Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 534.222.2

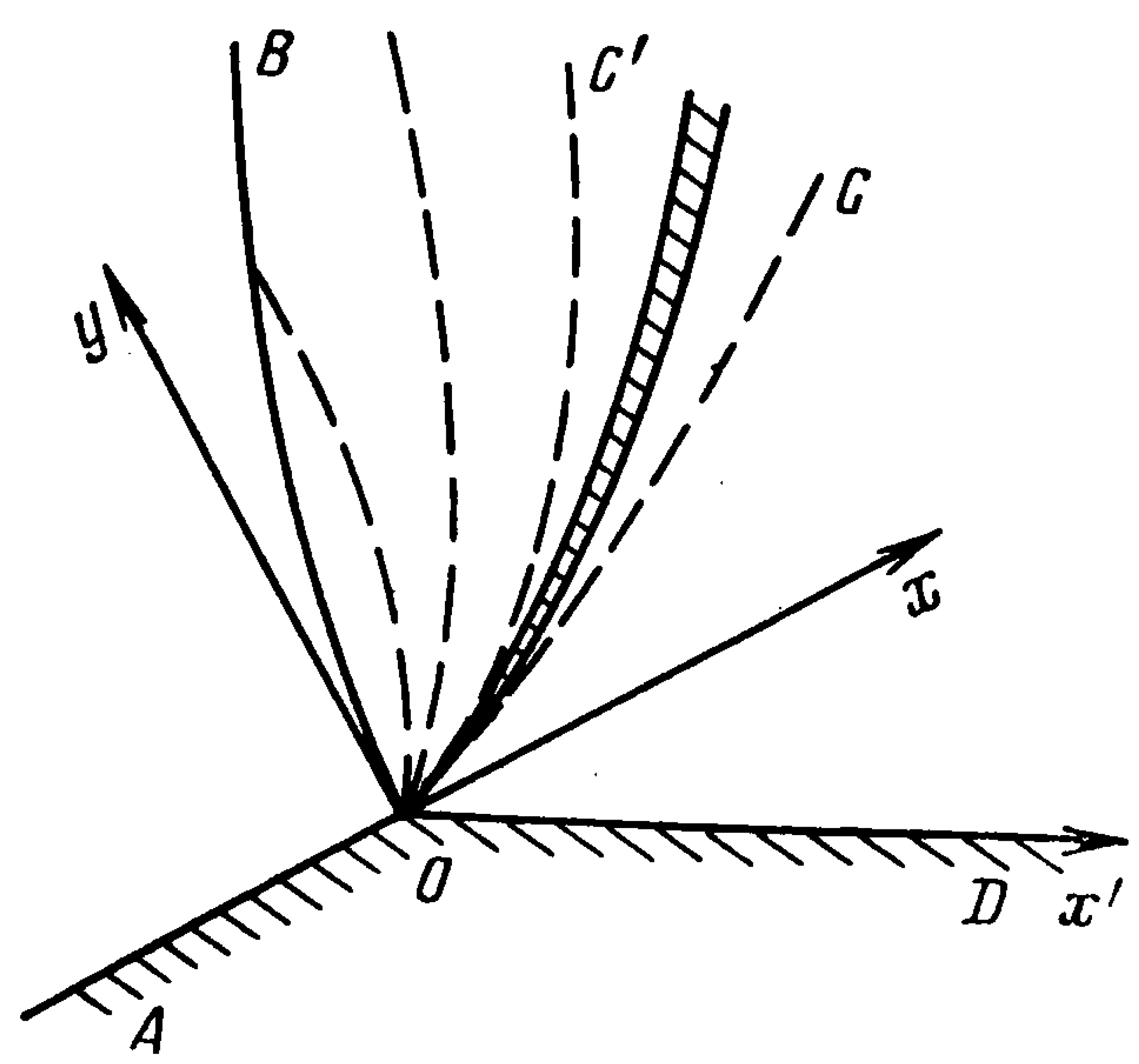
О СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

А. И. Есин, И. А. Чернов

(Саратов)

Рассматривается локальная задача обтекания конечного выпуклого угла дозвуковым потоком газа. На основе полных уравнений газовой динамики показано, что безударное течение невозможно, если в угловой точке реализуется особенность [1], а стенка за изломом прямолинейная. Решение, примыкающее вниз по потоку к центрированной волне разрежения, оказывается непригодным в окрестности особой характеристики, исходящей из угловой точки. Методом деформированных координат найдено равномерно пригодное решение и построен скачок уплотнения.

1. Течение перед ударной волной. Рассмотрим плоское установившееся обтекание конечного выпуклого угла дозвуковым потоком совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей γ в предположении, что стенки прямолинейны (фигура). Для конечного угла излома β в области AOC известно локальное решение [2, 3]. Задача, следовательно, заключается в построении решения в области COD. Не нарушая общности последующих рассуждений, можно считать, что течение слева от последней характеристики OC, исходящей из угловой точки O, потенциальное. Тогда решение [3] в зоне BOC центрированной волны разрежения можно взять в виде (z фиксировано) [4]



$$\Phi = g_0(z)\, y + g_k(z)\, y^{1+2k/3}, \quad y \to 0, \quad z = x / y \tag{1.1}$$

$$g_0 = \nu^{-1}(1 + z^2)^{1/2} \sin \omega, \quad \omega = \nu \operatorname{arctg} z, \quad \nu^2 = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$$

$$g_m = (\sin \omega)^{m/3} (\cos \omega)^{1+m/3\nu^2} (1 + z^2)^{1/2+m/3} [A_m + H_m(\omega)]$$

$$H_m = \int (\sin \omega)^{-m/3} (\cos \omega)^{-1-m/3\nu^2} E_m(\omega)\, d\omega$$

$$E_m = -(\gamma + 1)(1 + 2m/3)^{-1} (\sin 2\omega)^{-1} (1 + z^2)^{1/2 - m/3} G_m(\omega)$$

$$U = u_0(z) + u_k(z) y^{2k/3}, \quad V = v_0(z) + v_k(z)\, y^{2k/3}$$

$$u_m = g_m', \quad v_m = (1 + 2m/3)\, g_m - z g_m', \quad m = 0, 1, \ldots$$

Здесь Φ, U, V — соответственно, потенциал и составляющие вектора скорости $\mathbf{w}$ вдоль осей x, y; $k = 1, 2, \ldots$ — индекс, означающий суммирование; G_m — функции предыдущих приближений ($G_1 \equiv 0$); A_m — постоянные, определяемые из сращивания с решением типа [2], в частности (C — произвольная постоянная, зависящая от решения задачи в целом)

$$A_1 = -\frac{27}{5} C^{4/3} (\gamma + 1)^{1/18} (\gamma - 1)^{-1/6}, \quad A_2 = 0$$

Для упрощения граничных условий и решения в области COD перейдем к прямоугольным координатам x', y', связанным с x, y преобразованием поворота на угол β (фигура). Тогда, зная угловой коэффициент z_c характеристики OC в точке O, являющийся корнем уравнения

$$z_c - g_0(z_c) \,/\, g_0'(z_c) = \operatorname{tg} \beta$$

можно переписать решение (1.1) в форме (штрихи всюду опущены)

$$\Phi = q_0^\circ(\xi)_x + q_k^\circ(\xi)\, x^{1+2k/3}, \quad x \to 0, \quad \xi = By \,/\, x \tag{1.2}$$

$$q_m^\circ = g_m \eta^{1+2m/3}, \quad \eta(\xi) = \xi_{B^{-1}} \cos\beta - \sin\beta, \quad m = 0, 1, \ldots$$

$$B = \nu^{-1} \operatorname{tg} \omega_c, \quad \omega_c = \nu \operatorname{arctg} z_c$$

По решению (1.2) уравнение характеристики OC находится в виде

$$\xi = 1 + \xi_k^\circ x^{2k/3} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\frac{\xi_m^\circ}{U_0} = \frac{3(\gamma - 1)}{m} (\sin 2\omega_c)^{-2} \left[\frac{\sin 2\omega_c}{(\gamma^2 - 1)^{1/2}} v_m^\circ - u_m^\circ\right]_{\xi=1} + e_m^\circ(1) \tag{1.4}$$

$$u_m^\circ = (u_m \cos\beta - v_m \sin\beta)\, \eta^{2m/3}$$

$$v_m^\circ = (u_m \sin\beta + v_m \cos\beta)\, \eta^{2m/3}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

где $U_0 = u_0^\circ(1)$ — скорость однородного сверхзвукового потока, примыкающего к простой центрированной волне разрежения, $e_m^\circ(\xi)$ — функции предыдущих приближений ($e_1^\circ \equiv 0$).

В первом приближении потенциал скорости на характеристике OC

$$(\Phi)_{OC} = U_0 x + q_1^\circ(1)\, x^{5/3} + O(x^{7/3}) \tag{1.5}$$

Предположим, что дальнейшее продолжение течения является безударным. Тогда в области COD необходимо решить задачу с данными на характеристике OC и стенке OD (условие обтекания). Решение при $x \to 0$ и фиксированном ξ должно иметь вид (1.5), где вместо $q_1^\circ(1)$ стоит коэффициент $q_1(\xi)$, удовлетворяющий уравнению

$$(1 - \xi^2)\, q_1'' + {}^4/_3\, \xi q_1' - {}^{10}/_9\, q_1 = 0$$

с общим решением (Λ_1, Λ_2 — произвольные постоянные)

$$q_1 = \Lambda_1 (1 - \xi)^{5/3} + \Lambda_2 (1 + \xi)^{5/3} \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что $q_1''(\xi) \to \infty$ при $\xi \to 1$, если только $\Lambda_1 \neq 0$. Для прямолинейной стенки OD коэффициент Λ_1 не может быть равен нулю, поэтому на прямой $\xi = 1$ возникают бесконечные ускорения, и формально существующее безударное течение теряет физический смысл. Для случая $\beta \ll 1$ это было показано в [5, 6] на основе изучения трансзвуковых уравнений.

2. Течение за ударной волной. Будем считать теперь, что границей раздела областей BOC и COD служит криволинейный скачок уплотнения, форма которого подлежит определению. Условия на скачке запишем в виде

$$[w_\tau] = 0, \quad w_n{}^\circ w_n = 1 - \nu^2 w_\tau{}^2 \tag{2.1}$$

Здесь w_n и w_τ — соответственно, нормальная и касательная к скачку составляющие вектора скорости $\mathbf{w}$; $[X] = X - X^\circ$ означает разрыв величины X при переходе через скачок. В качестве исходной системы уравнений возьмем преобразованные уравнения неразрывности и вихря

$$\operatorname{div}\left[(1 - w^2)^{1/(\gamma-1)}\, \mathbf{w}\right] = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}\left[\frac{\mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}}{1 - w^2}\right] = 0$$

Анализ первого граничного условия (2.1) показывает, что решение системы (2.2) следует искать в форме

$$u = U_0 + u_k(\xi)\, x^{2k/3}, \quad v = v_k(\xi)\, x^{2k/3} \tag{2.3}$$

где u, v — составляющие вектора скорости вдоль осей новой системы координат, причем согласно условию обтекания

$$v_m(0) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Из первого условия (2.1) и (2.3) непосредственно следует, что скачок имеет нулевую интенсивность в вершине угла. Коэффициенты u_m, v_m ($m = 1, 2, \ldots$) удовлетворяют системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v_m' - B\left({}^2/_3\, m u_m - \xi u_m'\right) = BF_m(\xi)$$

$${}^2/_3\, m v_m - \xi v_m' - B u_m' = BP_m(\xi)$$

где F_m и P_m — функции предыдущих приближений ($F_1 = P_1 = P_2 \equiv 0$).

Полагая

$$u_m = \left(1 + \frac{2}{3} m\right) q_m(\xi) - \xi q_m'(\xi) - \int_0^\xi P_m(\xi)\, d\xi \tag{2.4}$$

$$v_m = B q_m'(\xi)$$

получаем уравнение для определения q_m

$$(1 - \xi^2)\, q_m'' + \frac{4}{3} m \xi q_m' - \frac{2}{3} m \left(1 + \frac{2}{3} m\right) q_m = \tag{2.5}$$

$$= F_m + \xi P_m - \frac{2}{3} m \int_0^\xi P_m(\xi)\, d\xi$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (2.5), имеет вид

$$q_m(\xi) = \Lambda_{1m} (1 - \xi)^{1+2m/3} + \Lambda_{2m} (1 + \xi)^{1+2m/3}$$

Зная последнее, можно записать общее решение уравнения (2.5). После удовлетворения условию обтекания получим

(2.6) $$q_1 / U_0 = C_1 (\lambda^{5/3} + \mu^{5/3}), \quad \lambda = 1 - \xi, \quad \mu = 1 + \xi$$

(2.7) $$q_2 / U_0 = C_2 (\lambda^{7/3} + \mu^{7/3}) + a_k \lambda^{(k+1)/3} \mu^{(6-k)/3}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$a_1 = a_4 = -{}^5/_{12} [\gamma + 1 + (\gamma - 3) B^2] DC_1$$

$$a_2 = a_3 = - {}^{25}/_{72} (\gamma + 1) M^2 DC_1$$

$$D = M^2 C_1 / B^2, \quad M^2 = 1 + B^2$$

(2.8) $$q_3 / U_0 = C_3 (\lambda^3 + \mu^3) - {}^9/_{10}\, c\, (\lambda^{-1/3} \mu^{10/3} + \lambda^{10/3} \mu^{-1/3}) + {}$$
$$+ b_k \lambda^{k/3} \mu^{(9-k)/3}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad P_3 (\xi) = 2C_4 \xi$$

$$c = -{}^2/_9 a_1{}^2 / C_1, \quad b_1 = b_8 = {}^4/_5 a_1 a_2 / C_1$$

$$b_2 = b_7 = -\frac{D}{56} \Big\{ -\frac{56 a_1 C_2}{DC_1} + \frac{10}{3} \Big[17 (\gamma + 1) - (3\gamma + 11) B^2 \Big] a_1 + {}$$
$$+ 10 (\gamma + 1) M^2 a_2 + \frac{125}{9} [\gamma + 1 + 2 (\gamma - 3) B^2 + (\gamma + 1) B^4] C_1{}^2 \Big\}$$

$$b_3 = b_6 = -\frac{5D}{72} \{14 (\gamma + 1) M^2 C_2 + 2 [7 (\gamma + 1) - (\gamma - 3) B^2] a_2 + {}$$
$$+ \frac{25}{9} (\gamma + 1) M^4 C_1{}^2 \Big\}$$

$$b_4 = b_5 = -\frac{D}{40} \Big\{ -\frac{56 a_1 C_2}{DC_1} + \frac{25}{3} (\gamma + 1) (5 + B^2) a_1 + {}$$
$$+ \frac{40}{3} [2 (\gamma + 1) + \gamma B^2] a_2 + \frac{125}{9} (\gamma + 1) (1 - B^4) C_1{}^2 \Big\}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, входящие в (2.4), (2.6) — (2.8), определяются из условий на скачке.

Решение (2.3) непригодно в области, где $\lambda \sim x^2$; это объясняется тем, что $q_2' (\xi)$, $q_3 (\xi) \to \infty$ при $\xi \to 1$, поэтому невозможно удовлетворить условиям на скачке. Нарастание особенностей в решении (2.3) устраняется методом деформированных координат [7, 8]. Для этого представим искомое решение в параметрической форме

(2.9) $$u = U_0 + U_k (s) x^{2k/3}, \quad v = V_k (s) x^{2k/3},$$
$$\xi = s + \xi_k (s) x^{2k/3}$$

где коэффициенты U_k, V_k и деформации ξ_k подлежат определению; значение параметра $s = 1$ соответствует особой характеристике OC' — единственной левобегущей характеристике в области $C'OD$, исходящей из угла [9]. Для нахождения решения в форме (2.9) введем вспомогательную функцию — потенциал скорости при безвихревом обтекании угла

(2.10) $$\Phi = U_0 x + q_1 (\xi) x^{5/3} + q_2 (\xi) x^{7/3} + q_3 (\xi) x^3 + O (x^{11/3})$$

где коэффициенты определяются формулами (2.6) — (2.8). Используя (2.10), перепишем решение (2.3) в виде

$$u = \Phi_x - B^2 C_4 y^2, \quad v = \Phi_y$$

откуда заключаем, что параметризация (2.9) равносильна представлению функции Φ в форме

$$\Phi = U_0 x + Q_1 (s) x^{5/3} + Q_2 (s) x^{7/3} + Q_3 (s) x^3 + O (x^{11/3})$$
$$\xi = s + \xi_1 (s) x^{2/3} + \xi_2 (s) x^{4/3} + O (x^2)$$

Выполняя известную для метода [8] процедуру переразложения функции (2.10), находим, что Q_1, Q_2, Q_3 определяются формулами (2.6) — (2.8), в которых ξ следует заменить на s и, кроме того, прибавить к правым частям первых уравнений в (2.7), (2.8) выражения, содержащие деформации, соответственно

$$\xi_1 Q_1' \,/\, U_0, \quad (\xi_1 Q_2' + \xi_2 Q_1' - {}^1/_2 \xi_1^2 Q_1'') \,/\, U_0$$

Требуя ограниченности Q_2', Q_3' при $s = 1$, находим

$$\xi_1 = {}^3/_5 2^{5/3} a_1 / C_1, \quad \xi_2 = {}^3/_5 2^{7/3} b_2 \,/\, C_1$$

Все последующие деформации также могут быть выбраны в виде постоянных. В общем виде

$$\frac{\xi_m}{U_0} = \frac{6(\gamma-1)}{2m+3}(\sin 2\omega_c)^{-2}\left[\frac{\sin 2\omega_c}{(\gamma^2-1)^{1/2}} V_m - U_m\right]_{s=1} + e_m(1) \tag{2.11}$$

где $e_m(s)$ — функции предыдущих приближений ($e_1 \equiv 0$). Коэффициенты U_m, V_m разложений (2.9) для $m = 1, 2, 3$ имеют вид

$$U_1 = {}^5/_3 Q_1 - sQ_1', \quad U_2 = {}^7/_3 Q_2 - sQ_2' - {}^5/_3 \xi_1 Q_1'$$
$$U_3 = 3Q_3 - sQ_3' - {}^5/_3 \xi_1 Q_2' - {}^7/_3 \xi_2 Q_1' - C_4 s^2, \quad V_m = BQ_m'$$

Непосредственно проверяем, что выполняются условия обтекания стенки OD

$$V_1(0) = 0, \quad V_2(0) = \xi_1 V_1'(0)$$
$$V_3(0) = \xi_1 V_2'(0) + \xi_2 V_1'(0) - {}^1/_2 \xi_1^2 V_1''(0)$$

Предположим, что уравнение скачка имеет вид

$$\xi = 1 + \xi_1^\circ x^{2/3} + \xi_2^\circ x^{4/3} + \delta_3 x^2 + O(x^{8/3})$$
$$(\lambda = -s_3 x^2 + O(x^{8/3}))$$

Коэффициенты ξ_1°, ξ_2° находятся по (1.4). Неизвестные δ_3 и s_3 связаны соотношением

$$\delta_3 - s_3 = \xi_3 \tag{2.12}$$

Отличие скачка от характеристики описывается коэффициентом s_3; ξ_3 — деформация третьего порядка, однако находить ее путем исследования четвертого приближения не следует, ибо с другой стороны ξ_3 — коэффициент особой характеристики, вычисленный по третьему приближению. С учетом условия (2.1) из (1.4) и (2.11) находим $\xi_1 = \xi_1^\circ$, $\xi_2 = \xi_2^\circ$, что и следовало ожидать.

Второе условие (2.1) в первом и втором приближениях выполняется тождественно, а в третьем дает

$$\delta_3 = \xi_3^\circ - {}^3/_2 s_3 - {}^5/_{12} A s_3^{2/3} - {}^{25}/_{108} A^2 s_3^{1/3} \tag{2.13}$$
$$A = \frac{(\gamma+1)M^4}{B^2} C_1$$

Положив $s_3 = K^3 A^3 / 27$, сводим систему (2.12), (2.13) к одному уравнению

$$K^3 + \frac{1}{2}K^2 + \frac{5}{6}K + \frac{54}{5}\frac{\xi_3 - \xi_3^\circ}{A^3} = 0$$

которое имеет один действительный положительный корень.

При $\beta \ll 1$ это уравнение принимает вид

$$K^3 + {}^1/_2 K^2 + {}^5/_6 K - {}^{25}/_{36} = 0$$

с приближенным значением корня $K = 0.5132$.

Постоянные C_1, C_4 находятся в виде

$$C_1 = U_0^{2/3} [2g_0(z_c)]^{-5/3} g_1(z_c), \quad C_4 = 0$$

Поскольку $C_1 < 0$, то и $s_3 < 0$. Тогда из (2.13) следует, что скачок лежит левее характеристики OC. Для случая $\beta \ll 1$ это было показано в [6] на основе трансзвуковых уравнений. Непосредственно можно установить, что скорость за скачком сверхзвуковая, причем

$$\frac{[w_n]}{w_n^\circ} = -\frac{8B^2}{(\gamma+1)M^2}(\delta_3 - \xi_3^\circ)x^2 + O(x^{8/3})$$

Здесь коэффициент, стоящий перед x^2, отрицателен, следовательно, построенный скачок — это скачок уплотнения.

Авторы благодарят С. В. Фальковича за полезные замечания.

Поступила 5 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 1.
2. *Белоцерковский О. М., Седова Е. С., Шугаев Ф. В.* Сверхзвуковое обтекание затупленных тел вращения с изломом образующей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.
3. *Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М. и др.* Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., ВЦ АН СССР, 1967.
4. *Есин А. И.* Равномерно пригодная асимптотика в окрестности звукового излома образующей тела вращения. Изв. вузов. Сер. матем., 1975, № 5.
5. *Шифрин Э. Г.* О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
6. *Бойченко В. С., Лифшиц Ю. Б.* Трансзвуковое течение около выпуклого угла. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2.
7. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. *Притуло М. Ф.* Об определении равномерно точных решений дифференциальных уравнений методом возмущения координат. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
9. *Berry F. J., Holt M.* The initial propagation of spherical blast from certain explosives. Proc. Roy. Soc. London. A, 1954, vol. 224, No. 1157.