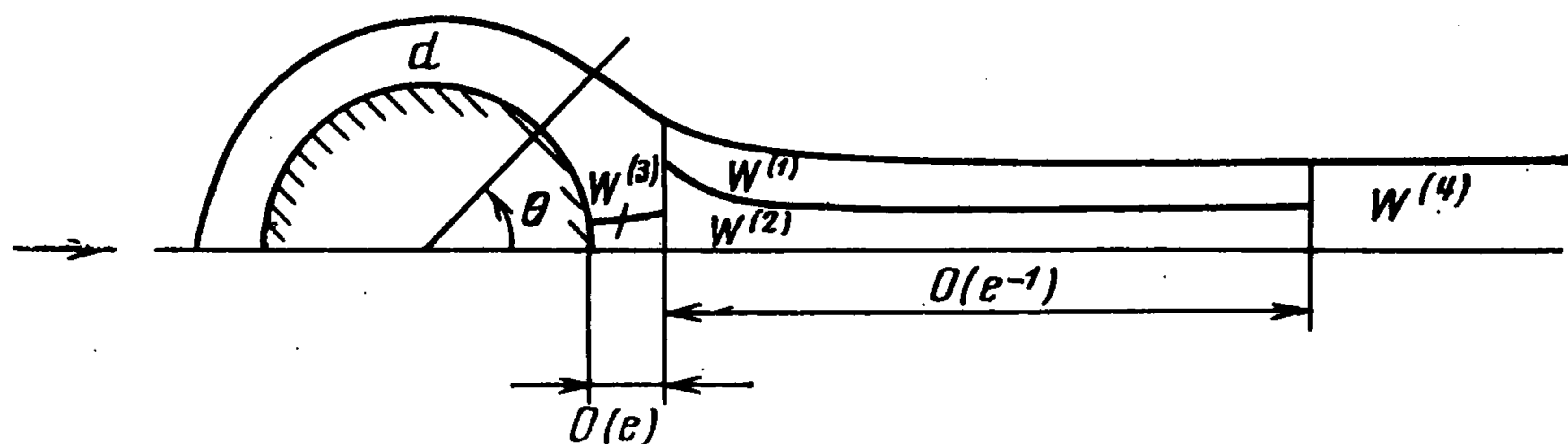
Здесь введена сферическая система координат, связанная с центром капли (угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности, радиальная координата отнесена к радиусу капли a) и учтена осевая сим-

метрии течения; концентрация отнесена к своему значению на бесконечности.

Отметим, что два последних условия в (1.2) вытекают из симметрии задачи; они необходимы в качестве дополнительных условий при применении метода сращиваемых асимптотических разложений, когда исходное уравнение (1.1) в соответствующих областях заменяется уравнением параболического типа.

Рассматривается случай больших чисел Пекле, т. е. $e \ll 1$.

Решение задачи (1.1), (1.2) в этом случае известно [1] всюду вне капли за исключением области диффузионного следа $W = \{0 \leq \theta < e, r \geq 1\}$. Цель данной работы — построение решения для указанной области.



Разложением искомой функции c в ряд по малому параметру e не удается построить решение, равномерно пригодное для всей области W . Поэтому приходится разбить ее на несколько областей (см. фигуру, где цифрами обозначены соответствующие области W^i ($i = 1, 2, 3, 4$), d — область диффузионного пограничного слоя), с тем чтобы построить асимптотические решения в каждой из них, сращивая асимптотики на условных границах областей.

2. Распределение концентрации в области диффузионного следа капли. Рассмотрим конвективно-погранслоистую область следа $W^1 = \{e \ll \ll \theta \ll e^{1/2}, e \ll r - 1 \ll e^{-1}\}$ (выражение в фигурных скобках указывает порядок характерных размеров рассматриваемой области). В этой области правая часть уравнения (1.1) несущественна, поэтому концентрация здесь зависит лишь от функции тока. Конкретное выражение для распределения концентрации в W^1 определяется сращиванием с решением в диффузионном пограничном слое c^d , полученным в [1]

$$(2.1) \quad c^1(z) = c^d(z, \theta)|_{\theta \rightarrow 0} = \operatorname{erf}(\sqrt{3/8}(\beta + 1)z), \quad z = e^{-1}\psi$$

$$c^d(z, \theta) = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{t(\theta)}}\right), \quad t(\theta) = \frac{1}{2(\beta + 1)} \left\{ \frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right\}$$

В этой области происходит перенос вещества, приходящего из диффузионного пограничного слоя, без изменения вдоль линий тока.

Для исследования внутренней области следа $W^2 = \{e \ll r - 1 \ll e^{-1}, \theta \ll e\}$ и области смешения $W^4 = \{e^{-1} \ll r, \psi \ll e\}$, в которых радиальный перенос несуществен, запишем уравнение конвективной диффузии в переменных r, ψ с учетом того, что первым членом в скобках в правой части

уравнения (1.1) в этих областях можно пренебречь

$$(2.2) \quad \frac{\psi_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial c}{\partial r} = e^2 \left\{ \psi_\theta^2 \frac{\partial c^2}{\partial \psi^2} + (\psi_{\theta\theta} + \operatorname{ctg} \theta \psi_\theta) \frac{\partial c}{\partial \psi} \right\}$$

Здесь все коэффициенты должны быть выражены через r и ψ с использованием выражения для ψ в (1.1).

Область задней критической точки $W^3 = \{\theta \ll e, y = r - 1 \ll e\}$, в которой существенны как радиальный, так и тангенциальный перенос, и внутреннюю область следа W^2 рассмотрим совместно.

Уравнение и граничные условия для W^3 в переменных $Y = (r - 1)e^{-1}$, $S = e^{-1}\theta$ имеют вид

$$(2.3) \quad Y \frac{x^3}{\partial Y} - \frac{1}{2} S \frac{z^3}{\partial S} = (\beta + 1) \left\{ \frac{\partial^2 c^3}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 c^3}{\partial S^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial c^3}{\partial S} \right\}$$

$$c^3|_{Y=0} = 0, \quad \frac{\partial c^3}{\partial S} \Big|_{S=0} = 0$$

$$c^3|_{S \rightarrow \infty} = c^d|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow e^2 \sqrt{\frac{3}{8\pi(\beta + 1)}} Y S^2$$

Здесь уравнение получено из (1.1), а третье граничное условие есть условие сращивания с решением в диффузионном пограничном слое c^d , определенном в (2.1).

Уравнения и граничные условия для W^2 в переменных y , $\zeta = e^{-2}\psi$ будут следующими:

$$(2.4) \quad \frac{\partial c^2}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial c^2}{\partial \zeta}$$

$$\left(\sqrt{\zeta} \frac{\partial c^2}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = 0, \quad c^2|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow e \sqrt{\frac{3(\beta + 1)}{2\pi}} \zeta$$

Здесь уравнение получено из (2.2), а второе граничное условие определено сращиванием с решением в конвективно-погранслойной области следа (2.1).

Для соотношений (2.3), (2.4) необходимо добавлять условие сращивания

$$(2.5) \quad c^3(Y \rightarrow \infty) = c^2(y \rightarrow 0)$$

Из (2.3), (2.4) видно, что в области W^3 концентрация имеет порядок e^2 , а в W^2 — порядок e . Поэтому для выполнения (2.5) необходимо потребовать

$$(2.6) \quad c^2(y, \zeta(y, \theta))|_{y \rightarrow 0, \theta = \text{const}} \rightarrow 0$$

Распределения концентрации в области W^2 согласно (2.4), (2.6) и в области W^3 согласно (2.3), (2.5) соответственно имеют вид

$$(2.7) \quad c^2(y, \zeta) = e \sqrt{\frac{3(\beta + 1)}{2\pi}} [\zeta + 2y]$$

$$(2.8) \quad c^3(Y, S) = e^2 \sqrt{\frac{3}{8\pi(\beta + 1)}} Y [S^2 + 4(\beta + 1)]$$

Так как при $y \rightarrow \infty$ концентрация во внутренней области следа не удовлетворяет граничному условию на бесконечности (1.2), необходимо

рассмотреть область смешения $W^4 = \{e^{-1} \ll r, \psi \ll e\}$. Введя переменные $\rho = er, z = e^{-1}\psi$, для W^4 получаем

$$(2.9) \quad \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \rho} = 2 \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial c^{(4)}}{\partial z} \left(\sqrt{z} \frac{\partial c^{(4)}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad c^{(4)}|_{z \rightarrow \infty} = 1$$

$$c^{(4)}|_{\rho \rightarrow 0} =$$

$$= \left[c^{(1)}(z) - \sqrt{\frac{3(\beta+1)}{2\pi}} z + c^{(2)}(y, \xi) \right]_{y \rightarrow \infty} = c^{(1)}(z) + 2 \sqrt{\frac{3(\beta+1)}{2\pi}} \rho$$

Здесь уравнение получено из (2.2), а начальное условие (при $\rho \rightarrow 0$) определено сращиванием с решениями в областях $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$.

Решение задачи (2.9) имеет вид [5] !

$$(2.10) \quad c^{(4)}(z, \rho) = A(z, \rho) * \left[\operatorname{erf} \sqrt{\frac{3}{8}(\beta+1)} z - \sqrt{\frac{3(\beta+1)}{2\pi}} z \right] +$$

$$+ \sqrt{\frac{3(\beta+1)}{2\pi}} (z + 2\rho)$$

$$A(z, \rho) * u(z) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho} \exp \left\{ -\frac{z+z^*}{2\rho} \right\} I_0 \left\{ (z, z^*)^{1/2} \rho \right\} u(z^*) dz^*$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Приведем формулы для распределения концентрации (в сферической системе координат) в областях диффузионного следа капли W_i ($i = 1, 2, 3, 4$), которые вытекают из выражений (2.1), (2.6), (2.7), (2.9)

$$(2.11) \quad c^1 = \operatorname{erf} \left(e^{-1} \sqrt{\frac{3}{8}(\beta+1)} \psi \right)$$

$$c^{2,3} = \sqrt{\frac{3(\beta+1)}{2\pi}} [2e(r-1) + e^{-1}\psi]$$

$$c^4(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1 - \frac{K}{r} \exp \left(-\frac{r\theta^2}{4e^2} \right), \quad K = \text{const}$$

Здесь зависимость $\psi = \psi(r, \theta)$ определена в (1.1), $c^{2,3}$ — выражение для распределения концентрации в областях W^2 и W^3 , которое, как видно из (2.7), (2.8), может записываться единой формулой, а для области W^4 приведено асимптотическое поведение концентрации на больших расстояниях от капли; K — полный диффузионный поток на поверхность капли.

Равномерно пригодные по e (во всем интервале $0 \leq \theta \leq \pi, r-1 < e$) выражения для распределения концентрации и локального числа Шервуда имеют вид

$$(2.12) \quad c(r, \theta) = c^d(r, \theta) + (r-1) j_{\min}$$

$$j(\theta) = \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=1} = j^d(\theta) + j_{\min}, \quad j_{\min} = e [6\pi^{-1}(\beta+1)]^{1/2}$$

Здесь $c^d, j^d(\theta)$ — величины, вычисленные по приближению диффузионного пограничного слоя.

Видно, что минимальное значение локального числа Шервуда растет с ростом вязкости капли, и кормовая область капли дает вклад в полный диффузионный поток только в третьем приближении по параметру e .

На оси за каплей концентрация сначала растет линейно с расстоянием y от задней критической точки, а потом экспоненциально стремится к сво-

ему значению на бесконечности (2.11). Для твердой частицы начальный закон роста определялся корнем квадратным из y [4]. Раствор во внутренней области диффузионного следа капли более обеднен по сравнению с аналогичной областью в случае твердой частицы [4], и концентрация имеет порядок $P^{-1/2}(\beta + 1)^{1/2}$.

Поступила 8 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Sih Ping Nuei, Newman J.* Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1967, vol. 10, No. 12, p. 1749 — 1756.
3. *Newman J.* Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. *J. Industr. and Engng Chem. Fundament.*, 1969 vol. 8, No. 3, p. 553 — 557.
4. Полянин А. Д. Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, находящейся в стоксовом потоке. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 1.
5. *Sutton W. G. L.* On the equation of diffusion in a turbulent medium. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1943, vol. 182, p. 43.