Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 538.4

МОДЕЛИ ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕД И УСРЕДНЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ В СЛУЧАЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. А. Штейн

(Москва)

Рассматриваются модели поляризующихся сплошных сред на основе универсального вариационного уравнения [1]. Цель работы — получение из наиболее простых предположений макроскопического характера о механизме диссипации энергии и о виде термодинамических функций достаточно полной информации о поведении сред в высокочастотном электромагнитном поле. От моделей, в которых имеется однозначная зависимость вектора поляризации от электрического поля, предлагаемая модель отличается, во-первых, тем, что наряду с обратимыми составляющими вектора поляризации рассматриваются их необратимые составляющие, от которых зависит свободная энергия и с изменением которых связана диссипация энергии, а во-вторых, присутствием пространственных градиентов и производных по времени вектора поляризации в числе аргументов свободной энергии. Введение необратимых составляющих вектора поляризации аналогично переходу от теории упругости к простейшим моделям вязкоупругих сред. Соответствующее усложнение нетрудно провести путем введения в рассмотрение дополнительного набора внутренних параметров, как это в случае вязкоупругости сделано впервые Био [2].

В основу построения моделей положено вариационное уравнение в форме, применявшейся в работах [1,3], откуда с учетом второго закона термодинамики и предположений традиционного характера о параметрах, отвечающих за необратимость, выписана замкнутая система уравнений в классическом приближении. В случае высокочастотного электромагнитного поля рассмотрен переход к усредненным соотношениям, описывающим взаимодействие поля со средой.

Построению моделей сплошных сред с учетом эффектов поляризации и намагничивания посвящено немало работ, из которых отметим [4–7], связанные с предлагаемой работой методологически. В частности, в статьях [5,6] учтены гиромагнитные эффекты, а в [7], кроме того, исследуется случай ферромагнитного материала, допускающего эффект магнитного гистерезиса. Результаты указанных работ не описывают некоторых особенностей дисперсии диэлектрической проницаемости, имеющих место, когда электрическое и магнитное поля меняются с высокой частотой и поэтому должны быть обобщены в этом случае. В связи с тем, что в настоящее время технически получены электромагнитные волны с высоким значением напряженности поля, представляет интерес построение замкнутых моделей, описывающих взаимодействие высокочастотного поля со средой.

1. Определяющие параметры. В трехмерном евклидовом пространстве вводятся инерциальная система координат наблюдателя с координатами x^α и сопутствующая система координат с координатами ξ_1^α. Всюду греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3; t — время в системе наблюдателя.

С каждой точкой движущейся среды связывается собственная система координат. Через $E^{*\alpha}$, $B^{*\alpha}$ обозначены соответственно компоненты векторов напряженности электрического и индукции магнитного полей, определенные в собственной системе координат и преобразованные к системе координат наблюдателя по обычным формулам преобразования трехмерных векторов. Через E^α, B^α обозначены компоненты соответствующих векторов, определенных в инерциальной системе наблюдателя, связанные с компонентами $E^{*\alpha}$, $B^{*\alpha}$ известными формулами преобразования [4], содержащими скорость среды.

В конечных результатах будем сохранять члены лишь порядка v / c, где v — скорость среды, c — скорость света в вакууме, но при получении уравнений Эйлера из базисного вариационного уравнения придется использовать релятивистские формулы преобразования с учетом членов порядка v^2 / c^2. В дальнейшем звездочка указывает, что отмеченная величина определена в собственной системе координат. В случаях, когда с принятой степенью точности соответствующие компоненты в собственной системе и в системе наблюдателя совпадают, звездочка опускается. Через компоненты векторного потенциала A_α и скалярный потенциал φ компоненты E_α и B^α выражаются по формулам

$$E_\alpha = -\nabla_\alpha \varphi - c^{-1}\partial A_\alpha / \partial t, \quad B^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta A_\gamma$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — компоненты полностью антисимметричного псевдотензора Леви-Чивита.

Можно вводить в рассмотрение различные внутренние параметры, связанные, в частности, с необратимостью процессов поляризации и намагничивания, и получать при соответствующем фиксировании термодинамических функций весьма сложный характер релаксации поляризации и намагниченности. В данной работе для определенности предполагается, что имеется лишь один такой параметр (векторный) $\boldsymbol{\pi}^*$ с компонентами $\pi^{*\alpha}$, связанный с необратимостью процесса поляризации. При специальном задании свободной энергии этот параметр, как будет показано ниже, имеет смысл вектора необратимой поляризации единицы массы, определенной в собственной системе координат.

Процесс деформирования будем характеризовать компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, в частности, зависимость от деформаций может осуществляться через плотность ρ. Введены также обозначения: v^α — компоненты вектора скорости среды, K_B — постоянные физического и геометрического характера, предполагающиеся функциями только сопутствующих координат, T — абсолютная температура, ρ_e — объемный заряд единицы объема, i_α — компоненты тока проводимости.

2. Вариационное уравнение. В дальнейшем вариации искомых величин x^α, A_α, φ, $\pi^{*\alpha}$, T^*, рассматриваемых при постоянных сопутствующих координатах ξ^β и собственном времени, связанном с каждой частицей, считаются независимыми, $\delta K_B = 0$ по определению, вариации остальных величин выражаются через основные в соответствии с формулами, по которым они определяются. Соответствующий аппарат разработан в [1, 3].

В основу построения модели положим вариационное уравнение в виде

$$(2.1)\qquad \delta \int\limits_{V_4} \Lambda d\tau_4 + \delta W^* + \delta W = 0$$

Здесь Λ — суммарный лагранжиан электромагнитного поля и среды, δW^* — некоторый задаваемый функционал, о способе выбора которого будет сказано ниже, δW — функционал, определяемый по заданным Λ и δW^* на трехмерной границе произвольного четырехмерного объема V_4. Для лагранжиана электромагнитного поля и среды примем выражение

$$\Lambda = \frac{1}{8\pi}(E_\alpha E^\alpha - B_\alpha B^\alpha) + \rho(K - F)$$

где $K = v^2 / 2$ — кинетическая энергия единицы массы среды, а F — свободная энергия единицы массы, которая задается при фиксировании модели как функция компонент метрического тензора в системе наблюдателя $g_{\alpha\beta}$ и следующих векторных и тензорных компонент, а также скаляров: $E^{*\alpha}$, $B^{*\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^*$, $\pi^{*\alpha}$, $\nabla_\alpha{}^*\pi^{*\beta}$, $d^*\pi^{*\alpha} / dt$, T^*, K_B, причем все перечисленные аргументы определены в собственной системе координат и преобразованы к системе наблюдателя. Символы d^* / dt и ∇_α^* означают соответственно взятие производной по времени и ковариантной производной по координате в собственной системе координат. При указанном выборе аргументов свободная энергия единицы массы F определена, очевидно, инвариантным образом относительно выбора различных инерциальных систем отсчета.

Как будет видно ниже, получающиеся уравнения оказываются также инвариантными относительно преобразований Лоренца с принятой здесь точностью (до членов порядка v / c). Исходя из предположения, что обмен энергией между полем и средой определяется выделением джоулева тепла и процессом поляризации, зададим уравнение баланса энтропии в следующем виде:

$$(2.2)\qquad \rho T\frac{d^*S}{dt} = \tau^{*\alpha\beta}\nabla_\beta{}^* v_\alpha + E_\alpha{}^* i^{*\alpha} + Q_\alpha{}^*\frac{d^*\pi^{*\alpha}}{dt} + \frac{dQ^e}{dt}$$

Здесь S — энтропия единицы массы, $\tau^{*\alpha\beta}$ — компоненты тензора вязких напряжений, $Q_\alpha{}^*$ — компоненты обобщенной силы, ответственной за необратимость процесса поляризации, dQ^e / dt — скорость внешнего притока тепла в единице объема среды извне за исключением притока тепла от электромагнитного поля. Все входящие в соотношение величины определены в собственной системе и преобразованы к системе наблюдателя. Если приток тепла dQ^e связан только с процессом теплопроводности, то имеет место равенство $dQ^e = -\nabla_\alpha{}^* q^{*\alpha} dt$, и формула для внутреннего роста энтропии по основному допущению берется в виде

$$(2.3)\qquad \rho T\frac{d_iS}{dt} = \tau^{*\alpha\beta}\nabla_\beta{}^* v_\alpha + E_\alpha{}^* i^{*\alpha} + Q_\alpha{}^*\frac{d^*\pi^{*\alpha}}{dt} - \frac{\nabla_\alpha{}^* T}{T} q^{*\alpha}$$

причем справедливы неравенство $d_iS \geqslant 0$ при всех процессах и неравенство $d_iS > 0$ при необратимых процессах.

В соответствии с формулировкой второго закона термодинамики функционал δW^* в случае непрерывных движений задается в виде

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} (-\rho S \delta T^* - \tau_\alpha^{*\beta} \nabla_\beta^* \delta x^\alpha + F_\alpha \delta x^\alpha - Q_\alpha^* \delta \pi^{*\alpha} +$$
$$+ c^{-1} j^\alpha \delta_L A_\alpha - \rho_e \delta_L \varphi)\, d\tau_4$$
$$\delta_L A_\alpha = \delta A_\alpha + A_\beta \nabla_\alpha \delta x^\beta, \quad j^\alpha = i^\alpha + \rho_e v^\alpha$$
$$\delta_L \varphi = \delta \varphi - c^{-1} A_\beta \partial \delta x^\beta \,/\, \partial t$$

Здесь F_α — компоненты вектора объемных сил.

3. Система уравнений. Из вариационного уравнения (2.1) с учетом сделанных предположений о виде лагранжиана Λ и функционала δW^* имеем следующую систему уравнений:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta H_\gamma = \frac{1}{c} \frac{\partial D^\alpha}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad \nabla_\alpha D^\alpha = 4\pi\rho_e \tag{3.1}$$
$$S = -\frac{\partial F}{\partial T^*}, \quad \rho a_\alpha = \nabla_\beta^* p_\alpha^{\ \beta} + R_\alpha + F_\alpha$$
$$\frac{\partial F}{\partial \pi^{*\alpha}} - \frac{1}{\rho} \nabla_\beta^* \left[\rho \frac{\partial F}{\partial (\nabla_\beta^* \pi^{*\alpha})}\right] - \frac{d^*}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial (d^* \pi^{*\alpha}/dt)}\right] + \frac{1}{\rho} Q_\alpha^* = 0$$

Здесь первые два уравнения — вторая пара уравнений Максвелла (первая пара — следствие предположения о существовании скалярного и векторного потенциалов), третье — уравнение, служащее для определения энтропии, четвертое — уравнение импульсов, последнее — дополнительное динамическое уравнение, дающее связь вектора π^* с напряженностью электрического поля и другими параметрами. Введены обозначения: a_α — компоненты вектора ускорения среды, а для компонент тензора напряжений $p_\alpha^{\ \beta}$, объемной силы R_α, а также векторов электрической индукции D^α и напряженности магнитного поля H_γ справедливы выражения

$$p_\alpha^{\ \beta} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\nu\beta}^*} g_{\nu\alpha} - \rho \varepsilon_{\nu\alpha} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\beta\nu}^*} - \rho \varepsilon_\nu^{\ \beta} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\nu\gamma}^*} g_{\gamma\alpha} - \rho \frac{\partial F}{\partial (\nabla_\beta^* \pi^{*\gamma})} \nabla_\alpha^* \pi^{*\gamma} + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{1}{2} \rho \left(E^{*\gamma} \frac{\partial F}{\partial E^{*\gamma}} + B^{*\gamma} \frac{\partial F}{\partial B^{*\gamma}}\right) \delta_\alpha^\beta + \tau_\alpha^{*\beta}$$
$$R_\alpha = \rho_e E_\alpha + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j^\beta B^\gamma + \frac{\rho}{4\pi c} \frac{d}{dt} [\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (D_\beta B_\gamma - E_\beta H_\gamma)] +$$
$$+ \frac{1}{8\pi} (D_\beta \nabla_\alpha E^\beta - E^\beta \nabla_\alpha D_\beta + B_\beta \nabla_\alpha H^\beta - H_\beta \nabla_\alpha B^\beta) -$$
$$- \frac{\rho}{c^2} \frac{d^*}{dt} \left[\frac{d^* \pi^{*\nu}}{dt} \frac{\partial F}{\partial (\nabla_\gamma^* \pi^{*\nu})}\right] g_{\gamma\alpha}$$
$$D^{*\alpha} = E^{*\alpha} - 4\pi\rho \frac{\partial F}{\partial E^{*\beta}} g^{\beta\alpha}, \quad H_\gamma^* = B_\gamma^* + 4\pi\rho \frac{\partial F}{\partial B^{*\gamma}}$$
$$D^\alpha = D^{*\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} v_\beta H_\gamma^*, \quad H_\gamma = H_\gamma^* - \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} v^\alpha D^{*\beta}$$

В соответствии с принятой степенью точности при написании системы уравнений безразмерные параметры v^2 / c^2, $p / \rho c^2$, $H^2 / \rho c^2$, $D^2 / \rho c^2$ считаются пренебрежимо малыми по сравнению с единицей. Из последней пары формул (3.2) видно, что поляризация и намагниченность единицы объема среды в собственной системе координат с компонентами соответственно $P_\alpha{}^*$ и $M_\alpha{}^*$ определяются формулами

$$P_\alpha{}^* = -\rho\partial F / \partial E^{*\alpha}, \quad M_\alpha{}^* = -\rho\partial F / \partial B^{*\alpha}$$

Если допустить отсутствие в числе аргументов у свободной энергии F компонент вектора магнитной индукции $B^{*\alpha}$, то намагниченность в собственной системе координат будет всегда равна нулю, отсутствие же зависимости функции F от компонент вектора напряженности электрического поля $E^{*\alpha}$ соответствует только намагничивающейся среде.

Функционал δW в (2.1) определяется формулой

$$\begin{gathered}
\delta W = \int\limits_{\Sigma_3} [(P_\alpha{}^\beta N_\beta + P_\alpha{}^4 N_4)\,\delta x^\alpha - (S_\alpha{}^\beta N_\beta + S_\alpha{}^4 N_4)\,\delta x^\alpha - \\
- \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} H_\gamma N_\beta \delta_L A_\alpha + \frac{1}{4\pi c} D^\alpha N_4 \delta_L A_\alpha + \frac{1}{4\pi} D^\alpha N_\alpha \delta_L \varphi + (\Psi_\sigma{}^\beta N_\beta + \\
+ \Psi_\sigma{}^4 N_4)\,\delta\pi^{*\sigma}]\, d\sigma_3
\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}
P_\alpha{}^\beta = p_\alpha^\beta - \rho v_\alpha v^\beta + \rho c^{-2} \frac{\partial F}{\partial(\nabla_\nu{}^*\pi^{*\varkappa})} \frac{d^*\pi^{*\varkappa}}{dt} v^\beta g_{\nu\alpha} + \\
+ \frac{1}{4\pi c} \varepsilon_{\alpha\varkappa\gamma} v^\beta (D^\varkappa B^\gamma - E^\varkappa H^\gamma)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
P_\alpha{}^4 = -\rho v_\alpha + c^{-2} v^\beta p_{\alpha\beta} + \frac{v^\beta}{2c^2}(E_\beta D_\alpha + E_\alpha D_\beta) - \\
- \frac{\rho}{2c^2} \frac{\partial F}{\partial(\nabla_\beta{}^*\pi^{*\nu})} (v^\gamma g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma{}^*\pi^{*\nu} - v_\alpha \nabla_\beta{}^*\pi^{*\nu}) + \\
+ \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial F}{\partial(\nabla_\beta \pi^{*\nu})} \frac{d^*\pi^{*\nu}}{dt} g_{\beta\alpha}, \quad S_\alpha{}^4 = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E^\beta H^\gamma
\end{gathered}$$

$$S_\alpha{}^\beta = -(4\pi)^{-1}(E_\alpha D^\beta + H_\alpha B^\beta) + (8\pi)^{-1}(E_\gamma D^\gamma + B_\gamma H^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta$$

$$\Psi_\sigma{}^\beta = \rho \frac{\partial F}{\partial(\nabla_\beta{}^*\pi^{*\sigma})}, \quad \Psi_\sigma{}^4 = \rho \frac{\partial F}{\partial(d^*\pi^{*\sigma}/dt)} + \frac{\rho}{c^2} v_\beta \frac{\partial F}{\partial(\nabla_\beta{}^*\pi^{*\sigma})}$$

Здесь $d\sigma_3$ — элемент трехмерной поверхности Σ_3, а N_β, N_4 — направляющие косинусы четырехмерной нормали в пространстве x^α, $t = x^4$ к поверхности Σ_3 с уравнением $f(x^\alpha, t) = 0$, определенные соотношениями

$$N_\alpha = \nabla_\alpha f / \sqrt{\nabla_\beta f \nabla^\beta f + (\partial f/\partial t)^2}$$

$$N_4 = (\partial f / \partial t) / \sqrt{\nabla_\beta f \nabla^\beta f + (\partial f / \partial t)^2}$$

причем вблизи поверхности Σ_3 имеет место неравенство $f < 0$ для внутренних точек и $f > 0$ для внешних.

Дополнительные условия на вид функции F налагает требование симметрии пространственной части тензора энергии-импульса поля и среды, компоненты которой в собственной системе координат равны $S^{*\alpha\beta} + p^{\alpha\beta}$. Это условие учтено при получении соотношений (3.1), (3.2). Если его выполнения не требовать, то необходимо рассматривать уравнения моментов, которые описывают изменение внутренних моментов количества движения для среды [4].

Уравнение энергии получается из вариационного уравнения (2.1) после замены вариаций на действительные приращения соответствующих величин. Преобразованное к форме дифференциального уравнения притока тепла, оно имеет следующий вид, при отсутствии зависимости свободной энергии от производных вектора π^* совпадающий с приведенным в [4]:

$$\rho\frac{dU}{dt}=\left(p^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}E_\gamma{}^*P^{*\gamma}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\alpha{}^*v^\beta+\rho\frac{d^*}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(d^*\pi^{*\alpha}/dt\right)}\frac{d^*\pi^{*\alpha}}{dt}\right]+ \tag{3.4}$$
$$+\nabla_\beta{}^*\left[\rho\frac{\partial F}{\partial\left(\nabla_\beta{}^*\pi^{*\alpha}\right)}\frac{d^*\pi^{*\alpha}}{dt}\right]-P_\alpha{}^*\frac{dE^{*\alpha}}{dt}-M_\alpha{}^*\frac{dB^{*\alpha}}{dt}+$$
$$+E_\alpha{}^*i^{*\alpha}+\frac{dQ^e}{dt}$$

где $U=F+TS$ — внутренняя энергия единицы массы.

Система становится замкнутой, например, после фиксирования реологических соотношений, связывающих термодинамические силы $\tau^{*\alpha\beta}$, $E_\alpha{}^*$, $Q_\alpha{}^*$, $-q^{*\alpha}/T^2$ с термодинамическими потоками $\nabla_\alpha{}^*v_\beta$, $i^{*\alpha}$, $d^*\pi^{*\alpha}/dt$, $\nabla_\alpha{}^*T$, а также, возможно, с другими параметрами.

4. Модель изотропной вязкой сжимаемой линейно-поляризующейся жидкости. Всюду далее предполагается, что компоненты вектора магнитной индукции, определенного в собственной системе отсчета, не включаются в число аргументов свободной энергии, и, следовательно, рассматриваемая среда только поляризуется, но не намагничивается. Обозначим свободную энергию при равенстве нулю всех поляризаций и их производных через F_0.

Тогда можно представить свободную энергию единицы мсссы в виде

$$F=F_0+F_1\left(\varepsilon_{\alpha\beta},\ E^\alpha,\ T,\ g_{\alpha\beta},\ K_\beta,\ \pi^\alpha,\ d\pi^\alpha/dt,\ \nabla_\beta\pi^\alpha\right)$$

где F_0 не содержит зависимости от векторов, характеризующих необратимую поляризацию, и их производных, а также от напряженности электрического поля, а $F_1=0$ при $\pi^\alpha=0$, $E^\alpha=0$, $\nabla_\beta\pi^\alpha=0$, $\dot\pi^\alpha=d\pi^\alpha/dt=0$. Здесь, как и всюду ниже, звездочка при компонентах величин, определенных в собственной системе координат, опускается, так как соответствующие величины, определенные в системе координат наблюдателя, в дальнейшем не употребляются. В линейной теории функцию будем представлять однородной квадратичной формой по компонентам векторов $\mathbf{E}$ и π, а также временным и пространственным производным последнего.

Далее будем рассматривать случай изотропной жидкости, в силу чего в числе аргументов F_1 сохраняются лишь $g_{\alpha\beta}$ и скалярные параметры ρ, T, K_B, а также E^α, π^α, $\dot\pi^\alpha$, $\nabla_\beta\pi^\alpha$. Тогда функция F_1 имеет следующий вид:

$$F_1={}^1/_2\left(\varkappa_1\pi^2-\sigma_1\dot\pi^\alpha\dot\pi^\beta g_{\alpha\beta}-\varkappa_0E^2\right)- \tag{4.1}$$
$$-\varkappa_2E_\alpha\pi^\alpha+\sigma_2\dot\pi^\alpha\pi_\alpha+\sigma_3E_\alpha\dot\pi^\alpha+$$
$$+{}^1/_2\left[\nu_1\nabla_\alpha\pi^\beta\nabla^\alpha\pi_\beta+\nu_2\nabla_\alpha\pi^\beta\nabla_\beta\pi^\alpha+\nu_3(\operatorname{div}\pi)^2\right]$$

причем все входящие в выражение (4.1) коэффициенты могут быть функциями плотности и температуры.

В линейной теории будем также задавать линейную зависимость термодинамических сил от термодинамических потоков.

Предположение об изотропности жидкости сокращает число феноменологических коэффициентов, которое может быть еще уменьшено, если принять соотношения симметрии Онзагера. Из формул, определяющих соответствующие связи, приведем выражение для компонент обобщенной силы Q_α, которое имеет вид

$$Q_\alpha = \rho\,(\lambda\pi^{\cdot\beta}g_{\alpha\beta} + \lambda_1 i_\alpha + \lambda_2\nabla_\alpha T)$$

где коэффициенты λ, λ_1, λ_2 рассматриваются как известные функции от ρ и T.

Уравнение состояния для поляризации, соотношения, определяющие параметр π, выражение для компонент тензора напряжений и уравнение притока тепла принимают в этом случае следующий вид:

$$(4.2)\qquad \begin{aligned}
&P_\alpha = \rho\,(\varkappa_0 E_\alpha + \varkappa_2\pi_\alpha - \sigma_3\pi^{\cdot\beta}g_{\alpha\beta})\\
&\varkappa_2 E_\alpha = \varkappa_1\pi_\alpha + (\sigma_2 + \lambda)\pi^{\cdot\beta}g_{\alpha\beta} -\\
&-\frac{d}{dt}(\sigma_2\pi_\alpha + \sigma_3 E_\alpha - \sigma_1\pi^{\cdot\beta}g_{\alpha\beta}) - \rho^{-1}\nabla_\beta Y_\alpha{}^\beta\\
&p_\alpha{}^\beta = -(p_0 + \rho^2\partial F_1 / \partial\rho)\delta_\alpha{}^\beta + {}^1/{}_2 E_\gamma P^\gamma\delta_\alpha{}^\beta - Y^{\beta\gamma}\nabla_\alpha\pi_\gamma\\
&\rho dU_0 / dt = -p_0 d\,(1/\rho)/dt + \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha +\\
&+\rho Q_\alpha\pi^{\cdot\alpha} + E_\alpha i^\alpha + \rho T d\,(\partial F_1/\partial T)/dt\\
&p_0 = \rho^2\partial F_0/\partial\rho,\quad U_0 = F_0 - T\partial F_0/\partial T\\
&Y_\alpha{}^\beta = \rho\,(\nu_1\nabla^\beta\pi_\alpha + \nu_2\nabla_\alpha\pi^\beta + \nu_3\,\mathrm{div}\,\pi\delta_\alpha{}^\beta)
\end{aligned}$$

В соотношениях (4.2) производные функции F_1 по ρ и T не раскрыты, чтобы не загромождать формулы. Система уравнений должна быть дополнена уравнением неразрывности для массы, которое учитывалось при варьировании плотности в уравнении (2.1). При $\sigma_3 = 0$, $\varkappa_2 = 1$ параметр π имеет смысл необратимой составляющей вектора поляризации. Впрочем, если $\varkappa_2 \neq 0$, всегда можно, введя вместо параметра π новый независимый параметр $\pi' = \varkappa_2\pi$, добиться обращения коэффициента $\varkappa_2$ в единицу.

5. Усредненные соотношения для линейно-поляризующейся жидкости в случае высокочастотного поля, близкого к монохроматическому. Чтобы не усложнять рассмотрение дополнительными эффектами, всюду ниже предполагается отсутствие объемного заряда и токов проводимости. Рассматривается случай высокочастотного поля, что соответствует выполнению неравенства $\omega t' \gg 1$, где ω — частота поля, а через t' обозначено характерное время задачи. Выберем линейную модель, причем для определенности ограничимся случаем жидкости, рассмотренным в п. 4. Будем также предполагать отсутствие зависимости обобщенной силы Q_α от градиента температуры ($\lambda_2 = 0$). В этом случае, как это видно из соотношений (3.1), (4.2), можно искать решения, для которых напряженность электрического поля имеет вид $E^\alpha = \mathrm{Re}\,[E_0{}^\alpha\,(x^\beta, t)e^{-i\omega t}]$, где $i = \sqrt{-1}$, а $E_0{}^\alpha$ — медленно меняющаяся во времени, вообще говоря, комплексная функция, и в аналогичном виде представляются все другие электромагнитные параметры B^α, π^α, D^α, P^α, причем нижним нулевым индексом обозначаются медленно меняющиеся во времени функции.

Из уравнений (4.2) имеем следующие соотношения:

$$(5.1)\qquad \begin{aligned}
&P_{0\alpha} = \rho\,[\varkappa_0 E_{0\alpha} + (\varkappa_2 + \sigma_3 i\omega)\pi_{0\alpha}]\\
&\varkappa_2 E_{0\alpha} = (\varkappa_1 - \lambda i\omega - \sigma_1\omega^2)\pi_{0\alpha} + \sigma_3 i\omega E_{0\alpha} -\\
&-\rho^{-1}\nabla_\beta\,[\rho\,(\nu_1\nabla^\beta\pi_{0\alpha} + \nu_2\nabla_\alpha\pi_0{}^\beta + \nu_3 div\pi_0\delta_\alpha{}^\beta)]
\end{aligned}$$

При написании приведенных зависимостей использован тот факт, что производными от медленно изменяющихся величин можно пренебречь по сравнению с производными величин, меняющихся с высокой частотой. Пренебречь ими можно, впрочем, лишь тогда, когда первый член в правой части второго равенства (5.1) много меньше отброшенного члена, содержащего производные $\pi_0{}^\alpha$ по времени. Легко получить соответствующее ограничение на частоту ω, исключающее частоты, близкие к резонансной. При условии $(d\pi_0 / dt) / \pi_0 \ll |\varkappa_1 / \lambda|$, $\lambda^2 > |\sigma_1\varkappa_1| (2^{1/2} + 1)$ требуемое неравенство удовлетворяется при любой частоте ω. Если указанное условие не выполнено, в последующих соотношениях появятся члены, содержащие производные E_0 по времени.

Формулы (5.1) наряду с уравнениями Максвелла, известным образом упрощающимися в рассматриваемом случае [8], должны быть дополнены термомеханическими уравнениями, в которых все быстро осциллирующие электромагнитные величины, меняющиеся с частотой 2ω, заменены их средними по времени, которые будем обозначать угловыми скобками. При этом предполагается, что интервал, на котором производится усреднение, достаточно велик, чтобы содержать много колебаний электромагнитных величин, но достаточно мал, чтобы термомеханические величины и комплексные амплитуды электромагнитных величин, обозначенные нулевым индексом, оставались практически постоянными. Так, например, для среднего значения квадрата напряженности имеем формулу $\langle \mathbf{E}^2 \rangle = E_{0\alpha}\bar{E}_0{}^\alpha / 2$ (черта вверху означает взятие комплексно-сопряженной величины).

В оставшейся части данного раздела будем предполагать отсутствие зависимости свободной энергии от пространственных градиентов поляризации, а коэффициенты σ_2, σ_3 положим равными нулю. В этом случае имеют место формулы

$$P_{0\alpha} = \rho\,[\varkappa_0 + \varkappa_2{}^2 / (\varkappa_1 - \lambda i\omega - \sigma_1\omega^2)]E_{0\alpha} \tag{5.2}$$
$$D_{0\alpha} = \varepsilon E_{0\alpha}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\rho\,[\varkappa_0 + \varkappa_2{}^2 / (\varkappa_1 - \lambda i\omega - \sigma_1\omega^2)]$$

где ε — комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Соотношения (5.2) известны как простейшие формулы, выражающие зависимость диэлектрической проницаемости от частоты.

Принятые здесь ограничительные предположения имеют целью получение усредненных соотношений, соответствующих известной простейшей зависимости поляризации от напряженности электрического поля (5.2), тогда как их снятие привело бы к весьма громоздким соотношениям. Отметим также, что, допустив введение большего числа внутренних независимых параметров, можно получать линейно-поляризующиеся среды с разнообразной зависимостью диэлектрической проницаемости от частоты. Для этого достаточно потребовать аналогично работе [2], чтобы свободная энергия была квадратичной формой от напряженности поля, внутренних параметров и их производных по времени, а обобщенные силы, отвечающие за необратимость процесса поляризации, представлялись линейными функциями от производных внутренних параметров по времени.

В рассматриваемом частном случае формулы, дающие усредненные значения компонент полного тензора напряжений в среде и диссипации за счет необратимости процесса поляризации, имеют следующий вид:

$$(5.3)\qquad \langle p_\alpha{}^\beta\rangle = -\rho^2\frac{\partial F_0}{\partial\rho} + \langle\tau_\alpha{}^\beta\rangle + \frac{\rho}{8\pi}\left[\frac{\partial\varepsilon_\infty}{\partial\rho} + \frac{|\varepsilon-\varepsilon_\infty|^2}{(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty)^2}\frac{\partial(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty)}{\partial\rho} + \omega^2|\varepsilon-\varepsilon_\infty|^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sigma_1}{4\pi\rho\varkappa_2{}^2}\right)\right]\langle\mathbf{E}^2\rangle\,\delta_\alpha{}^\beta$$

$$\langle\sigma\rangle = \langle Q_\alpha\pi^{\cdot\alpha}\rangle = \omega\,\mathrm{Im}\,\varepsilon\,\langle\mathbf{E}^2\rangle/4\pi$$

Здесь ε_0 и ε_∞ — значения диэлектрической проницаемости при ω, равной соответственно нулю и бесконечности.

Уравнение притока тепла примет вид

$$(5.4)\qquad \rho\frac{dU_0}{dt} = -p_0\frac{d(1/\rho)}{dt} + \langle\tau^{\alpha\beta}\rangle\nabla_\beta v_\alpha + \frac{\omega}{4\pi}\mathrm{Im}\,\varepsilon\langle\mathbf{E}^2\rangle - \frac{\rho T}{8\pi}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\varepsilon_\infty}{\partial T} + \omega^2|\varepsilon-\varepsilon_\infty|^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sigma_1}{4\pi\rho\varkappa_2{}^2}\right) + \frac{|\varepsilon-\varepsilon_\infty|^2}{(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty)^2}\frac{\partial(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty)}{\partial T}\right]\langle\mathbf{E}^2\rangle\right\}$$

Вторая формула (5.3) справедлива в линейной теории при весьма общих допущениях и широко известна (см., например, [8]). Первая из формул (5.3) и формула (5.4) не носят столь общего характера и связаны с конкретными предположениями о виде свободной энергии и замыкающих реологических соотношений. При отсутствии необратимости, связанной с процессом поляризации, выражение для компонент тензора напряжений может быть с учетом (5.2) приведено к формуле, полученной в работе [9].

Формула для компонент объемной усредненной по времени силы $\langle R_\alpha\rangle$ такова:

$$(5.5)\qquad \langle R_\alpha\rangle = (4c)^{-1}\frac{d}{dt}\left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\overline{B}_0{}^\beta P_0{}^\gamma + B_0{}^\beta\overline{P}_0{}^\gamma)\right] + (1/8)(P_0{}^\gamma\nabla_\alpha\overline{E}_{0\gamma} + \overline{P}_0{}^\gamma\nabla_\alpha E_{0\gamma} - \overline{E}_{0\gamma}\nabla_\alpha P_0{}^\gamma - E_{0\gamma}\nabla_\alpha\overline{P}_0{}^\gamma)$$

6. Усредненные соотношения, описывающие взаимодействие поля со средой в приближении геометрической оптики. Имея в виду случай распространения в среде световой волны, близкой к монохроматической, будем предполагать, что наряду с неравенством $\omega t' \gg 1$ выполняется неравенство $\omega L/c \gg 1$, где L — характерный линейный размер задачи. В этом случае, сохраняя предположение о равенстве нулю коэффициента λ_2, будем искать напряженность электрического поля в виде

$$(6.1)\qquad E_0{}^\beta(x^\alpha, t) = E_{00}{}^\beta(x^\alpha, t)\exp[i(\omega/c)\,\zeta(x^\alpha, t)]$$

где, вообще говоря, комплексные функции $E_{00}{}^\beta$ и ζ медленно меняются как во времени, так и по координатам. Аналогичными формулами будем представлять и все остальные электромагнитные величины. Соответствующие комплексные амплитуды будем обозначать двумя нулями внизу.

Подстановка соотношения (6.1) и аналогичных ему формул для других электромагнитных величин в (5.1) приводит к следующим зависимостям (здесь, как и в п. 5 для простоты полагаем $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$E_{00\alpha} = A_{\alpha\beta}\pi_{00}{}^{\beta}, \quad D_{00}{}^{\alpha} = \sigma^{\alpha\beta}E_{00\beta} \tag{6.2}$$

$$A_{\alpha\beta} = \varkappa_1^{-1}\{[\varkappa_2 - \lambda i\omega - \sigma_1\omega^2 + \nu_1(\omega / c)^2\nabla_\gamma\zeta\nabla^\gamma\zeta]g_{\alpha\beta} + (\nu_2 + \nu_3)(\omega / c)^2\nabla_\alpha\zeta\nabla_\beta\zeta\}$$

Величина $\sigma^{\alpha\beta}=\rho\,[(1 + 4\pi\varkappa_0)g^{\alpha\beta} + 4\pi\varkappa_2 A^{-1\alpha\beta}]$, где $A^{-1\alpha\beta}A_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$, имеет смысл тензорной диэлектрической проницаемости среды, но связывает уже комплексные амплитуды, отмечаемые двумя нулями внизу. Заметим, что при учете зависимости от градиентов поляризаций уже в случае изотропной линейной по поляризациям модели жидкости может появиться оптическая анизотропия за счет отличия от нуля коэффициента $\nu_2 + \nu_3$. При получении формул (6.2) производными по координатам от медленно меняющихся величин пренебрегаем по сравнению с производными величин, меняющихся по координатам быстро.

Подстановка соотношения (6.1) и аналогичного ему соотношения для напряженности магнитного поля в уравнения Максвелла приводит в соответствии с методикой геометрической оптики [10] к следующим асимптотическим соотношениям по большому параметру $\omega L / c$:

$$|\chi^{\alpha\beta\gamma\varkappa}\nabla_\beta\zeta\nabla_\gamma\zeta + \sigma^{\alpha\varkappa}| = 0 \tag{6.3}$$

$$\chi^{\alpha\beta\gamma\varkappa}[\nabla_\beta\zeta\nabla_\gamma E_{00\varkappa} + \nabla_\beta(\nabla_\gamma\zeta E_{00\varkappa})] - 2i\omega c^{-2}\sigma^{\alpha\gamma}E_{00\gamma}\,\partial\zeta / \partial t = 0$$

$$\chi^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu}[\nabla_\beta\zeta\nabla_\mu H_{00\nu}\sigma_{\gamma\lambda}^{-1} + \nabla_\beta(\nabla_\mu\zeta H_{00\nu}\sigma_{\gamma\lambda}^{-1})] - 2i\omega c^{-2}H_{00}^{\alpha}\,\partial\zeta / \partial t = 0$$

$$\chi^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} g^{\alpha\lambda} & g^{\alpha\mu} & g^{\alpha\nu} \\ g^{\beta\lambda} & g^{\beta\mu} & g^{\beta\nu} \\ g^{\gamma\lambda} & g^{\gamma\mu} & g^{\gamma\nu} \end{vmatrix}$$

$$\chi^{\alpha\beta\gamma\varkappa} = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\varkappa} - g^{\alpha\varkappa}g^{\beta\gamma}, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{-1}\sigma^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$$

Первое из соотношений (6.3) представляет собой уравнение для определения функции $\zeta(x^\alpha, t)$, а последующие позволяют определить величины $E_{00\varkappa}$, $H_{00\nu}$. В общем случае, если зависимость от координат и времени осуществляется через известные термомеханические параметры, уравнения (6.3) зацепляются с другими уравнениями и заменяют уравнения Максвелла. Дальнейшие упрощения имеют место, если усреднить термомеханические переменные по пространственным объемам, малым по сравнению с L, но содержащим много длин волн (длина волны имеет порядок $c / \omega \ll L$).

Полную систему усредненных соотношений ввиду ее громоздкости здесь не приводим и ограничимся лишь случаем отсутствия зависимости свободной энергии от градиентов вектора π. Тогда формулы (5.2) — (5.4) остаются в силе, если заменить нижний индекс 0 индексом 00, а под средним значением квадрата напряженности понимать его среднее как по времени, так и по объему, вычисляемое по формуле

$$\langle \mathrm{E}^2\rangle = {}^1/_2 E_{00\alpha}\bar{E}_{00}{}^{\alpha}\exp(-2\,\mathrm{Im}\,\zeta\,\omega / c)$$

Формула (5.5) после осреднения по объему и оценки порядка входящих в нее членов еще более упрощается и принимает вид

$$\langle R_\alpha \rangle = (8\pi)^{-1} [- \langle E^2 \rangle \nabla_\alpha (\mathrm{Re}\, \varepsilon) + $$
$$+ 2 (\omega / c) \,\mathrm{Im}\, \varepsilon \langle E^2 \rangle \nabla_\alpha (\mathrm{Re}\, \zeta)]$$

7. Об описании эффекта Керра. Модель, рассмотренная в данной работе, допускает также и неквадратичную зависимость свободной энергии от напряженности поля и других электродинамических параметров. В частности, при помощи модели с неквадратичной по E^α функцией F можно описать электрооптический эффект Керра. Для этого следует рассмотреть решение вида $E_\alpha = E_{1\alpha} + E_{0\alpha} e^{-i\omega t}$, где $E_{1\alpha}$ и $E_{0\alpha}$ — медленно меняющиеся функции времени. Пусть при этом свободная энергия имеет вид $F = F_0 + F_1 (E^\alpha, \rho, T, g_{\alpha\beta})$, где F_0 не зависит от переменных электромагнитного характера, $Q_\alpha = 0$, а для F_1 в предположении изотропности жидкости и пренебрегая эффектами высшего порядка, примем выражение $F_1 = -(\alpha_0 \mathrm{E}^2 / 2 + \alpha_1 \mathrm{E}^4 / 4)$. Тогда, если напряженность высокочастотной компоненты поля E_0 много меньше напряженности медленно меняющейся компоненты E_1, можно, ограничившись нулевым и первым членами разложения вектора $\mathbf{D}$ по компонентам вектора $\mathbf{E}_0$, написать соотношения

$$D_\alpha = D_{1\alpha} + D_{0\alpha} e^{-i\omega t}$$
$$D_{1\alpha} = (\varepsilon_0 + 4\pi\alpha_1 \rho E_1^2) E_{1\alpha}, \quad D_{0\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} E_0{}^\beta$$
$$\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\alpha_0\rho, \quad \sigma_{\alpha\beta} = (\varepsilon_0 + 4\pi\alpha_1\rho \mathrm{E}_1^2) g_{\alpha\beta} + 8\pi\alpha_1\rho E_{1\alpha} E_{1\beta}$$

Последнее слагаемое в формуле для диэлектрической проницаемости, как известно [8], описывает эффект Керра.

Автор благодарен Л. И. Седову за руководство работой, а также А. Г. Цыпкину за полезные замечания.

Поступила 12 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
2. *Biot M. A.* Linear thermodynamics and the mechanics of solids. Proc. 3 rd US Nation. Congr. of Appl. Mech. N. Y., ASME, 1958.
3. *Бердичевский В. Л., Седов Л. И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
5. *Седов Л. И.* О пондеомоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
6. *Власов К. В., Ишмухаммедов Б. Х.* Уравнения движения и состояния магнитоупругих сред. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 1.
7. *Черный Л. Т.* Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, № 31, 1974.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
9. *Питаевский Л. П.* Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 5.
10. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., «Наука», 1973.