Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ТИПА «БЕЛЫЙ ШУМ»

Ю. Ф. Казаринов

(Ленинград)

Получены необходимые и достаточные условия стабилизации линейной системы автоматического управления, параметры которой подвержены воздействию типа белый шум. Стабилизирующее управление строится по принципу линейной обратной связи на основе измерения всех координат фазового вектора системы.

Рассматривается линейный объект, описываемый системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Ax(t) + b\sigma + q\varphi \tag{1}$$

где A — постоянная вещественная $n \times n$-матрица, b, q — постоянные n-векторы, $x(t)$ — вектор фазового состояния объекта. Вход φ замыкается следующим образом:

$$\varphi = (r^*x)\xi \tag{2}$$

где ξ — белый шум с единичной спектральной плотностью, r — постоянный n-вектор. Требуется замкнуть вход σ с помощью обратной связи

$$\sigma = c^*x \tag{3}$$

таким образом, чтобы полученная система стохастических дифференциальных уравнений (1) — (3) была устойчива (решение системы (1) — (3) понимается в смысле [1]).

Определение стохастической устойчивости дано в ряде работ (см., например, [2,3].) Будем иметь в виду экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом [1].

Определение [1]. Система (1) — (3) называется экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом, если существуют положительные числа N и ε, такие, что для любых $t \geqslant t_0$ и любого n-мерного вектора x_0 справедливо неравенство

$$M\,|x(t)|^2 \leqslant N\,|x_0|^2 \exp \varepsilon(t_0 - t)$$

где $x(t)$ — решение системы (1) — (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, M — знак математического ожидания.

Задача стабилизации формулируется следующим образом: найти вектор c, при котором система (1) — (3) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

Цель работы — определение эффективных алгебраических условий существования стабилизирующего вектора c.

Чтобы сформулировать эти условия, понадобятся следующие обозначения:

$$A_\lambda = \lambda I - A, \quad \delta(\lambda) = \det A_\lambda, \quad \chi(\lambda) = r^* A_\lambda^{-1} b, \quad \theta(\lambda) = \delta(\lambda)\chi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \theta(\lambda)\theta(-\lambda) \tag{4}$$

Функция $\chi(\lambda)$ имеет смысл передаточной функции в линейном объекте (1) от входа σ к выходу $\psi = r^*x$, $\chi(\lambda)$ — дробно-рациональная функция, $\theta(\lambda)$ — многочлен степени $k \leqslant n - 1$, где n — порядок системы (1).

Будем предполагать, что пара (A, b) управляема, т. е. что векторы b, $Ab, \ldots, A^{n-1}b$ линейно-независимы.

Как известно [4], в этом случае можно выбрать такой вектор c, что характеристический многочлен матрицы $P = A + bc^*$ имеет любые заданные корни. В частности, можно добиться выполнения для матрицы P условий Гурвица с любой системой собственных чисел. Однако это будет гарантировать устойчивость системы (1) — (3) лишь при достаточно малом (по норме) векторе q интенсивности шумов. Необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (1) — (3) изложены в ряде работ (см. [1-3,5,6]). Здесь наиболее удобным будет критерий устойчивости, изложенный в [3,6]. Из результатов этих работы следует, что для экспоненциальной устойчивости системы (1) — (3) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$q^*Hq < 1 \tag{5}$$

где H — решение матричного уравнения Ляпунова

$$HP + P^*H = -rr^* \quad (P = A + bc^*) \tag{6}$$

с матрицей P, определяемой равенством в скобках. Поэтому вопрос о стабилизации системы (1) — (3) заменим вопросом существования вектора c, при котором выполняется неравенство (5).

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть матрица A и вектор b в системе (1) таковы, что пара (A, b) управляема. Обозначим $\zeta(\lambda)$ многочлен степени $k \leqslant n - 1$ со старшим коэффициентом $\varkappa > 0$, удовлетворяющий соотношению $\zeta(\lambda)\zeta(-\lambda) = \Phi(\lambda)$ и не имеющий корней в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Такой многочлен существует и единственный. Пусть вектор d и матрица H определяются из соотношений

$$d^*Q(\lambda)b = \zeta(\lambda) \tag{7}$$

$$HA + A^*H = -rr^* + dd^*, \quad Hb = 0 \tag{8}$$

Тогда для того, чтобы существовал вектор c, стабилизирующий систему (1) — (3), необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$q^*Hq < 1 \tag{9}$$

Доказательство теоремы будет дано ниже.

Заметим, что соотношения (8) образуют переопределенную систему уравнений. Как будет видно из доказательства теоремы, уравнения (8) всегда совместны, откуда матрица H определяется однозначно. Действительно, если существует матрица H, удовлетворяющая системе (8), то H удовлетворяет первому уравнению (8) с любой матрицей $A' = A + bc^*$, где c — произвольный вектор, так как $HA = HA'$.

Теорема 2. Пусть в системе (1) выполняется соотношение $q = b$. Тогда система (1) стабилизируема.

Теорема 3. Пусть многочлен $\theta(\lambda)$, определенный предпоследней формулой (4), не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда система (1) — (3) стабилизируема при любом векторе q.

Теорема 3 допускает следующую интерпретацию. Передаточные функции стационарных линейных объектов с конечномерным фазовым пространством являются дробно-рациональными функциями. Объект называется минимально фазовым, если числитель этой функции — многочлен Гурвица. Как уже было отмечено, $\chi(\lambda)$ имеет смысл передаточной функции от входа σ к выходу $\psi = r^*x$. Из теоремы 3 следует, что если эта передаточная функция минимально фазовая, то объект, подверженный возмущению белым шумом с интенсивностью, линейно зависящей от фазовых координат системы, можно стабилизировать при любом уровне шума. Заметим, что если эта передаточная функция принимает нулевое значение в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то существуют шумы, при которых стабилизация невозможна.

Пример 1. Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + (a_{n-1} + r_{n-1}\xi)x^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + r_0\xi)x = \sigma$$

где ξ — белый шум. Всегда можно подобрать такую линейную комбинацию $\sigma = c_0x + c_1x' + \ldots + c_{n-1}x^{(n-1)}$, что тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом (случай $b = q$).

Пример 2. Рассмотрим систему, содержащую два интегрируемых звена

$$x_1^{\cdot} = \sigma, \quad x_2^{\cdot} = kx_1 + \varphi\xi, \quad \varphi = r_1x_1 + r_2x_2$$

Найдем область изменения параметров r_1, r_2, k, при которых можно стабилизировать указанную систему. Здесь матрица A и векторы b, q, r имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad r = \begin{Vmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Vmatrix}$$

Видно, что

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}(r_1\lambda + kr_2), \quad \theta(\lambda) = r_1\lambda + kr_2$$

При $kr_1r_2 \geqslant 0$ передаточная функция $\chi(\lambda)$ — минимально фазовая, так что в этом случае стабилизация системы (1) возможна. Рассмотрим случай $kr_1r_2 < 0$. Тогда многочлен $\theta(-\lambda)$ удовлетворяет условию Гурвица, и для $\zeta(\lambda)$ имеем соотношение $\zeta(\lambda) = |r_1|\lambda + |kr_2|$. Отсюда $d_1 = r_1$, $d_2 = |kr_2|/k$.

Для матрицы H имеем уравнение

$$HA + A^*H = -rr^* + dd^*$$

Отсюда $h_{11} = h_{12} = h_{21} = 0$, $h_{22} = -2r_1r_2/k$.

Неравенство $q^*Hq < 1$ приводит к неравенству $-2r_1r_2/k < 1$, которое служит необходимым и достаточным условием стабилизируемости рассматриваемой системы.

Доказательство сформулированных теорем опирается на ряд вспомогательных утверждений. Введем обозначения.

$$Q(\lambda) = \delta(\lambda)A_\lambda^{-1}, \quad \Phi_\alpha(\lambda) = \Phi(\lambda) + \alpha^2\Pi(\lambda) \tag{10}$$

$$\Pi(\lambda) = \delta(\lambda)\,\delta(-\lambda) + b^TQ^T(-\lambda)\,Q(\lambda)\,b$$

где A и $\Phi(\lambda)$ определяются формулами (4). Очевидно, Φ и Φ_α — многочлены, степень которых не превосходит $2n$, где n — порядок системы (1). Их корни расположены симметрично относительно вещественной и мнимой осей, причем корни, лежащие на мнимой оси, имеют четную кратность. Поэтому многочлены Φ и Φ_α можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \zeta(-\lambda)\,\zeta(\lambda), \quad \Phi_\alpha(\lambda) = \zeta_\alpha(\lambda)\,\zeta_\alpha(-\lambda) \tag{11}$$

где ζ и ζ_α — многочлены с вещественными коэффициентами, не имеющие корней в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Факторизация вида (11) при выполнении этого условия осуществляется однозначно.

Лемма 1. Имеет место соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}\zeta_\alpha(\lambda) = \pm\zeta(\lambda)$$

Доказательство. Множество многочленов степени $k \leqslant n$ образует линейное пространство размерности $n+1$. Введем в этом пространстве норму

$$\|\zeta\| = \left\{\int_0^1 |\zeta(i\omega)|^2 d\omega\right\}^{1/2}$$

Из вторых соотношений в (10) и (11) следует, что

$$\|\zeta_\alpha\|^2 = \mu + \alpha^2\nu, \quad \mu = \int_0^1 \Phi(i\omega)\,d\omega, \quad \nu = \int_0^1 \Pi(i\omega)\,d\omega$$

Семейство многочленов ζ_α можем рассматривать как траекторию в конечномерном линейном пространстве L. Из сказанного следует, что эта траектория ограничена.

Пусть

$$\zeta_{\alpha_k} \to \zeta^* \text{ при } \alpha_k \to \beta, \quad \beta \in (0, 1)$$

Так как корни многочленов $\zeta_{\alpha_k}(\lambda)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, то и корни многочленов ζ^* удовлетворяют этому неравенству. Кроме того, коэффициент при максимальной степени многочленов ζ_α равен α, так что $\zeta^*(\lambda)$ — многочлен, удовлетворяющий перечисленным условиям факторизации. Следовательно, $\zeta^*(\lambda) = \zeta_\beta(\lambda)$, т. е. траектория ζ_α при $\alpha \to \beta$ имеет единственную предельную точку — многочлен $\zeta_\beta(\lambda)$, что означает непрерывность траектории ζ_α в точке $\alpha = \beta > 0$.

При $\alpha \to 0$ нельзя гарантировать положительности коэффициента при старшей степени многочлена $\zeta^*(\lambda)$. Повторяя рассуждения, получаем, что при $\alpha \to 0$ траектория ζ_α может иметь лишь два предельных элемента — многочлены ζ и $-\zeta$. Так как множество предельных элементов для ограниченной непрерывной траектории в конечномерном пространстве либо бесконечно, либо состоит из единственного элемента, то при $\alpha \to 0$ можем иметь либо $\lim \zeta_\alpha = \zeta$, либо $\lim \zeta_\alpha = -\zeta$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\rho = \inf_c q^*Hq$, где H — решение матричного уравнения (6) с матрицей Гурвица $P = A + bc^*$. Справедливо равенство

$$\rho = \inf_{u\in U} I(u), \quad I(u) = \int_0^\infty |r^*x(t)|^2\,dt$$

где $x(t)$ — решение уравнения

$$dx/dt = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = q \tag{12}$$

$$\left(\int_0^\infty |u(t)|^2\,dt < +\infty, \quad \int_0^\infty |x(t)|^2\,dt < +\infty\right)$$

а множество U функций $u(t)$ определяется условиями в скобках.

Доказательство. Пусть H — решение уравнения $HP + P^*H = -rr^*$, где $P = A + bc^*$ — матрица Гурвица. Видно, что

$$q^*Hq = \int_0^\infty |r^*x(t)|^2 dt$$

где $x(t)$ — решение уравнения (12), с функцией $u(t) = c^*x(t)$.

Введем в рассмотрение функционал

$$I_\alpha(u) = \int_0^\infty [|r^*x|^2 + \alpha^2 |x|^2 + \alpha^2 u^2]\, dt$$

Изменение подынтегральной функции осуществлено для того, чтобы сделать ее положительно-определенной квадратичной формой аргументов x и u. Как известно (см. [7]), $\min I_\alpha(u)$ существует и достигается на функции $u(t)$, связанной с решением $x(t)$ системы (12) соотношением $u = c_\alpha^* x(t)$, причем матрица $P_\alpha = A + bc_\alpha^*$ удовлетворяет условиям Гурвица. Вследствие сказанного имеем очевидные соотношения

$$\inf I_\alpha(u)_{\alpha \to 0} \to \inf I(u), \quad \inf I_\alpha(u) \geqslant \rho, \quad \inf I(u) \leqslant \rho$$

Отсюда $\inf I(u) = \rho$.

Из леммы 2 следует, что для существования вектора c, стабилизирующего систему (1) — (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho = \inf I(u) < 1$$

где $I(u)$ — функционал, определенный в лемме 2. Так как $\rho = \lim_{\alpha\to 0}\rho_\alpha$, где $\rho_\alpha = \min I_\alpha(u)$, вопрос о стабилизации системы (1) — (3) сводится к определению величины ρ_α. Как показано в [7], величина ρ_α достигается на функции $u_\alpha = c_\alpha^* x(t)$, где $x(t)$ — решение системы (12), причем вектор c_α не зависит от начального условия.

Согласно процедуре, описанной в [8], вектор c_α определяется единственным образом из линейных соотношений, вводимых тождеством

$$\alpha c_\alpha^* Q(\lambda) b = \alpha\delta(\lambda) - (-1)^n \zeta_\alpha(\lambda) \tag{13}$$

где $\zeta_\alpha(\lambda)$ — многочлен Гурвица, удовлетворяющий условию факторизации $\zeta_\alpha(\lambda)\zeta_\alpha(-\lambda) = \Phi_\alpha(\lambda)$; $\delta(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $\Phi_\alpha(\lambda)$ определены формулами (4) и (10).

Для вектора $d_\alpha = \alpha c_\alpha$ имеем уравнение

$$d_\alpha^* Q(\lambda) b = \alpha\delta(\lambda) - (-1)^n \zeta_\alpha(\lambda) \tag{14}$$

Заметим, что справа стоит многочлен степени $k \leqslant n - 1$. Как показано в [8], матрица $P_\alpha = A + bc_\alpha^*$ удовлетворяет условиям Гурвица. Введем в рассмотрение матрицу H_α, удовлетворяющую соотношению

$$H_\alpha P_\alpha + P_\alpha^* H_\alpha = -(rr^* + \alpha^2 I + \alpha^2 c_\alpha c_\alpha^*) \tag{15}$$

Матрица H_α одновременно удовлетворяет соотношениям (см. [8])

$$q^* H_\alpha q = \rho_\alpha, \quad H_\alpha b = -\alpha d_\alpha, \quad H_\alpha A + A^* H_\alpha = -rr^* - \alpha^2 I + d_\alpha d_\alpha^* \tag{16}$$

Из леммы 1 следует, что при $\alpha \to 0$ либо $\zeta_\alpha \to \zeta$, либо $\zeta_\alpha \to -\zeta$. Переходя к пределу в соотношениях (14) — (16), получим утверждения теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 следует из второго соотношения (8). В этом случае $\rho = 0$.

Докажем теорему 3. Пусть многочлен $\theta(\lambda)$ не имеет корней в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Тогда многочлен $\zeta(\lambda)$, фигурирующий в формулировке теоремы 1, совпадает с многочленом $\theta(\lambda)$. Поэтому вектор d, определяемый формулой (7), совпадает с вектором r. Из соотношений (8) следует, что $H = 0$. Отсюда $\rho = 0$, и системе (1) — (3) стабилизируема.

Замечание. В доказательстве теоремы 1 содержится метод построения стабилизирующей обратной связи вида (3). Если $\rho < 1$, то при достаточно малом $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\rho_\alpha < 1$. Покажем, что вектор c_α, являющийся решением уравнения (13), будет стабилизирующим.

Так как $P_\alpha = A + bc^*$ — матрица Гурвица, существует единственное решение матричного уравнения $HP_\alpha + P_\alpha^*H = -rr^*$. Так как матрица $G = H_\alpha - H$ удовлетворяет уравнению $GP_\alpha + P_\alpha^*G = -\alpha^2(I + c_\alpha c_\alpha^*)$, то $G > 0$. Следовательно, $q^*Hq < q^*H_\alpha q < 1$. Условие $q^*Hq < 1$, как было указано выше, служит достаточным условием устойчивости системы (1) — (3).

Поступила 18 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
2. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. *Левит М. В.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием коррелированных белых шумов. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Изд. 3. М., «Наука», 1967.
5. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.
6. *Левит М. В., Якубович В. А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
7. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I. Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4.
8. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задачах минимизации квадратичных функционалов. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2.