Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

О СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Я. М. Гольцер

(Алма-Ата)

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями, непрерывно зависящими от параметра. Предполагается, что в рассматриваемой области значений параметра система первого приближения имеет n пар чисто мнимых корней.

При изменении параметра μ вблизи резонансного значения μ_0, при котором система обладает внутренним резонансом, возможны различные изменения свойства устойчивости. Ставится задача о сильной устойчивости, когда характер устойчивости системы в точке μ_0 сохраняется в некоторой окрестности этой точки.

Построена непрерывная по μ нормальная форма системы, которая, в отличие от обычной и нормальной формы [1,2], не меняет своей структуры при прохождении системы через резонанс [1]. Для резонансов нечетного порядка получены условия сильной асимптотической устойчивости и неустойчивости. Выделены случаи «взрывной неустойчивости», когда асимптотическая устойчивость в окрестности резонансной точки сменяется неустойчивостью в точке μ_0.

Предлагаемая работа идейно примыкает к [3], в которой дано обоснование и поставлена задача об устойчивости при параметрических возмущениях. Ряд аспектов этой задачи и ее обобщения обсуждались в [4]. Близкий вопрос, в форме задачи о различении опасных и безопасных границ области устойчивости, рассматривался в [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$z^{\cdot} = P(\mu) z + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} Z^{(l)}(z, \mu), \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2) = D \tag{1.1}$$

где z — r-мерный вектор, $P(\mu)$ — $r \times r$-матрица, $Z^{(l)}(z, \mu)$ — r-мерные вектор-формы l-го порядка от z. Матрица $P(\mu)$ и коэффициенты форм $Z^{(l)}(z, \mu)$ — непрерывные функции параметра μ.

Будем говорить, что система (1.1) устойчива (неустойчива) в точке $\mu_0 \in D$, если нулевое решение системы (1.1) при $\mu = \mu_0$ устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову.

Рассматриваемая задача связана с изучением влияния малой вариации значений параметра на свойство устойчивости системы (1.1).

Определение 1.1. Система (1.1), устойчивая (неустойчивая) в точке $\mu_0 \in D$, называется сильно устойчивой (неустойчивой) в этой точке, если

[1] *Гольцер Я. М.* О преобразовании одной системы дифференциальных уравнений при наличии резонанса. Тр. семинара по теории устойчивости движения, вып. 2. Алма-Ата, 1969.

существует такая ε-окрестность точки μ_0, $U_\varepsilon(\mu_0) \subset D$, что система (1.1) устойчива (неустойчива) в каждой точке $\mu \in U_\varepsilon(\mu_0)$.

Замечание 1.1. Термин «сильная устойчивость» введен согласно работам по исследованию линейных периодических гамильтоновых систем при малых (но более общих чем параметрические) возмущениях гамильтониана [6].

В дальнейшем система (1.1) рассматривается в предположении, что в области D матрица $P(\mu)$ имеет n пар непрерывных по μ чисто мнимых собственных значений и приводима в D к непрерывной по μ диагональной матрице. (Вопрос о нормальной форме матриц, зависящих от параметра, изучался в [7].)

Полагая $r = 2n$, обозначим собственные числа матрицы $P(\mu)$ через $\pm\lambda_s(\mu)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda_s^2(\mu) < 0$ $(\forall\mu \in D)$. Через R_n^+ обозначим множество n-мерных векторов, компоненты которых — целые неотрицательные числа. Если $m \in R_n^+$, то $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_s \in R_1^+$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$.

Определение 1.2. Система (1.1) в точке $\mu_0 \in D$ обладает внутренним резонансом j-го порядка, если существует вектор $m \in R_n^+$, m_s — взаимно-простые, такой, что при $\mu = \mu_0$

$$\langle m, \lambda^\circ\rangle = \sum_{s=1}^{n} m_s\lambda_s^\circ = 0, \quad |m| = j, \quad \lambda^\circ = \lambda(\mu_0) = (\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_n^\circ) \tag{1.2}$$

Эффективным методом исследования устойчивости системы (1.1) при фиксированных значениях параметра (как резонансных, так и нерезонансных) служит предварительное преобразование ее к нормальной форме до членов достаточно высокого порядка [1,2]. Если точка μ_0 нерезонансная, то в ее достаточно малой окрестности указанная выше нормализация будет непрерывной по μ и естественно ожидать, что характер устойчивости системы сохраняется в этой окрестности. При прохождении параметра μ через резонансное значение μ_0 структура обычной нормальной формы существенно меняется. Поэтому для рассматриваемого класса систем наибольший интерес представляет задача о сильной устойчивости в окрестности резонансных значений параметра. Возникает также вопрос о существовании для систем (1.1) непрерывной по μ нормальной формы, который обсуждается ниже.

2. Непрерывная нормальная форма. В предположениях п. 1 систему (1.1) можно записать в виде (черта сверху означает комплексно-сопряженную величину)

$$x^\cdot = \Lambda(\mu)x + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y, \mu) \tag{2.1}$$

$$y^\cdot = -\Lambda(\mu)y + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y, \mu)$$

Здесь $x = \bar{y} = (x_1, \ldots, x_n)$, E — единичная $n \times n$-матрица, $\Lambda(\mu) = \lambda(\mu)E$. Компоненты n-мерных вектор-форм $X^{(l)} = \overline{Y}^{(l)}$ представим в виде

$$X_s^{(l)}(x, y, \mu) = \sum_{|p|+|q|=l} a_{p,q}^s(\mu)\, x^p y^q, \quad p, q \in R_n^+,\ x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$$

Функции $\lambda_s(\mu)$ и $a_{p,q}^s(\mu)$ непрерывны в D.

Вместе с (2.1) рассмотрим систему

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} u^{\boldsymbol\cdot} &= \Lambda(\mu) u + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} U^{(l)}(u, v, \mu) \\ v^{\boldsymbol\cdot} &= -\Lambda(\mu) v + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} V^{(l)}(u, v, \mu) \\ U_s^{(l)} &= \overline{V}_s^{(l)} = \sum_{|p|+|q|=l} \alpha_{p,q}^s(\mu)\, u^p v^q \end{aligned}$$

и преобразование

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} x &= u + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} \Phi^{(l)}(u, v, \mu), \quad y = v + \sum_{l=k\geqslant 2}^{\infty} \overline{\Phi}^{(l)}(u, v, \mu) \\ \Phi_s^{(l)} &= \sum_{|p|+|q|=l} A_{p,q}^s(\mu)\, u^p v^q \end{aligned}$$

Будем искать простейший вид системы (2.2), к которому с помощью непрерывного по μ преобразования в виде формального ряда (2.3) может быть приведена система (2.1).

Для последовательного определения форм $\Phi_s^{(l)}$ из (2.1) — (2.3) получим

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \left(\frac{\partial \Phi_s^{(l)}}{\partial u_r} u_r - \frac{\partial \Phi_s^{(l)}}{\partial v_r} v_r \right) &= \lambda_s \Phi_s^{(l)} - U_s^{(l)} - F_s^{(l)} + X_{s*}^{(l)} \\ F_s^{(l)} &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=k}^{l-1} \frac{\partial \Phi_s^{(j)}}{\partial u_r} U_r^{(l-j+1)} + \frac{\partial \Phi_s^{(j)}}{\partial v_r} V_r^{(l-j+1)} \end{aligned}$$

где $X_{s*}^{(l)}$ — форма l-го порядка в разложении в ряд функций

$$\sum_{j=k\geqslant 2}^{l} X_s^{(j)}(u + \ldots, v + \ldots)$$

Из (2.4) для одновременного определения коэффициентов форм $\Phi_s^{(l)}$ и $U_s^{(l)}$ получим

$$(2.5)\qquad \langle p - q - \delta_s, \lambda(\mu) \rangle A_{p,q}^s = a_{p,q}^{s*}(\mu) - f_{p,q}^s(\mu) - \alpha_{p,q}^s(\mu)$$

где $a_{p,q}^{s*}(\mu)$, $f_{p,q}^s(\mu)$ ($|p| + |q| = l$) — коэффициенты форм $X_{s*}^{(l)}$, $F_s^{(l)}$, $\delta_s = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — орт в R_n^+.

Определение 2.1. Бивекторы (p, q), $p \neq q + \delta_s$, и соответствующие им оэффициенты s-х уравнений систем (2.1), (2.2) и преобразования (2.3) называются резонансными, если существует такое, что $\mu_0 \in D$, что

$$\langle p - q - \delta_s, \lambda(\mu_0) \rangle = 0$$

Множество всех резонансных бивекторов s-го уравнения обозначим через L_D^s. Для бивекторов (p, q) при $p = q + \delta_s$ имеем

$$\langle p - q - \delta_s, \lambda(\mu) \rangle \equiv 0 \quad (\forall \mu \in D)$$

и они образуют множество L_0^s, которое определяет члены тождественного резонанса. Обозначим $L^s = L_D^s \cup L_0^s$.

Пусть в (2.5) функции $a^s_{p,q}$, и $f^s_{p,q}$ непрерывны в D. Видно, что если $(p, q) \in L^s$, то (2.5) имеет непрерывное по μ решение при любом выборе непрерывных функций $\alpha^s_{p,q}(\mu)$.

Если $(p, q) \in L_D^s$, то существует такая точка $\mu_0 \in D$, что $\langle p - q - \delta_s, \lambda\rangle \to 0$ при $\mu \to \mu_0$. Для того чтобы функция $A^s_{p,q}(\mu)$ была непрерывной в D, нужно определить функцию $\alpha^s_{p,q}(\mu)$ в D таким образом, чтобы она была непрерывной и в каждой резонансной точке области D правая часть (2.5) была бы бесконечно малой, порядка не меньше чем $\langle p - q - \delta_s, \lambda(\mu)\rangle$. Очевидно, при таком выборе функции $\alpha^s_{p,q}$ и $A^s_{p,q}$ имеют в окрестности резонансной точки следующую структуру:

$$\alpha^s_{p,q}(\mu) = a^{s*}_{p,q}(\mu_0) + f^s_{p,q}(\mu_0) - \varepsilon^s_{p,q}(\mu) \tag{2.6}$$

$$A^s_{p,q}(\mu) = \langle p - q - \delta_s, \ \lambda(\mu)\rangle^{-1}\varepsilon^s_{p,q}(\mu), \quad (p, \ q) \in L_D^s$$

где $\varepsilon^s_{p,q}$ — произвольная непрерывная в D функция и такая, что существует предел

$$\lim_{\mu\to\mu_0} A^s_{p,q}(\mu) = A^s_{p,q}(\mu_0) \tag{2.7}$$

Постоянную $A^s_{p,q}(\mu_0)$ можно выбирать совершенно произвольно (что может быть использовано для дальнейшего упрощения системы для случая резонансов третьего порядка).

Если $(p, q) \in L_0^s$, то достаточно в (2.5) положить

$$\alpha^s_{q+\delta_s, q} = a^{s*}_{q+\delta_s, q}(\mu) + f^s_{p,q}(\mu) \tag{2.8}$$

Учитывая теперь, что формы $X_{s*}^{(l)}$ и $F_s^{(l)}$ зависят только от форм $\Phi_s^{(j)}$, $U_s^{(j)}$, где $j < l$, и что $X_{s*}^{(l)} = X_s^{(l)}$, $F_s^{(l)} = 0$ при $l = k$, можно утверждать, что при всех $l = k, k + 1, \ldots$ функции $f^s_{p,q}$, $a^s_{p,q}$ в (2.5) непрерывны в D. Тем самым справедлива

Теорема 2.1. При любом выборе непрерывных по μ нерезонансных коэффициентов в системе (2.2) можно так подобрать в ней непрерывные резонансные коэффициенты, что будет существовать непрерывное в D преобразование (2.3), переводящее систему (2.1) в (2.2).

Непрерывная нормальная форма будет получена, если положить в (2.2) все нерезонансные коэффициенты равными нулю. Тем самым непрерывная нормальная форма имеет следующую структуру:

$$u_s^\bullet = \lambda_s(\mu) + u_s \sum_{q=[k/2]\geqslant 1}^{\infty} \alpha^s_{q+\delta_s, q}\omega^q + \sum_{(p, q)\in L_D^s} \alpha^s_{p,q} u^p v^q \tag{2.9}$$

$$v_s^\bullet = \bar{u}_s^\bullet, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad \omega_s = u_s v_s$$

Отметим следующее свойство преобразования и нормальной формы, которое будет впоследствии использовано. Если $k \geqslant 2$ — младший порядок нелинейных членов в (2.1), то формы $\Phi_s^{(j)}$ и $U_s^{(j)}$ при $k \leqslant j \leqslant 2k - 2$ определяются независимо от форм $\Phi_s^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ при $l < j$. Это свойство имеет место и при обычной нормализации и следует из структуры функций $X_{s*}^{(l)}$ и $F_s^{(l)}$ в (2.4).

Остановимся на сравнении структуры системы (2.9) при некотором фиксированном значении μ_0 со структурой обычной нормальной формы в этой точке. Обозначим $L_{\mu_0}{}^s = \{(p, q) \mid \langle p - q - \delta_s, \lambda^\circ\rangle = 0\}$. Очевидно что $L_{\mu_0}{}^s \subset L_D{}^s$.

В случае обычной нормализации системы (2.1) s-е уравнение при $\mu = \mu_0$ будет содержать только члены, соответствующие бивекторам $(p, q) \in L_{\mu_0}{}^s \cup L_0{}^s$. В системе же (2.9), кроме этих членов, присутствуют еще те, для которых $(p, q) \in L_D{}^s \setminus L_{\mu_0}{}^s$.

Совпадение обеих форм в точке μ_0 будет только в том случае, если $L_D{}^s \setminus L_{\mu_0}{}^s = \varnothing$, но в окрестности точки μ_0 при $\mu \neq \mu_0$ они будут различны. Обычная нормализация будет непрерывной лишь тогда, когда $L_D{}^s = \varnothing$ (что отмечалось в п. 1).

При решении задачи о сильной устойчивости в точке μ_0 в качестве области D рассмотрим достаточно малую ε-окрестность точки μ_0, $D = U_\varepsilon(\mu_0)$. Через $D^* = U_\varepsilon{}^*$ обозначим проколотую в точке μ_0 окрестность $U_\varepsilon(\mu_0)$.

Пусть точка μ_0 резонансная и порядок единственного младшего резонанса в этой точке равен g. Будем считать (и это общий случай), что μ_0 — изолированный корень уравнения

$$\langle m, \lambda(\mu)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad |m| = g$$

Число ε возьмем настолько малым, что если это уравнение и имеет в D другие целочисленные решения, то их норма $|m| \gg g$.

При этих условиях младшие резонансные члены в D будут иметь порядок $g - 1$, поэтому структура обычной и непрерывной нормальных форм будет совпадать (при $k < g - 1$) до членов порядка $g - 2$. И если решение задачи устойчивости в D не зависит от членов порядка выше $g - 2$, то наличие в точке μ_0 внутреннего резонанса не влияет на решение задачи о сильной устойчивости. Для выявления возможных бифуркаций свойства устойчивости, связанных с наличием в системе резонанса порядка g, будем считать, что в (2.1) $k = g - 1$. Кроме того, предположим, что $k = 2N$.

При сделанных предположениях, ограничиваясь приведением к непрерывной нормальной форме до членов $k + 1$-го порядка включительно, получим следующую систему:

$$u_s^\bullet = \lambda_s(\mu) u_s + \alpha_s(\mu) v^{m-\delta_s} + u_s \sum_{|p|=N} \alpha_s{}^p(\mu)\,\omega^p + O_\mu(\|u + v\|^{2N+2}) \tag{2.10}$$

$$v_s^\bullet = \bar{u}_s^\bullet, \quad m, p \in R_n{}^+, \quad |m| = k + 1 = 2N + 1 \geqslant 3$$

где $\lambda_s(\mu)$, $\alpha_s(\mu)$, $\alpha_s{}^p(\mu)$, O_μ непрерывны в D.

Система (2.10) при $\mu = \mu_0$ совпадает с системой, изучавшейся в [2,8], и получается из (2.9) с помощью соображений о структуре младших резонансных членов, аналогичных приведенным в [2].

3. Некоторые свойства модельной системы. Рассмотрим модельную систему (систему k-го приближения)

$$u_s^\bullet = \lambda_s(\mu)\, u_s + \alpha_s(\mu)\, v^{m-\delta_s}, \quad v_s^\bullet = -\lambda_s(\mu) v_s + \bar{\alpha}_s(\mu)\, u^{m-\delta_s} \tag{3.1}$$

Введем вспомогательные углы $\varphi_s(\mu)$, полагая

$$\sin\varphi_s = -a_s\,|\alpha_s|^{-1}, \quad \cos\varphi_s = b_s\,|\alpha_s|^{-1}, \quad \alpha_s = a_s + ib_s \tag{3.2}$$

и отождествим их с точками единичного тригонометрического круга. Очевидно, $\varphi_s(\mu)$ — непрерывные в D функции μ.

Пусть d_s — диаметр круга, проходящий через точку φ_s. Для расположения точек φ_s на круге возможны два взаимоисключающие случая

А. Для любого диаметра d_s существуют точки φ_j, лежащие по разные стороны от d_s.

В. Существует диаметр d_s, такой, что все точки φ_j лежат по одну сторону от d_s.

В случае А необходимо $n \geqslant 3$; при $n=2$ всегда реализуется случай В. Если в точке μ_0 (в области D) реализуется случай А, то будем писать, что выполняются условия $A(\mu)$ $(A(D))$. Аналогично $B(\mu)$, $B(D)$.

Алгебраическую характеристику случая А дает

Лемма 3.1. Для выполнения условия $A(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие коэффициенты $\alpha_{s_1}(\mu)$, $\alpha_{s_2}(\mu)$, $\alpha_{s_3}(\mu)$, что

$$\operatorname{sign} D_{s_1s_2} = \operatorname{sign} D_{s_2s_3} = -\operatorname{sign} D_{s_1s_3}, \quad D_{s_js_k} = \begin{vmatrix} a_{s_j} & a_{s_k} \\ b_{s_j} & b_{s_k} \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Справедлива также

Лемма 3.2. Для выполнения условия $B(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая нумерация углов $\varphi_s(\mu)$, при которой

$$\varphi_1(\mu) \leqslant \varphi_2(\mu) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(\mu) \leqslant \varphi_1(\mu) + \pi \tag{3.4}$$

Используя неравенства (3.4), случай В разобъем на следующие подслучаи:

B_1 $(\exists l \mid 1 \leqslant l \leqslant n-1)$ $(\varphi_1 = \ldots = \varphi_l < \varphi_{l+1} \leqslant \ldots$
$\ldots \leqslant \varphi_n < \varphi_1 + \pi)$

B_2 $(\forall s)$ $(\varphi_s = \varphi_1)$

B_3 $(\exists k \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1)$ $(\varphi_1 = \ldots = \varphi_k < \varphi_{k+1} = \ldots$
$\ldots = \varphi_n = \varphi_1 + \pi)$

B_4 $(\exists j \mid 3 \leqslant j \leqslant n)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots < \varphi_{j-1} < \varphi_j = \ldots$
$\ldots = \varphi_n = \varphi_1 + \pi)$

Можно доказать, что условие $A(\mu)$ эквивалентно следующему утверждению геометрического характера.

Лемма 3.3. Для выполнения условия $A(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие точки $\varphi_{s_1}(\mu)$, $\varphi_{s_2}(\mu)$, $\varphi_{s_3}(\mu)$, что образуемый ими треугольник острый.

Условие (3.3) есть алгебраический признак остроугольности $\triangle\, \varphi_{s_1} \cdot \varphi_{s_2} \varphi_{s_3}$. В случае B_1 все невырожденные треугольники тупые, а в случае B_4 среди них имеется хотя бы один прямоугольный.

Из приведенных (без доказательства) лемм и непрерывности функций $\varphi_s(\mu)$ следует, что если выполняются условия $A(\mu_0)$ и $B_1(\mu_0)$, то при достаточно малом ε выполняются условия $A(D)$ и $B_1(D)$. Условия $B_2(\mu_0)$, $B_3(\mu_0)$, $B_4(\mu_0)$ при изменении μ могут не сохраняться. Случай B_2 может перейти в случай B_1, а B_3 и B_4 в A или B_1.

Как следует из [2,8], при $\mu = \mu_0$ в большинстве случаев система (3.1) обладает семейством интегралов вида

$$(3.5) \qquad V_0 = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s^\circ \omega_s, \quad \omega_s = u_s v_s, \quad \gamma_s^\circ = \text{const}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы (3.1) при $\mu = \mu_0$ служит наличие среди (3.5) знакоопределенных интегралов. В случае неустойчивости все интегралы (3.5) знакопеременны. Лишь при $n = 2$ в случае B_1 система неустойчива и не имеет интегралов вида (3.5). Для существования среди (3.5) знакоопределенных интегралов необходимо и достаточно выполнения условия A (μ_0) или B_3 (μ_0). В неустойчивом случае B_4 среди (3.5) имеются знакопостоянные интегралы.

Рассмотрим матрицу C и n-мерные вектор-строки a, b

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \end{Vmatrix}, \quad a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n)$$

Из равенства $D_{s_j s_k} = |\alpha_{s_j} \alpha_{s_k}| \sin(\varphi_{s_k} - \varphi_{s_j})$ следует, что при выполнении условий A (μ), B_1 (μ), B_4 (μ) имеем $\operatorname{Rank} C(\mu) = 2$; в остальных случаях ($B_2$, B_3) $\operatorname{Rank} C(\mu) = 1$.

Теорема 3.1. Если в области D матрица C сохраняет ранг и число отличных от нуля компонент векторов a или b превосходит ранг матрицы C, то система (3.1) имеет семейство непрерывных по μ интегралов

$$(3.6) \qquad V(\mu, \omega) = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s(\mu) \omega_s, \quad \mu \in D, \quad V(\mu_0, \omega) = V_0$$

Для того чтобы среди них имелись интегралы, знакоопределенные в D, необходимо и достаточно выполнения условий A (μ_0) или B_3 (μ_0).

Доказательство. Прежде всего можно убедиться, что предположение о ранге матрицы выполняется, если выполнены условия A (μ_0), B_1 (μ_0), B_4 (μ_0). При выполнении условий B_2 (μ_0), B_3 (μ_0) из этого предположения следует выполнение условий B_2 (D), B_3 (D), поскольку возможный переход случаев B_2 и B_3 в A или B_1 при $\mu \neq \mu_0$ связан с изменением ранга матрицы C.

Вычислим производную функции V из (3.6) в силу системы (3.1) и из уравнения $V^\cdot = 0$ получим для определения $\gamma_s(\mu)$ систему уравнений

$$(3.7) \qquad C(\mu)\, \gamma(\mu) = 0, \quad \gamma(\mu) = \text{colomn}\, [\gamma_1(\mu), \ldots, \gamma_n(\mu)]$$

совместную в условиях теоремы.

Пусть сначала $\operatorname{Rank} C(\mu) = 2$. Обозначим через a', b', γ' векторы a, b, γ, в которых отсутствуют компоненты с индексами s_1, s_2, s_3. Общее решение (3.7) можно записать в виде

$$(3.8) \qquad \gamma_{s_1} = D_{s_1 s_2}^{-1} (\gamma_{s_3} D_{s_2 s_3} + D_{s_2 \rho}), \quad \gamma_{s_2} = D_{s_1 s_2}^{-1} (\gamma_{s_3} D_{s_3 s_1} + D_{s_3 \rho})$$

$$\left(D_{s_1 s_2} \neq 0, \; D_{s_j \rho} = \begin{vmatrix} a_{s_j} & \rho_1 \\ b_{s_j} & \rho_2 \end{vmatrix}, \quad \rho_1 = -a'\gamma', \quad \rho_2 = -b'\gamma' \right)$$

где s_1, s_2 выбраны так, что выполнены условия в скобках, компоненты вектора γ' и γ_{s_3} — свободные параметры решения.

Если выполняются условия $A(\mu_0)$, то существуют такие s_1, s_2, s_3, для которых в точке μ_0 справедливы соотношения (3.3), сохраняющиеся и в области D. Из (3.8) непосредственно следует, что положительные решения у (3.7) существуют только при выполнении условий (3.3).

Значения свободных параметров, дающих строго положительное решение системы (и, тем самым, знакоопределенные интегралы семейства (3.6)), должны удовлетворять условиям

$$\gamma_s > 0 \quad (s \neq s_1, s_2, s_3), \quad \gamma_{s_3} > \max\{D_{s_2s_3}^{-1} D_{s_2\rho},\ D_{s_3s_1}^{-1} D_{s_1\rho},\ 0\} \tag{3.9}$$

При выполнении условий $B_1(\mu_0)$ или $B_4(\mu_0)$ соотношения (3.3) нарушаются при любом выборе s_1, s_2, s_3, и среди решений системы (3.7) нет строго положительных, а среди интегралов (3.6) знакоопределенных. (При условии $B_1(\mu_0)$ все интегралы знакопеременные.)

Пусть теперь $\operatorname{Rank} C = 1$. Считая для определенности $a \neq 0$, вместо системы (3.7) рассмотрим уравнение

$$a\gamma = 0 \tag{3.10}$$

Если выполняется условие $B_3(\mu_0)$, то хотя бы для одной пары коэффициентов α_{s_1}, α_{s_2} в точке μ_0 выполняется равенство

$$\operatorname{sign} a_{s_1}a_{s_2} = -1 \tag{3.11}$$

сохраняющееся в D. Общее решение системы (3.10) при условии (3.11) имеет вид

$$\gamma_s = -a_{s_1}^{-1}\Big(a_{s_2}\gamma_{s_2} + \sum_{s\neq s_1, s_2} \gamma_s a_s\Big) \tag{3.12}$$

Выбирая γ_s $(s \neq s_1)$ согласно условию

$$\gamma_s > 0 \quad (s \neq s_1, s_2), \quad \gamma_{s_1} > \max\Big\{-\sum_{s\neq s_1, s_2} \gamma_s a_s,\ 0\Big\}$$

получим строго положительное решение уравнения (3.10) и знакоопределенный интеграл системы (3.1).

При выполнении условия $B_2(\mu_0)$ условие (3.11) нарушается для любых s_1, s_2 и (3.10) положительного решения не имеет.

Выбирая все параметры $\gamma_s(\mu)$ непрерывными в D функциями, можно утверждать непрерывность по μ построенных интегралов.

Используя семейство непрерывных интегралов, ниже будут получены признаки сильной устойчивости системы (2.1).

4. Сильная устойчивость. Бифуркации. Наряду с системой (2.10), эквивалентной в смысле устойчивости системе (2.1) в области D, будем рассматривать также систему

$$\begin{aligned} u_s^{*\bullet} &= \lambda_s(\mu)\, u_s^* + u_s^* \sum_{|p|=N} \alpha_s^p(\mu)\, \omega^{*p} + O_\mu^*(\|u+v\|^{2N+2}) \\ v_s^{*\bullet} &= -\lambda_s(\mu)\, v_s^* + v_s^* \sum_{|p|=N} \overline{\alpha}_s^p(\mu)\, \omega^{*p} + O_\mu^*(\|u+v\|^{2N+2}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

эквивалентную системе (2.1) в области D^*. Система (4.1) получается при обычной нормализации системы (2.1) в области D^*.

Как следует из п. 2 коэффициенты α_s^p в системах (2.10) и (4.1) при $k \geqslant 3$ совпадают. Существенно отметить, что если в (2.10) нелинейности

O_μ непрерывны в D, то в системе (4.1) $O_\mu^* \to \infty$ при $\mu \to \mu_0$ за счет коэффициентов при членах порядка не менее $2k - 1$. При $k = 2$ этим свойством обладают уже коэффициенты α_s^p ($|p| = 1$), в связи с чем (4.1) будет рассматриваться лишь при $k > 2$.

Пусть система (3.1) обладает непрерывным семейством интегралов (3.6). Вычисляя производную функции V в силу системы (2.10) и учитывая, что V — интеграл системы (3.1), будем иметь

$$(4.2) \qquad \frac{1}{2} V^\cdot = \sum_{|q|=N+1} T_q(\mu)\, \omega^q + O_\mu(\|\omega\|^{N+3/2}) = W_{N+1}(\mu, \omega) + O_\mu$$

$$T_q(\mu) = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s(\mu) \operatorname{Re} \alpha_s^{q-\delta_s}$$

Если форма $N+1$-го порядка $W_{N+1}(\mu_0, \omega) = \overset{\circ}{W}_{N+1}$ в конусе $\omega \geqslant 0$ знакоопределенная, то при достаточно малом ε функция $V^\cdot$ знакоопределена в окрестности нуля при всех $\mu \in D = U_\varepsilon(\mu_0)$.

Обозначим через Γ_0 множество тех векторов $\gamma(\mu_0)$, для которых форма $\overset{\circ}{W}_{N+1}$ определенно-отрицательна (ясно, что Γ_0 может быть и $\varnothing$). Обозначим еще через M_0 множество решений системы (3.7) при $\mu = \mu_0$, а через M_0^+ множество строго положительных решений. Заметим, что $M_0^+ \neq \varnothing$ при выполнении условий $A(\mu_0)$ или $B_3(\mu_0)$.

Теорема 4.1. Пусть система (2.10) такова, что: 1) при достаточно малом ε Rank C сохраняется в D, 2) $\Gamma_0 \neq \varnothing$.

Система (2.10) сильно асимптотически устойчива в точке μ_0, если а) выполняются условия $A(\mu_0)$ или $B_3(\mu_0)$ и $\Gamma_0 \cap M_0^+ \neq \varnothing$.

Система (2.10) сильно неустойчива в точке μ_0, если б) выполняется одно из условий $A(\mu_0)$ или $B_3(\mu_0)$ и $\Gamma_0 \cap (M_0 \setminus M_0^+) \neq \varnothing$.

Справедливость теоремы вытекает из теоремы 3.1 и теорем второго метода Ляпунова. Рассмотрим, например, случай а). Из условия 2) следует, что существует вектор γ°, такой, что форма $\overset{\circ}{W}_{N+1}$ определенно-отрицательна. Условие а) гарантирует существование в семействе (3.5) знакоопределенного интеграла V_0 системы (3.1), производная которого в силу (2.10) определенно-отрицательна (что определяется формой $\overset{\circ}{W}_{N+1}$). Условие 1) и теорема 3.1 позволяют утверждать существование непрерывной по μ функции Ляпунова, удовлетворяющей в каждой точке области D условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Аналогично рассматривается случай б), в котором используются знакопеременные интегралы системы (3.1).

Остановимся теперь на вопросе о свойствах системы (2.10) в некоторых случаях, когда нарушаются условия теоремы 4.1. С этой целью рассмотрим систему (4.1) в D^* и функцию

$$V^* = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s(\mu)\, \omega_s^*$$

где γ_s — произвольные непрерывные функции μ (V^* в отличие от V из (3.6) не обязательно есть интеграл системы (3.1)).

Учитывая, что α_s^p в системах (2.10) и (4.1) совпадают, имеем

(4.3) $$V^{*\cdot} = W_{N+1}(\mu, \omega^*) + O_\mu^*(\|\omega\|^{N+3/2})$$

где $W_{N+1}(\mu, \omega^*)$ — форма, аналогичная (4.2), а $O_\mu^* \to \infty$ при $\mu \to \mu_0$.

Пусть множество Γ_0 для формы $W_{N+1}(\mu, \omega^*)$ не пусто. Если Γ_0 содержит строго положительный вектор γ°, то система (4.1) асимптотически устойчива в D^*. Независимо от этого свойства системы (4.1) для системы (3.1) в точке μ_0 может реализоваться любой из случаев A, B_j. Если предположить выполнение условий $B_1(\mu_0)$ или $B_2(\mu_0)$, то система (2.10) при $\mu = \mu_0$ неустойчива [2]. Очевидно, что при этих предположениях $\Gamma_0 \cap \cap M_0 = \varnothing$ и ни одно из условий а), б) не выполняется.

Изложенное приводит к следующему результату.

Теорема 4.2. Если система (2.10) такова, что выполняются условия $B_1(\mu_0)$ или $B_2(\mu_0)$, а форма $W_{N+1}(\mu_0, \omega^*)$ выбором $\gamma_s^\circ > 0$ может быть сделана определенно-отрицательной, то точка μ_0 является точкой бифуркации — асимптотическая устойчивость в D^* сменяется неустойчивостью в точке μ_0. Если множество $\Gamma_0 \neq \varnothing$ не содержит строго положительных векторов, то при выполнении условий $B_1(\mu_0)$ или $B_2(\mu_0)$ система (2.10) сильно неустойчива в D.

Заметим, что область знакоопределенности функции $V^{*\cdot}$ в условиях теоремы 4.2 стягивается при $\mu \to \mu_0$ к началу координат, что следует из свойства функции O_μ^* в (4.3). При $\mu = \mu_0$ возникает область неустойчивости, расположенная в окрестности неустойчивого решения системы (3.1) [2].

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

(4.4) $$z_s^{\cdot\cdot} + \rho_s^2(\mu) z_s = Z_s^{(2N)}(\mu, z, z^{\cdot 2}) + Z_s^{2N+1}(\mu, z, z^{\cdot 2}) + g_s(\mu) z_s^{\cdot 2N+1} + \ldots$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n,\ N > 1)$$

где $\rho_s(\mu)$, $g_s(\mu)$ и коэффициенты форм $Z_s^{(j)}$ — непрерывные функции μ.

С помощью замены $x_s = z_s - (i/\rho_s) z_s^{\cdot} = \bar{y}_s$ и последующего преобразования к непрерывной нормальной форме задача сводится к исследованию системы (2.10), в которой коэффициенты имеют следующие значения:

$$\lambda_s = i\rho_s, \quad \alpha_s(\mu) = -\frac{i}{\rho_s(\mu)} b_s(\mu), \quad \alpha_s^p(\mu) = -\frac{i}{\rho_s(\mu)} b_s^p(\mu) \quad \text{при} \quad p \neq N\delta_s$$
$$\alpha_s^{N\delta_s}(\mu) = \rho_s^{2N} 2^{-2N-1} C_{2N+1}^N g_s - \frac{i}{\rho_s} b_s^{N\delta_s}$$

Действительные числа $b_s(\mu)$ и $b_s^p(\mu)$ — коэффициенты при членах внутреннего и тождественного резонансов в формах $Z^{(j)}(\mu, {}^1/_2(x_s + y_s), -{}^1/_4\rho_s^2(y_s - x_s)^2)$ при $j = 2N$, $2N+1$ соответственно. В точке μ_0 числа $b_s(\mu_0) = b_s^\circ$ и $g_s(\mu_0) = g_s^\circ$ отличны от нуля.

Видно, что для рассматриваемой системы (4.4) матрица $C(\mu)$ сохраняет ранг в D, в точке μ_0 выполняются либо условия $B_2(\mu_0)$, если все b_s°/ρ_s° одного знака, либо условия $B_3(\mu_0)$, если среди b_s°/ρ_s° есть числа разных знаков.

Форма $\overset{\circ}{W}_{N+1}$ и множества Γ_0, M_0 определяются следующим образом:

$$\overset{\circ}{W}_{N+1} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s^\circ \operatorname{Re} \alpha_s^{N\delta_s}(\mu_0)\, \omega_s^{N+1} \qquad (\operatorname{sign} \operatorname{Re} \alpha^{N\delta_s}(\mu_0) = \operatorname{sign} g_s^\circ)$$

$$\Gamma_0 = \{\gamma^\circ \mid \operatorname{sign} \gamma_s^\circ = -\operatorname{sign} g_s^\circ\}, \quad M_0 = \left\{\gamma^\circ \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} b_j^\circ \gamma_j^\circ = 0\right\}$$

Очевидно, что $\Gamma_0 \neq \varnothing$ и для системы (4.4) выполняются условия 1) и 2) теоремы 4.1.

Если все $g_s{}^\circ < 0$ и выполняется условие B_3 (μ_0), то система (4.4) сильно асимптотически устойчива (выполняются условия а) теоремы).

Если среди $g_s{}^\circ$ имеются числа разных знаков или все $g_s{}^\circ > 0$, то, когда для некоторых k, j будет $\operatorname{sign} g_k{}^\circ b_k{}^\circ = -\operatorname{sign} g_j{}^\circ b_j{}^\circ$, выполняется условие б) теоремы 4.1 и система (4.4) сильно неустойчива. Последнее требование заведомо реализуется, если все $b_s{}^\circ/\rho_s{}^\circ$ одного знака, а среди $g_s{}^\circ$ имеются числа разных знаков или наоборот.

Если все $g_s{}^\circ < 0$ и выполняется условие B_2 (μ_0), то по теореме 4.2 в точке μ_0 бифуркация — асимптотическая устойчивость в D^* — сменяется неустойчивостью в точке μ_0.

Наконец, если выполняется условие B_2 (μ_0) и $(\forall s) g_s{}^\circ b_s{}^\circ/\rho_s{}^\circ < 0$ (> 0), то по теореме 4.2 точке μ_0 сильная неустойчивость.

В заключение отметим, что теорема 4.2 может быть усилена в следующей форме.

Теорема 4.3. Если для системы (2.10) выполняются условия B_1 (μ_0) или B_2 (μ_0), а система (4.1) асимптотически устойчива в D^* вне зависимости от членов порядка выше $2k - 2$, то точка μ_0 — точка бифуркации системы (2.10) того же типа, что и в теореме 4.2.

Если система (4.1) неустойчива в D^* вне зависимости от членов порядка выше $2k-2$ и выполняются условия B_1 (μ_0) или B_2 (μ_0), то система (2.10) сильно неустойчива в точке μ_0.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе и сделанные замечания.

Поступила 14 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
2. *Гольцер Я. М.*, *Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
3. *Кузьмин П. А.* Устойчивость при параметрических возмущениях. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
5. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. *Якубович В. А.*, *Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
7. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметра. Успехи матем. наук, 1971, т. 26, вып. 2.
8. *Гольцер Я. М.*, *Нурпеисов С.* К исследованию одного критического случая при наличии внутреннего резонанса. Изв. АН КазССР. Сер. физ., матем., 1972, № 1.