Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 533.6.011

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ «В ЦЕЛОМ» ПО ВРЕМЕНИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

А. В. Кажихов, В. В. Шелухин

(Новосибирск)

Изучается система уравнений вязкого теплопроводного совершенного газа [1, 2] в случае одномерного движения с плоскими волнами. Доказывается однозначная разрешимость задачи о течении газа в ограниченной области с непроницаемыми теплоизолированными границами в классах обобщенных (сильных) и классических решений. Теорема существования устанавливается методом продолжения локального по времени решения на основе глобальных априорных оценок. Центральными являются оценки сверху и снизу на плотность и температуру. Способ их получения первоначально был разработан [3] для более простой задачи о разлете газа в вакуум. Проблема существования глобальных решений одномерных нестационарных уравнений вязкого сжимаемого газа исследовалась ранее только для простейших моделей [4-6].

1. Постановка задачи. Система уравнений вязкого газа в переменных Лагранжа имеет вид (см. [2], гл. 2)

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{\partial u}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\mu V^{-1}\frac{\partial u}{\partial q}-p\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\varkappa V^{-1}\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(\mu V^{-1}\frac{\partial u}{\partial q}-p\right)\right]$$

Здесь искомые функции u, V, p, ε и T — соответственно скорость, удельный объем, давление, внутренняя энергия и абсолютная температура; μ и $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, τ — время, q — массовая лагранжева координата. Замыкают систему два уравнения состояния, которые для политропного совершенного газа записываются следующим образом:

$$pV=RT, \quad \varepsilon=c_V T,$$

где $R>0$ — газовая постоянная, c_V — теплоемкость при постоянном объеме. Предполагается, что μ, $\varkappa$ и c_V — положительные постоянные, а область, занятая газом, ограниченная: $0\leqslant q\leqslant q_1<\infty$. В начальный момент $\tau=0$ распределение u, V и T считается известным; границы $q=0$ и $q=q_1$, по предположению, непроницаемые и теплоизолированные

$$u=u_0(q), \quad V=V_0(q), \quad T=T_0(q) \quad \text{при} \quad \tau=0, \quad 0<q<q_1 \tag{1.2}$$

$$u=0, \quad \partial T/\partial q=0 \quad \text{при} \quad q=0, \quad q=q_1$$

причем $V_0(q)$ и $T_0(q)$ — положительные и ограниченные функции. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{q}{q_1}, \quad t = \frac{\tau}{\tau_1}, \quad \rho = \frac{V_1}{V}, \quad v = \frac{u}{u_1}, \quad \theta = \frac{T}{T_1}$$

$$\left(V_1 = \frac{1}{q_1}\int_0^{q_1} V_0(q)\,dq,\ \tau_1 = \frac{q_1^2 V_1}{\mu},\ u_1 = \frac{\mu}{q_1},\ T_1 = \frac{\mu^2}{q_1^2 c_V}\right)$$

Тогда область изменения x сводится к единичному отрезку $\overline{\Omega} = [0, 1]$, а система уравнений принимает форму

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) - k \frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - k\rho\theta \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left(k = \frac{R}{c_V},\ \lambda = \frac{\varkappa}{\mu c_V}\right)$$

Здесь третье уравнение есть разность третьего и умноженного на u второго уравнений (1.1). Граничные и начальные условия записываются в виде

$$v = \partial\theta/\partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = 1 \tag{1.4}$$

$$v = v_0(x), \quad \rho = \rho_0(x), \quad \theta = \theta_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.5}$$

причем функции $\rho_0(x)$ и $\theta_0(x)$ строго положительные и ограниченные

$$m = \min\{\inf_\Omega \rho_0(x),\ \inf_\Omega \theta_0(x)\} > 0 \tag{1.6}$$

$$M = \max\{\sup_\Omega \rho_0(x),\ \sup_\Omega \theta_0(x)\} < \infty$$

Кроме того, в безразмерных переменных начальная плотность $\rho_0(x)$ обладает свойством

$$\int_0^1 \rho_0^{-1}(x)\,dx = 1 \tag{1.7}$$

Если второе равенство (1.3) умножить на $v(x, t)$ и сложить с третьим, то получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (\lambda - 1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - k \frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta v) \tag{1.8}$$

$$(w(x, t) = \theta(x, t) + {}^1/_2 v^2(x, t))$$

Цель работы состоит в доказательстве разрешимости задачи (1.3) — (1.5) в прямоугольнике $Q = \Omega \times (0, h)$ с произвольной конечной высотой h, $0 < h < \infty$.

Условимся относительно некоторых обозначений и определим понятие решения задачи. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $L_2(\Omega)$, а для остальных пространств символ нормы снабжается соответствующим индексом. Иногда функции двух переменных рассматриваются как функции аргумента t со значениями в банаховом пространстве. Постоянные, зависящие только от начальных данных (1.5), параметров λ, h, k, m, M и постоянных из теорем вложения обозначаются через N (с индексами).

Определение. Обобщенным решением задачи (1.3) — (1.5) называется совокупность функций (ρ, v, θ)

$$\rho(t) \in L_\infty(0, h;\ W_2^1(\Omega)),\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}(t) \in L_\infty(0, h;\ L_2(\Omega))$$

$$(v(t), \theta(t)) \in L_\infty(0, h;\ W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, h;\ W_2^2(\Omega)) \cap$$

$$\cap\ W_2^1(0, h;\ L_2(\Omega))$$

удовлетворяющих уравнениям системы почти всюду в $Q = \Omega \times (0, h)$ и принимающих заданные начальные и граничные значения в смысле следов функций из указанных классов.

2. Основные теоремы и схема их доказательства.

Теорема 1. Пусть начальные данные удовлетворяют условиям (1.6), (1.7) и

$$(\rho_0(x), v_0(x), \theta_0(x)) \in W_2^1(\Omega),\quad v_0(0) = v_0(1) = 0$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.3) — (1.5), причем функции $\rho(x, t)$ и $\theta(x, t)$ строго положительные и ограниченные.

Теорема 2. Если, кроме требований теоремы 1, выполнены условия

$$(v_0, \theta_0) \in C^{2+\alpha}(\Omega),\quad \rho_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega),\quad 0 < \alpha < 1$$

и начальные данные согласованы с граничными

$$v_0 = \theta_0' = 0,\quad (\rho_0 v_0')' - k(\rho_0\theta_0)' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = 1$$

то решение задачи является классическим

$$(v(x, t), \theta(x, t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q),\quad \rho(x, t) \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(Q)$$

Доказательство теорем основано на применении априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и высоты h прямоугольника Q. Эти оценки позволяют продолжить на весь промежуток $[0, h]$ локальное решение, существование которого устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Не останавливаясь на доказательстве локальной разрешимости задачи, укажем, что операторное уравнение, эквивалентное задаче, строится путем линеаризации уравнений (1.3). На малом интервале времени полученный оператор сжимающий, следовательно, можно применить теорему Банаха.

Первая (энергетическая) оценка находится интегрированием уравнения (1.8) по Ω с учетом условий (1.4)

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 w(x, t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left[\theta(x, t) + \frac{1}{2}v^2(x, t)\right]dx \equiv 0 \tag{2.1}$$

Отсюда заключаем

$$\|\theta(t)\|_{L_1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v(t)\|^2 = \|\theta_0\|_{L_1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2 \equiv N_0 < \infty \tag{2.2}$$

Данное равенство справедливо до тех пор, пока $\theta(x, t) \geqslant 0$. Поэтому на следующем этапе проверяется положительность температуры. Одновременно выводится оценка сверху на плотность. Затем доказывается строгая положительность плотности. Вывод этих оценок опирается на ряд вспомогательных лемм, которые формулируются в п. 3. В заключительной части доказываются оценки для производных от искомых функций и исследуются дифференциальные свойства решений.

3. Вспомогательные предложения. Прежде всего отметим два простых свойства плотности $\rho(x, t)$.

Лемма 1. Если $\rho(x, t)$ — положительная и непрерывная в $\bar{Q}$ функция, то при любом $t \in [0, h]$ выполняется равенство

$$\int_0^1 \rho^{-1}(x, t)\, dx = 1 \tag{3.1}$$

и существует по крайней мере одна точка $a = a(t) \in [0, 1]$, такая, что

$$\rho(a(t), t) = 1, \quad \forall t \in [0, h] \tag{3.2}$$

Доказательство. Запишем первое уравнение (1.3) в виде $(\rho^{-1})_t = v_x$ и проинтегрируем по Ω. Учитывая условия (1.4) и свойство (1.7) функции $\rho_0^{-1}(x)$, в результате получим формулу (3.1). По предположению, функция $\rho(x, t)$ непрерывная, поэтому второе утверждение леммы, очевидно, следует из (3.1).

Выведем еще одно следствие системы (1.3). Исключим величину $\rho \partial v / \partial x = -\partial \ln \rho / \partial t$ из второго уравнения (1.3) и полученное равенство проинтегрируем по t

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln \rho(x, t) + \int_0^t p(x, \tau)\, d\tau\right] = \frac{d \ln \rho_0(x)}{dx} + v_0(x) - v(x, t) \tag{3.3}$$

$$(p(x, t) = k\rho(x, t)\theta(x, t))$$

Проведя вторичное интегрирование при фиксированном t от точки $a(t)$, где $\rho(a(t), t) = 1$, до произвольного $x \in [0, 1]$, и потенцируя, имеем равенство

$$\rho(x, t) \exp\left\{\int_0^t p(x, \tau)\, d\tau\right\} = \rho_0(x)\, Y(t)\, B(x, t) \tag{3.4}$$

$$Y(t) = \rho_0^{-1}(a(t)) \exp\left\{\int_0^t p(a(t), \tau)\, d\tau\right\} \tag{3.5}$$

$$B(x, t) = \exp\left\{\int_{a(t)}^x [v_0(\xi) - v(\xi, t)]\, d\xi\right\} \tag{3.6}$$

Обе части формулы (3.4) умножим на $k\theta(x, t)$ и используем определение функции $p(x, t)$ (в скобках в (3.3)). Проинтегрировав от 0 до произвольного t, находим

$$\exp\left\{\int_0^t p(x, \tau)\, d\tau\right\} = 1 + k\rho_0(x)\, I(x, t)$$

$$I(x, t) = \int_0^t Y(\tau)\, B(x, \tau)\, \theta(x, \tau)\, d\tau$$

Следовательно, формула (3.4) преобразуется к виду

$$\rho(x, t) = Y(t) B(x, t)\, [\rho_0^{-1}(x) + k\, I(x, t)]^{-1} \tag{3.7}$$

Можно убедиться, что фигурирующие здесь функции $Y(t)$ и $B(x, t)$ строго положительные и ограниченные.

Лемма 2. В условиях теоремы 1 справедливы равномерные оценки

(3.8) $$0 < N_1^{-1} \leqslant B(x, t) \leqslant N_1 < \infty, \quad N_1^{-1} \leqslant Y(t) \leqslant N_2 < \infty$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, из (2.2) имеем

$$\left| \int\limits_{a(t)}^{x} v(\xi, t)\, d\xi \right| \leqslant \| v(t) \|_{L_1(\Omega)} \leqslant \| v(t) \| \leqslant (2N_0)^{1/2}, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}$$

Поэтому первое соотношение (3.8) выполняется с постоянной

$$N_1 = \exp \{ \| v_0 \|_{L_1(\Omega)} + (2N_0)^{1/2} \}$$

При доказательстве оценок для функции $Y(t)$ запишем (3.7) в следующей форме:

$$Y(t) \rho^{-1}(x, t) = B^{-1}(x, t) [\rho_0^{-1}(x) + kI(x, t)]$$

и проинтегрируем по Ω, учитывая равенство (3.1). Используя оценки для $B(x, t)$ и свойство (1.7) начальной плотности $\rho_0(x)$, приходим к неравенствам

$$N_1^{-1} + kN_1^{-2} \int\limits_0^t Y(\tau) \int\limits_0^1 \theta(x, \tau)\, dx\, d\tau \leqslant Y(t) \leqslant N_1 + kN_1^2 \int\limits_0^t Y(\tau) \int\limits_0^1 \theta(x, \tau)\, dx\, d\tau$$

Поскольку

$$\theta(x, t) \geqslant 0, \quad \int\limits_0^1 \theta(x, \tau)\, dx \leqslant N_0$$

отсюда заключаем

$$0 < N_1^{-1} \leqslant Y(t) \leqslant N_1 + kN_0 N_1^2 \int\limits_0^t Y(\tau)\, d\tau$$

и доказательство оценок (3.8) завершается применением леммы Гронуолла.

Формулы (3.7) и (3.8) позволяют установить важные связи между плотностью и температурой. Введем сокращенные обозначения для максимальных и минимальных значений $\rho(x, t)$ и $\theta(x, t)$ на сечениях $t=\text{const}$.

(3.9) $$m_\rho(t) = \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} \rho(x, t), \quad m_\theta(t) = \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} \theta(x, t)$$

$$M_\rho(t) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \rho(x, t), \quad M_\theta(t) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \theta(x, t)$$

Лемма 3. Для введенных величин имеют место соотношения

(3.10) $$M_\rho(t) \leqslant N \left[1 + n \int\limits_0^t m_\theta(\tau)\, d\tau \right]^{-1}$$

(3.11) $$m_\rho(t) \geqslant n \left[1 + N \int\limits_0^t M_\theta(\tau)\, d\tau \right]^{-1}$$

$$N = N_1 N_2 \max \{ M, km \}, \quad n = N_1^{-2} \min \{ \kappa M, m \}$$

Доказательство данных неравенств следует из формулы (3.7), если учесть оценки (3.8) для $B(x, t)$ и $Y(t)$.

Лемма 4. При любом $\eta > 0$ выполняется неравенство

(3.12) $$M_\theta^2(t) \leqslant \eta J_1(t) + C_\eta J_2(t) + K_\eta$$

$$J_1(t) = \int\limits_0^1 \rho(x, t) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx, \quad J_2(t) = \int\limits_0^t J_1(\tau)\, d\tau$$

с постоянными C_η и K_η, зависящими от данных задачи, h и η.

Доказательство. Справедливо представление

$$|\psi(x,t)|^{3/2}=\frac{3}{2}\int_{x_1}^{x}|\psi(\xi,t)|^{1/2}\operatorname{sign}\psi(\xi,t)\frac{\partial\psi(\xi,t)}{\partial\xi}\,d\xi$$

$$\psi(x,t)\equiv\theta(x,t)-\int_0^1\theta(\xi,t)\,d\xi\quad\left(\int_0^1\psi(x,t)\,dx=0\right)$$

$$x_1=x_1(t)\in[0,1],\quad \psi(x_1(t),t)=0$$

Интеграл в правой части оценим по неравенству Коши, взяв первый сомножитель с весом $\rho^{-1/2}(\xi,t)$

$$|\psi(x,t)|^{3/2}\leqslant\frac{3}{2}\left(\int_0^1\rho^{-1}(\xi,t)|\psi(\xi,t)|\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_0^1\rho(\xi,t)\left(\frac{\partial\psi(\xi,t)}{\partial\xi}\right)^2d\xi\right)^{1/2}$$

Поскольку

$$\psi_\xi=\theta_\xi,\quad \rho^{-1}(\xi,t)\leqslant m_\rho^{-1}(t),\quad \int_0^1|\psi(\xi,t)|\,d\xi\leqslant 2N_0$$

отсюда находим

$$|\psi(x,t)|^{3/2}\leqslant 3\left(\frac{N_0}{2}\right)^{1/2}m_\rho^{-1/2}(t)\,J_1^{1/2}(t)$$

Возведем обе части в степень $4/3$, а затем усилим неравенство с помощью формулы (3.11) для $m_\rho(t)$. В результате получим

$$M_\theta^2(t)\leqslant N_3+N_4\left(1+N\int_0^t M_\theta(\tau)\,d\tau\right)^{2/3}J_1^{2/3}(t)$$

Применим неравенства Юнга и Гельдера ко второму слагаемому в правой части

$$M_\theta^2(t)\leqslant\eta J_1(t)+N_5\eta^{-2}\int_0^t M_\theta^2(\tau)\,d\tau+N_\eta \tag{3.13}$$

Отсюда по лемме Гронуолла следует (3.12).

4. Оценки снизу и сверху для плотности и температуры.

Лемма 5. Существует постоянная $m_0>0$, такая, что

$$m_\theta(t)\geqslant m_0,\quad \forall t\in[0,h] \tag{4.1}$$

Доказательство. К правой части последнего уравнения (1.3) прибавим и вычтем $^1/_4k^2\rho\theta^2$, затем, поделив обе части на $-\theta^2$, получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)-\left[2\lambda\rho\theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\rho\omega^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{k}{2}\theta\right)^2\right]+$$
$$+\frac{k^2}{4}\rho,\quad \omega\equiv\theta^{-1}$$

Умножим это равенство на $2r\omega^{2r-1}$, где r — произвольное натуральное число, и проинтегрируем по Ω. Учитывая, что выражение в квадратных скобках неотрицательное, имеем неравенство

$$\|\omega(t)\|_{L_{2r}(\Omega)}^{2r-1}\frac{d}{dt}\|\omega(t)\|_{L_{2r}(\Omega)}\leqslant\frac{k^2}{4}\int_0^1\rho\,\omega^{2r-1}\,dx$$

К правой части применим неравенство Гельдера, затем сократим на $\|\omega(t)\|_{L_{2r}(\Omega)}^{2r-1}$ и проинтегрируем от 0 до произвольного t. В пределе при $r\to\infty$ получим в обозначениях (3.9) соотношение

$$m_\theta^{-1}(t) \leqslant m^{-1} + \frac{k^2}{4}\int_0^t M_\rho(\tau)\,d\tau$$

Усилим его с помощью неравенства (3.10) для $M_\rho(\tau)$

$$m_\theta^{-1}(t) \leqslant y(t), \quad y(t) = m^{-1} + \frac{Nk^2}{4}\int_0^t \left[1 + n\int_0^\tau m_\theta(s)\,ds\right]^{-1} d\tau$$

Интегрируя это неравенство относительно $y(t)$, приходим к оценке (4.1). Как следствие последней, из (3.10) вытекает ограниченность плотности

(4.2) $$M_\rho(t) \leqslant N, \quad \forall t \in [0, h]$$

Лемма 6. Существует постоянная $n_0 > 0$, такая, что

(4.3) $$m_\rho(t) \geqslant n_0, \quad \forall t \in [0, h]$$

Доказательство начнем с проверки ограниченности интеграла $J_2(t)$. Тогда из леммы 4 вытекает суммируемость на $[0, h]$ функции $M_\theta(t)$, а затем, из неравенства (3.11), строгая положительность $m_\rho(t)$.

Обратимся к уравнению (1.8). Умножим его на $w(x, t)$ и проинтегрируем по Ω

(4.4) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \int_0^1 \rho w_x^2 dx + (\lambda - 1)\int_0^1 \rho\theta_x w_x dx =$$

$$= k\int_0^1 \rho\theta v w_x dx \leqslant \delta\int_0^1 \rho w_x^2 dx + \frac{k^2}{4\delta}\int_0^1 \rho\theta^2 v^2 dx$$

Здесь $\delta > 0$ — произвольное число. По определению функции w $(1 - \delta)w_x^2 + (\lambda - 1)\theta_x w_x \geqslant (\lambda - 2\delta)\theta_x^2 - [{}^1/_4\delta^{-1}(1 + \lambda)^2 + 2\delta - \lambda - 2]v^2 v_x^2$, поэтому, выбрав $\delta = {}^1/_8 \min(1, \lambda)$, можно усилить неравенство (4.4)

(4.5) $$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \frac{3\lambda}{2}J_1(t) \leqslant N_6 F(t) + N_7 G(t)$$

$$F(t) = \int_0^1 \rho\theta^2 v^2 dx, \quad G(t) = \int_0^1 \rho v^2 v_x^2 dx$$

Если второе уравнение системы (1.3) умножить на $v^3(x, t)$ и проинтегрировать по частям по Ω, то с помощью неравенства Коши получим

(4.6) $$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)} + 3G(t) = 3\int_0^1 \rho\theta v^2 v_x dx \leqslant \frac{3}{2}G(t) + \frac{3}{2}F(t)$$

Объединяя неравенства (4.5) и (4.6), находим

$$\frac{d}{dt}(\|w(t)\|^2 + \gamma\|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}) + \frac{3\lambda}{2}J_1(t) \leqslant N_8 F(t)$$

$$(\gamma = {}^1/_6 N_7, \quad N_8 = N_6 + N_7)$$

Правая часть в данной формуле не превосходит величины $2N_0 N N_8 M_\theta^2(t)$, поскольку $\rho(x, t) \leqslant N$, а $\|v(t)\|^2 \leqslant 2N_0$. В свою очередь, для M_θ^2 справедлива оценка (3.12). Следовательно

(4.7) $$\frac{d}{dt}(\|w(t)\|^2 + \gamma\|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}) + \frac{3\lambda}{2}J_1(t) \leqslant 2N_0 N N_8[\eta J_1(t) + C_\eta J_2(t) + K_\eta]$$

Выберем $\eta > 0$ так, чтобы $4N_0NN_8\eta = \lambda$, и тогда для положительной функции

$$z(t) = \| w(t) \|^2 + \gamma \| v(t) \|^4_{L_4(\Omega)} + \lambda J_2(t)$$

из (4.7) имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{dz}{dt} \leqslant N_9 z + N_{10}$$

Отсюда заключаем, что $z(t)$ — ограниченная на $[0, h]$ функция, т. е.

$$J_2(t) \leqslant N_{11}, \quad \forall\, t \in [0, h] \tag{4.8}$$

$$\| w(t) \|^2 + \gamma \| v(t) \|^4_{L_4(\Omega)} \leqslant N_{12} \tag{4.9}$$

Из (4.8) по неравенству (3.12) вытекает суммируемость на $[0, h]$ функции $M_\theta^2(t)$ и, тем более, $M_\theta(t)$

$$\int_0^h M_\theta(t)\,dt \leqslant h^{1/2}\left(\int_0^h M_\theta^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant N_{13} \tag{4.10}$$

После этого формула (3.11) дает оценку снизу для $m_\rho(t)$

$$m_\rho(t) \geqslant n\,[1 + NN_{13}]^{-1} \equiv n_0 > 0, \quad \forall\, t \in [0, h]$$

Тем самым лемма 6 доказана.

Отметим два ее следствия. Во-первых, из (4.9) согласно определению $w(x, t)$ имеем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} \| \theta(t) \| \leqslant N_{14} < \infty \tag{4.11}$$

Во-вторых, неравенство (4.3) вместе с (4.8) ведет к оценке

$$\int_0^h \| \theta_x(t) \|^2 dt \leqslant N_{15} \tag{4.12}$$

5. Оценки для производных от искомых функций. Используя выведенные неравенства, докажем остальные априорные оценки, указанные в теоремах 1 и 2. На данном этапе будем следовать схеме рассмотрений, изложенной в [3, 6], поэтому укажем лишь соответствующие необходимые изменения и приведем описание приемов получения оценок.

Умножая второе уравнение (1.3) на $v(x, t)$, после интегрирования по Ω находим

$$\int_0^h \| v_x(t) \|^2 dt \leqslant N_{16} \tag{5.1}$$

Далее, дифференцируя равенство (3.7) по x, приходим к формуле

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) A(x, t) + \rho^2(x, t) B^{-1}(x, t) Y^{-1}(t) \left\{ \frac{d\rho_0^{-1}(x)}{dx} - k\int_0^t B(x, \tau) Y(\tau) \left[\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} + \theta(x, \tau) A(x, \tau) \right] d\tau \right\} \tag{5.2}$$

$$(A(x, t) = v_0(x) - v(x, t))$$

Отсюда, используя оценки (2.2), (3.8) и (4.10)—(4.12), получаем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x}(t) \right\| \leqslant N_{17} \tag{5.3}$$

После этого второе уравнение системы (1.3) умножается на v_{xx} и интегрируется по Ω. Неравенства (4.2), (4.3), (4.11) и (5.3) ведут к оценке

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} \| v_x(t) \|^2 + \int_0^h \| v_{xx}(t) \|^2 dt \leqslant N_{18} \tag{5.4}$$

Непосредственно из уравнений (1.3) заключаем

(5.5) $$\max_{0\leqslant t\leqslant h}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}(t)\right\|\leqslant N_{19},\quad \int_0^h\|v_t(t)\|^2dt\leqslant N_{20}$$

Аналогично, умножая третье уравнение (1.3) на θ_{xx}, выводим

(5.6) $$\max_{0\leqslant t\leqslant h}\|\theta_x(t)\|^2+\int_0^h\|\theta_{xx}(t)\|^2dt+\int_0^h\|\theta_t(t)\|^2dt\leqslant N_{21}$$

Кроме того, дифференцируя первое уравнение (1.3) по x, с учетом (5.4) имеем

(5.7) $$\int_0^h\|\rho_{xt}(t)\|^2dt\leqslant N_{22}$$

На этом доказательство оценок из теоремы 1 завершается. Отметим, что неравенства (5.3), (5.5) и (5.7) гарантируют по теореме вложения гельдеровскую непрерывность плотности $\rho(x, t)$ с показателем $^1/_2$.

Переходя к оценкам из теоремы 2, сначала покажем, что $v(x, t)$ и $\theta(x, t)$ также непрерывны по Гельдеру. Для этого второе и третье уравнения (1.3) дифференцируются по t и умножаются соответственно на v_t и θ_t. Применением предыдущих неравенств выводятся оценки

(5.8) $$\max_{0\leqslant t\leqslant h}\|v_t(t)\|^2+\int_0^h\|v_{xt}(t)\|^2dt\leqslant N_{23}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant h}\|\theta_t(t)\|^2+\int_0^h\|\theta_{xt}(t)\|^2dt\leqslant N_{24}$$

Вместе с (5.4) и (5.6) они по теореме вложения влекут непрерывность по Гельдеру в Q с показателем $^1/_2$ функций $v(x, t)$ и $\theta(x, t)$. Далее, из формулы (5.2) вытекает гельдеровская непрерывность производной $\partial\rho / \partial x$ в $\overline{Q}$. Действительно, первое слагаемое в правой части (5.2) непрерывно по Гельдеру ввиду свойств ρ, v_0 и v. Сомножитель $\rho(x, t)B^{-1}(x, t)Y^{-1}(t)$ обладает этим свойством согласно равенству (3.7). Наконец, интеграл

$$\int_0^t\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, \tau)\,d\tau$$

также непрерывен по Гельдеру в $\overline{Q}$ ввиду оценок (5.6).

После того, как доказана непрерывность по Гельдеру плотности $\rho(x, t)$ и ее производной по x, можно рассматривать второе и третье уравнения (1.3) как параболическую систему относительно $v(x, t)$ и $\theta(x, t)$ с гельдеровскими коэффициентами и правой частью. Используя известные оценки решений параболических уравнений в классах функций Гельдера, гладкость решения поднимается до указанной в теореме 2.

Замечание. Аналогичным методом доказывается разрешимость задачи с граничными условиями вида

$$v = \theta = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1$$

При этом предполагается, что начальная температура $\theta_0(x)$ неотрицателвная. Тогда, рассматривая третье уравнение (1.3) как линейное параболическое относительно $\theta(x, t)$, из принципа максимума заключаем, что $\theta(x, t)\geqslant 0$ в $\overline{Q}$. Данное свойство температуры позволяет при оценке плотности сверху применить неравенства (3.10), (4.2).

Еще одно изменение необходимо внести в вывод первой (энергетической) оценки. Умножим второе уравнение (1.3) на v, а третье на $\theta(\theta^2+\delta)^{-1/2}$, где $\delta > 0$ — произвольное число. Складывая и интегрируя, имеем

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left[(\theta^2+\delta)^{1/2}+\frac{1}{2}\,v^2\right]dx\leqslant\frac{k^2}{4}\int_0^1\rho\theta^2\,[1-\theta\,(\theta^2+\delta)^{-1/2}]\,dx$$

Проинтегрировав по t, устремим δ к нулю, после чего приходим к нужной оценке

$$\|\theta(t)\|_{L_1(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v(t)\|^2\leqslant N_0=\|\theta_0\|_{L_1(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

Все остальные рассуждения в задаче с заданными значениями температуры на границах такие, как и в подробно рассмотренной задаче с заданным потоком тепла.

Поступила 9 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
3. *Кажихов А. В.* О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа. В кн.: Динамика сплошной среды, вып. 24. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1976.
4. *Канель Я. И.* Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 4.
5. *Itaya N.* On the temporally global problem of the generalized Burgers equation. J. Math. Kyoto Univ., 1974, vol. 14, No. 1, p. 129—177.
6. *Кажихов А. В.* Корректность «в целом» смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа. В кн.: Динамика сплошной среды, вып. 21. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975.