

СЛУЧАЙ ХИЛЛА ОСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ОРБИТ

С. Л. Зиглин, М. Л. Лидов

(Москва)

Рассматривается задача трёх тел в случае Хилла (расстояние между двумя точками много меньше, чем расстояние от их барицентра до третьей точки). В первом порядке теории возмущений вековая эволюция определяется системой уравнений с гамильтонианом, осредненным по средним долготам точек. Осредненная задача интегрируется. В работе проведено ее исследование при всех допустимых значениях параметров задачи. В частности, выявлены ситуации, когда движение по плоским круговым орбитам неустойчиво.

В связи с этим в рамках осредненной задачи трёх тел исследуется устойчивость плоских круговых обратных движений при произвольном отношении больших полуосей орбит. Определены соотношения между параметрами задачи, когда такие орбиты неустойчивы.

1. Постановка задачи. Обозначим: m_0, m_1, m_2 — три точки и их массы в общей задаче трёх тел; r_{jk} — радиус-вектор точки m_k относительно m_j ; r_2 — радиус-вектор точки m_2 относительно барицентра B точек m_0 и m_1 .

Предельный вариант этой задачи, когда

$$(1.1) \quad |r_{01}| \ll |r_2|$$

по аналогии с ограниченной задачей будем называть случаем Хилла. Предполагается, что выполнены следующие условия малости взаимных возмущений:

$$(1.2) \quad \nu_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{|r_{01}|^3}{|r_2|^3} < \varepsilon, \quad \nu_2 = \frac{m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2} \frac{|r_{01}|^2}{|r_2|^2} < \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1$$

Если в уравнениях движения пренебречь членами, пропорциональными ν_1 и ν_2 , то орбиты m_1 относительно m_0 и m_2 относительно B определяются решениями задачи двух тел. В работе рассматривается случай, когда «невозмущенные» орбиты — эллипсы. Для определения приближенного решения при $\nu_1 + \nu_2 \neq 0$ на ограниченных интервалах времени могут быть применены методы теории возмущений.

При отсутствии резонансных соотношений между средними движениями m_1 и m_2 в первом приближении по ε основные закономерности эволюции орбит в этой задаче определяются гамильтонианом, осредненным по средним аномалиям (или средним долготам) орбитального движения m_1 и m_2 . Говорят, что осредненный гамильтониан описывает «вековые» изменения элементов орбит [1].

Используя известные первые интегралы, двукратно осредненную задачу трёх тел можно свести [1] к гамильтоновой проблеме с двумя степенями свободы, которая, по-

видимому, не интегрируется. Существенно, что в предельном случае Хилла (1.1) этой задачи одна из двух угловых переменных является циклической, а задача интегрируемой.

Функцию Гамильтона H проблемы трех тел (см. [1]) удобно представить в следующем виде:

$$(1.3) \quad H = H_1 + H_2 + H'$$

$$H_1 = \frac{1}{2\mu_1} |\mathbf{p}^{(1)}|^2 - f \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{r}_{01}|}, \quad H_2 = \frac{1}{2\mu_2} |\mathbf{p}^{(2)}|^2 - f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}_2|}$$

$$H' = f \frac{m_2(m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}_2|} - f \frac{m_0 m_2}{|\mathbf{r}_{02}|} - f \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|}$$

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_{01} = (q_1, q_2, q_3), \quad \mathbf{r}_2 = (q_4, q_5, q_6)$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = (p_1, p_2, p_3) = \mu_1 \frac{d\mathbf{r}_{01}}{dt}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = (p_4, p_5, p_6) = \mu_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

Здесь q_i — проекции на оси невращающейся системы координат, f — гравитационная постоянная, p_i, q_i — канонически сопряженные переменные задачи.

Используя предположение (1.1) и разложение H' в ряд по $|\mathbf{r}_{01}|/|\mathbf{r}_2|$, получим асимптотическое представление

$$(1.4) \quad H' = H^0 + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_2|} O\left(\frac{|\mathbf{r}_{01}|^3}{|\mathbf{r}_2|^3}\right)$$

$$(1.5) \quad H^0 = -\frac{\mu}{2} \frac{|\mathbf{r}_{01}|^2}{|\mathbf{r}_2|^3} (3\cos^2 \varphi - 1), \quad \mu = f \frac{m_0 m_1 m_2}{m_0 + m_1}$$

где φ — угол между векторами \mathbf{r}_{01} и \mathbf{r}_2 . При $H' = 0$ гамильтониан (1.3) описывает невозмущенное движение m_1 относительно m_0 и m_2 относительно барицентра B тел m_0 и m_1 . Если пренебречь членами $O(|\mathbf{r}_{01}|^3/|\mathbf{r}_2|^3)$, то приходим к приближенному варианту возмущенной задачи, который будем называть случаем Хилла. В случае Хилла возмущающая часть гамильтониана имеет вид (1.5).

Ниже для описания эволюции будем использовать как кеплеровские оскуллирующие элементы орбиты: большую полуось a_j , эксцентриситет e_j , наклонение i_j ($j=1, 2$) к основной неподвижной плоскости, так и однозначно связанные с ним канонические элементы Делоне: импульсы

$$L_j = \mu_j \sqrt{fM_j} \sqrt{a_j}, \quad G_j = L_j \sqrt{1 - e_j^2}, \quad \Theta_j = G_j \cos i_j$$

$$(M_1 = m_0 + m_1, \quad M_2 = m_0 + m_1 + m_2)$$

и сопряженные им координаты: среднюю аномалию l_j , аргумент широты перицентра g_j и долготу восходящего узла θ_j . В элементах Делоне

$$H_j = -\frac{\mu_j^2}{2L_j^2} \quad (j=1, 2), \quad H' = H'(L_1, \dots, g_1, l_1, L_2, \dots, g_2, l_2)$$

Дальнейшие упрощения основаны на следующих обстоятельствах [1].

1°. За исключением особых (резонансных) значений L_1 и L_2 при достаточно малых ν_1 и ν_2 существует 2π -периодическая по l_1, l_2 и другим угло-

вым переменным замена переменных

$$L_j \rightarrow \bar{L}_j, \dots, l_j \rightarrow \bar{l}_j$$

отличающаяся от тождественной на функции порядка ε . При этом с точностью до членов более высокого порядка по ε в переменных с чертой гамильтониан задачи \bar{H} получается из исходного H формальной заменой L_j на \bar{L}_j, \dots, l_j на \bar{l}_j и его независимым осреднением по l_1 и l_2 от 0 до 2π . Отвлекаясь от условно-периодических функций величины порядка ε , описывающих замену переменных, в первом порядке теории возмущений приходим к задаче с гамильтонианом

$$(1.6) \quad \bar{H} = -\frac{\mu_1^2}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2}{2L_2^2} + \bar{H}', \quad \bar{H}' = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H' dl_1 dl_2$$

В осредненной задаче L_j — постоянные величины, так как l_j — циклические координаты.

2°. В рассматриваемой задаче сохраняется вектор кинетического момента. Если в качестве основной координатной плоскости выбрать плоскость, ортогональную этому вектору, так называемую плоскость Лапласа, то интегралы площадей позволяют понизить число степеней свободы на две единицы. Формально это достигается заменой

$$G_1 = \Gamma_1, \quad G_2 = \Gamma_2, \quad \Theta_1 = \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)$$

$$\Theta_2 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)$$

в гамильтониане \bar{H}' , где $c = \Theta_1 + \Theta_2$ — постоянная площадей.

В результате этой замены гамильтониан задачи \bar{H}' будет существенно зависеть от четырех канонических переменных $\Gamma_1, \Gamma_2, g_1, g_2$ и от параметров: L_1, L_2 и постоянной площадей c . Таким образом, приходим к задаче с двумя степенями свободы.

Взаимная наклонность орбит I , их эксцентриситеты e_j и большие полуоси a_j определяются следующими соотношениями:

$$(1.7) \quad \cos I = \frac{c^2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{2\Gamma_1\Gamma_2}, \quad e_j = \sqrt{1 - \frac{\Gamma_j^2}{L_j^2}}, \quad a_j = \frac{L_j^2}{\mu_j^2 f M_j} \quad (j = 1, 2)$$

3°. Если в возмущающем гамильтониане H' ограничиться лишь приближением Хилла H^0 (1.5), то оказывается, что переменная g_2 не будет входить в осредненный гамильтониан \bar{H}^0 , и рассматриваемая задача оказывается интегрируемой. Явное выражение \bar{H}^0 определяется следующей формулой:

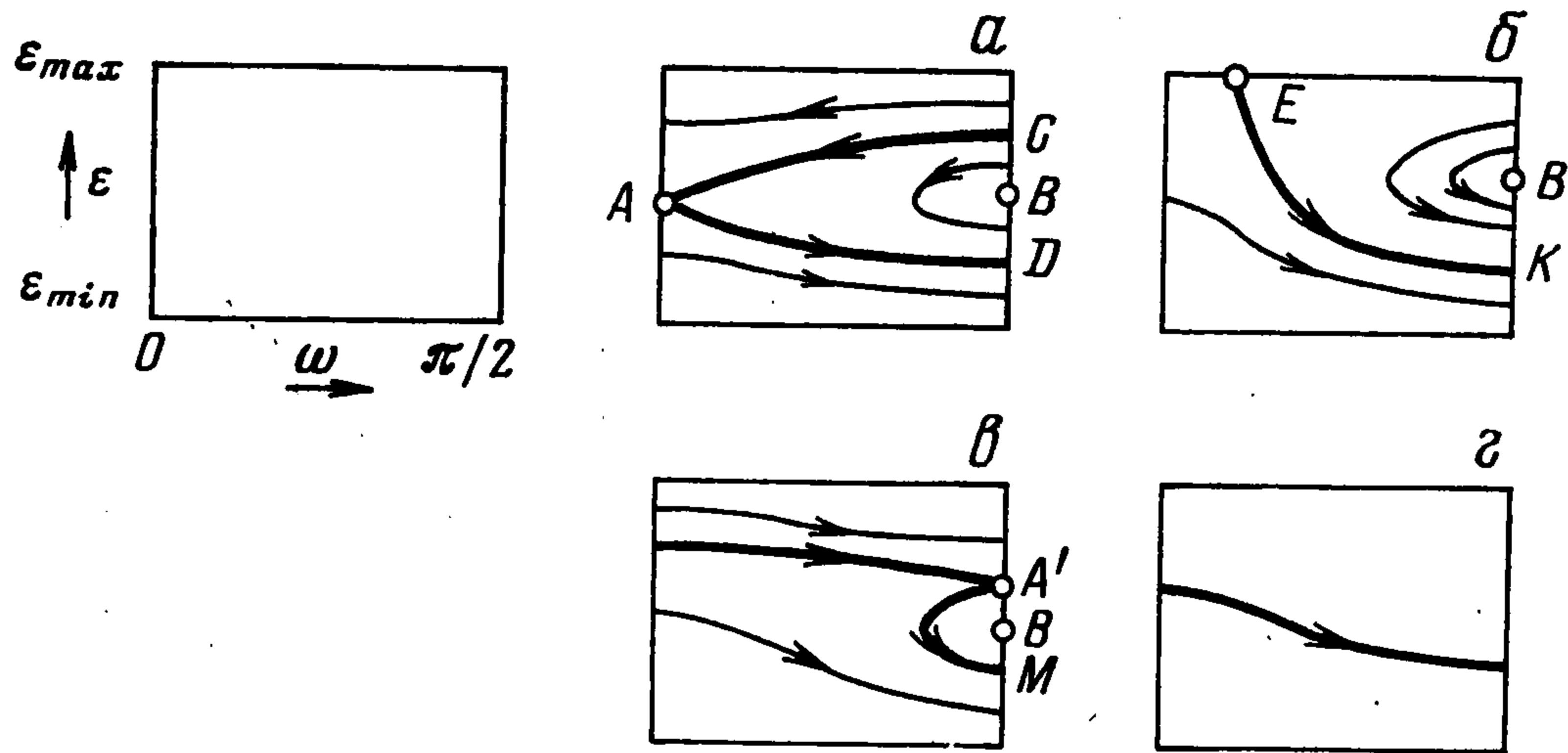
$$(1.8) \quad \bar{H}^0 = -\frac{\mu a_1^2}{8a_2^3(1-e_2^2)^{3/2}} [3(1-e_1^2)(1+\cos^2 I) + 15(\cos^2 g_1 + \cos^2 I \sin^2 g_1) - 6e_1^2 - 4]$$

где $\cos I, e_j$ определены согласно (1.7).

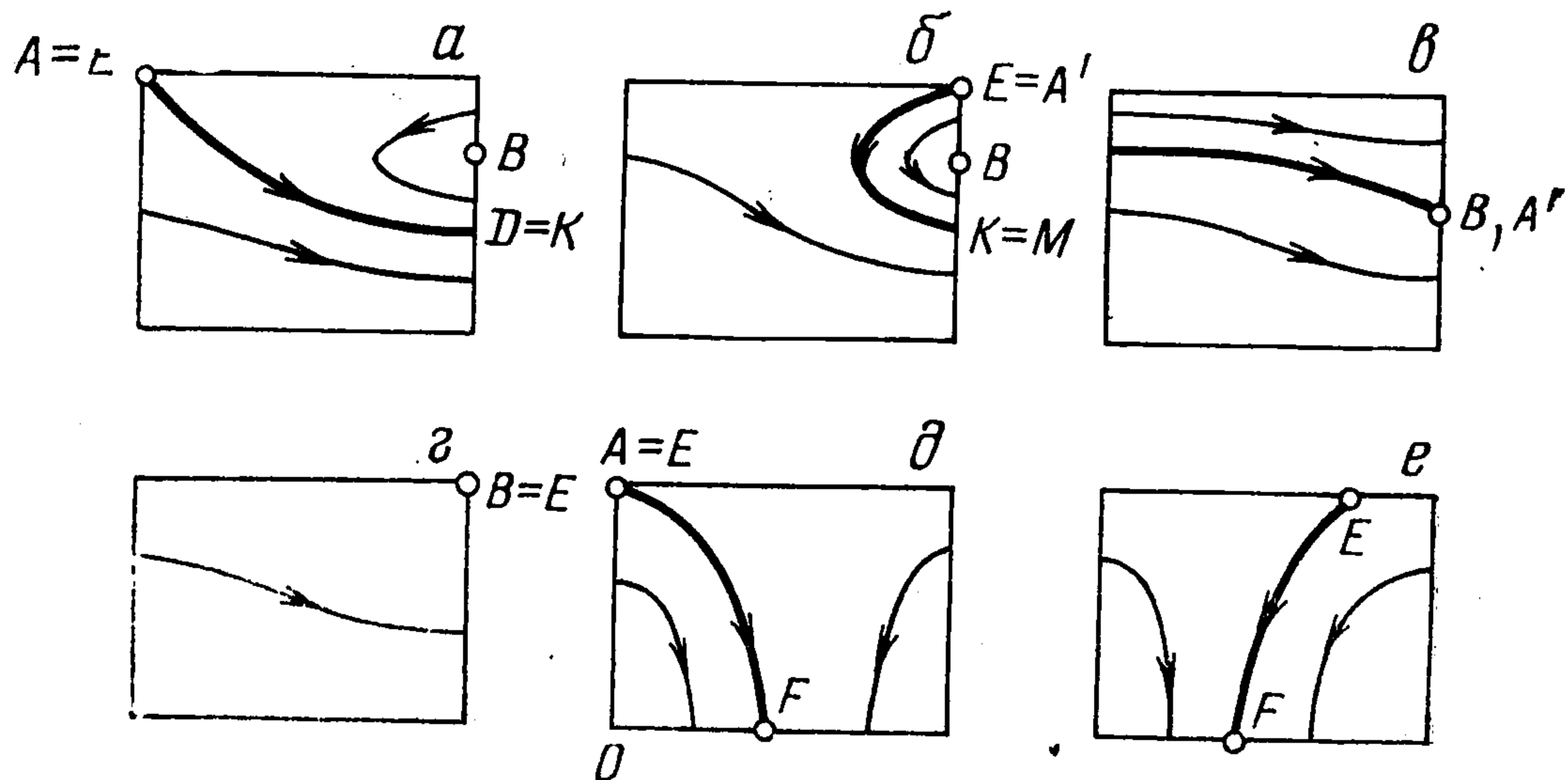
2. Результаты качественного исследования. Так как \bar{H}^0 не зависит от g_2 , то $\Gamma_2 = \text{const}$ будет первым интегралом системы. Как следствие, получим, что в процессе эволюции сохраняется эксцентриситет e_2 орбиты внеш-

N_1N_3 , д) — ON_2 , е) — N_2N_7 . В силу симметрии задачи по ω показан лишь отрезок $0 \leq \omega \leq \pi/2$.

Допустимый интервал значений ε зависит от α , β и определяется неравенствами $\varepsilon_{\min} = (\alpha - \beta)^2 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \min \{1, (\alpha + \beta)^2\}$. Коорди-



Фиг. 2



Фиг. 3

наты особых точек определяются следующими формулами:

$$A: (\omega = 0, \varepsilon = 3\beta^2 + \alpha^2), \quad B: (\omega = \pi/2, \varepsilon = \varepsilon_B)$$

$$E: \left(\begin{array}{l} \omega = \omega_1, \varepsilon = (\alpha + \beta)^2 \text{ при } \alpha + \beta \leq 1 \\ \omega = \omega_2, \varepsilon = 1 \text{ при } \alpha + \beta > 1 \end{array} \right)$$

$$A': (\omega = \pi/2, \varepsilon = \varepsilon_{A'})$$

Здесь

$$\omega_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)^2}{5\alpha[1 - (\alpha + \beta)^2]}}$$

$$\omega_2 = \arcsin \sqrt{\frac{2(3\beta^2 + \alpha^2 - 1)}{5[4\beta^2 - (\alpha^2 - \beta^2 - 1)^2]}}$$

$\varepsilon_B, \varepsilon_{A'}$ — корни уравнения

$$\varepsilon^3 - \left(\frac{\beta^2}{2} + \alpha^2 + \frac{5}{8} \right) \varepsilon^2 + \frac{5}{8} (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$$

Отметим некоторые качественные закономерности, которые следуют из приведенных результатов.

1°. Существуют устойчивые стационарные, в определенном смысле, конфигурации, определяемые равновесной точкой B . На соответствующих решениях сохраняются полуоси, эксцентриситеты обеих орбит, взаимная наклонность их плоскостей и положение перицентра внутренней орбиты относительно плоскости Лапласа. Если пренебречь эволюцией положения перицентра внешней орбиты, то можно было бы сказать, что в этом случае орбиты эволюционируют как твердое тело.

2°. При $\alpha + \beta \geq 1$ всегда существует круговое решение $e_1 = 0$ ($\varepsilon = 1$). Из фиг. 2 видно, что в областях I, III, IV это решение устойчиво, а в области II' неустойчиво. Используя формулы, описывающие геометрию области II', можно доказать следующее утверждение. Для неустойчивости круговых орбит необходимо и достаточно, чтобы взаимная наклонность I удовлетворяла неравенствам

$$\cos I^2 \leq \cos I \leq \cos I^3, \quad \text{если } \beta \geq 1/2$$

$$\cos I^1 \leq \cos I \leq \cos I^3, \quad \text{если } \beta \leq 1/2$$

$$\cos I^1 = -2\beta, \quad \cos I^{2,3} = -\frac{1}{10\beta} \pm \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{100\beta^2}}$$

Значения I^k ($k = 1, 2, 3$) — критические наклонения в рассматриваемой задаче. При переходе через критическое наклонение нарушается устойчивость орбиты по эксцентриситету e_1 и взаимной наклонности I .

3°. Плоскому случаю отвечает решение

$$(2.3) \quad \cos I = \frac{|\alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon|}{2\beta \sqrt{\varepsilon}} = \pm 1$$

Если кинетические моменты орбитального движения одинаково направлены, то $\cos I = 1$.

При движении точек m_1 и m_2 в противоположных направлениях $\cos I = -1$ (так называемое обратное движение).

Из (2.3) следует, что в плоском случае эксцентриситет e_1 не изменяется и устойчивость (неустойчивость) решения $|\cos I| = 1$ при фиксированных α, β имеет место одновременно с устойчивостью (неустойчивостью) решения $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$ или $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$. Из фиг. 2 и соотношения (2.3) можно заключить, что решение $\cos I = 1$ всегда устойчиво. Решение же $\cos I = -1$ будет неустойчиво тогда и только тогда, когда параметры задачи принадлежат области II.

Более наглядную интерпретацию можно получить, если при каждом β и $\cos I = -1$ записать условие принадлежности области II как условие на эксцентриситет орбиты

$$e^1(\beta) \leq e_1 \leq e^2(\beta)$$

где $e^i(\beta)$ определяются из (2.3) и уравнений границы области II. Тогда результат можно сформулировать следующим образом. Для любого β , при котором существуют точки области II, существует интервал значений эксцентриситета орбиты e_1 , при котором плоское обратное движение неустойчиво. Значения $e^i(\beta)$ — критические значения эксцентриситета.

4°. Как следует из фиг. 3, δ , e , при $\alpha = \beta$, вне зависимости от начальных условий, в конце эволюции $\varepsilon = \varepsilon_{\min} = 0$, т. е. эксцентриситет орбиты e_1 растет вплоть до единицы. Поскольку полуось орбиты a_1 не изменяется, при $e_1 = 1$ перицентр орбиты становится равным нулю и происходит столкновение тел m_0 и m_1 . При этом из (2.2) следует, что начальное значение наклона I может быть любым от 90° до 180° , однако в любом случае $I \rightarrow 90^\circ$ при $e_1 \rightarrow 1$.

Особо отметим случай $\alpha = \beta = 1/2$. Эта точка пограничная для четырех областей: I, II, II', III. В частности, при таком значении параметров существуют плоские круговые орбиты ($\cos I = -1$, $e_1 = 0$). Так как точка примыкает к области II, то плоские орбиты неустойчивы. А так как она принадлежит линии $\alpha = \beta$, то в результате эволюции первоначально плоская круговая орбита должна сначала превратиться в сильно вытянутый эллипс с наклоном, близким к 90° , а затем тела m_0 и m_1 столкнутся. Этот случай будет рассмотрен ниже в численном примере.

3. Орбиты с малыми эксцентриситетами и взаимной наклонностью. Предположение (1.1), которое определяет случай Хилла, позволило исследовать осредненную задачу при произвольных эксцентриситетах орбит и их взаимных наклонностях. При этом, в частности, было обнаружено множество значений параметров задачи, при которых плоское (обратное) круговое движение оказывается неустойчивым. Устойчивость плоских круговых орбит в осредненной задаче может быть исследована и без ограничения (1.1), на которое опирался предыдущий анализ.

В качестве исходного возьмем гамильтониан \bar{H}' (1.6). Известно, что осредненная задача допускает круговое решение $e_1 = e_2 = 0$. В переменных Делоне этому решению соответствуют равенства: $\Gamma_1 = L_1$, $\Gamma_2 = L_2$.

Для исследования удобно перейти к новым каноническим переменным

$$p_j = \sqrt{2(L_j - \Gamma_j)} \cos g_j, \quad q_j = -\sqrt{2(L_j - \Gamma_j)} \sin g_j \quad (j = 1, 2)$$

Так как $p_j = q_j = 0$ ($j = 1, 2$) должно быть решением уравнений Гамильтона, то разложение \bar{H}' в ряд по p_j , q_j начинается с квадратичной части H_2 . Можно показать, что она представима в следующем виде:

$$H_2(p, q) = \frac{\beta_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\beta_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \gamma(p_1 p_2 - q_1 q_2) + \\ + \frac{\delta_1}{2} p_1^2 + \frac{\delta_2}{2} p_2^2 + \delta_3 p_1 p_2$$

где β_i , γ , δ_i — коэффициенты, зависящие от параметров c , L_1 , L_2 и масс планет. Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет вид

$$(3.1) \quad \lambda^4 + \lambda^2 [\beta_1 (\beta_1 + \delta_1) + \beta_2 (\beta_2 + \delta_2) - 2\gamma (\gamma + \delta_3)] + (\beta_1 \beta_2 - \gamma^2) [(\beta_1 + \delta_1)(\beta_2 + \delta_2) - (\gamma + \delta_3)^2] = 0$$

В силу сложной зависимости коэффициентов этого уравнения от параметров исследование его корней в общем случае не проведено.

Для решения рассматриваемой проблемы устойчивости плоских круговых орбит по эксцентриситетам воспользуемся специальным приемом.

Ниже будем рассматривать орбиты, близкие к плоским обратным ($\cos I \approx -1$). Для этого вместо постоянной площадей c введем величину $\delta = c - c_0$, где $c_0 = c_0(L_1, L_2)$ — постоянная площадей, соответствующая круговым плоским орбитам при $\cos I = -1$, т. е. $c_0^2 = (L_1 - L_2)^2$. Нетрудно усмотреть, что для круговых орбит $\delta \geq 0$.

Можно показать, что справедливо асимптотическое представление (a_i — полуоси орбит)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= \beta_{10} + \delta_4, & \beta_2 &= \beta_{20} + \delta_5, & \gamma &= \gamma_0 + \delta_6 \\ \beta_{10} &= -fm_2 \left(\frac{1}{2L_1} - \frac{1}{4L_2} \right) B_1', & \beta_{20} &= -fm_2 \left(\frac{1}{2L_2} - \frac{1}{4L_1} \right) B_1' \\ \gamma_0 &= -fm_2 \frac{B_2'}{4\sqrt{L_1 L_2}} \\ B_k' &= m_0 B_k \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} a_1, a_2 \right) + m_1 B_k \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} a_1, a_2 \right) \\ B_k(x_1, x_2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x_1 x_2 \cos k\varphi d\varphi}{(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \varphi)^{3/2}} \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6$ стремятся к нулю вместе с δ .

Исследуем сначала случай $\delta = 0$. Выражение H_2 при $\delta = 0$ обозначим H_{20} . Запишем условие знакоопределенности H_{20} ; оно имеет вид

$$(3.3) \quad \beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 > 0$$

Таким образом, при выполнении (3.3) по теореме Ляпунова круговое плоское (обратное) движение устойчиво относительно эксцентриситетов и взаимных наклонностей; устойчивость будет иметь место и при достаточно малых $\delta > 0$.

Дальнейший анализ опирается на справедливость неравенства $(\beta_{10} + \beta_{20})^2 - 4\gamma_0^2 > 0$, которое вытекает из известных неравенств $B_1 > B_2 > 0$ ([1]). Используя это неравенство при анализе корней (3.1), можно доказать справедливость следующего утверждения. При $\delta = 0$ и $\beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 \leq 0$ корни уравнения (3.1) будут чисто мнимыми и различными, за исключением случая $\beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 = 0$ (пара нулевых корней).

Таким образом, при $\beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 < 0$ плоские круговые решения устойчивы в линейном приближении, а так как корни различны, то имеет место сильная устойчивость, т. е. устойчивость в линейном приближении при достаточно малых δ .

Можно показать, что нулевые корни не порождают неустойчивости системы, описываемой гамильтонианом H_{20} , т. е. круговое плоское (обратное) движение устойчиво в линейном приближении по отношению к возмущениям, не изменяющим значений постоянной $\delta = 0$.

Однако, как сейчас будет показано, при малых $\delta > 0$ в окрестности поверхности $\Pi_0: \beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 = 0$ в пространстве параметров задачи имеется целая область (ширины $\sim \delta$), в которой круговое решение неустойчиво. В самом деле, из уравнения (3.1) следует, что при

$$(3.4) \quad \begin{aligned} &(\beta_1\beta_2 - \gamma^2)^2 + (\beta_1\beta_2 - \gamma^2)X < 0 \\ X &= \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 - 2\gamma\delta_3 - \delta_3^2 \end{aligned}$$

характеристическое уравнение имеет положительный вещественный корень, и решение системы с гамильтонианом H_2 неустойчиво по эксцентриситетам.

Величины $\beta_i, \gamma, \delta_i$ при фиксированном δ зависят от набора параметров $z = (L_1, L_2, m_0, m_1, m_2)$. Рассмотрим в пространстве z гиперповерхность $\Pi: \beta_1\beta_2 - \gamma^2 = 0$, которая при $\delta \rightarrow 0$ стремится к Π_0 . При переходе через эту поверхность $(\beta_1\beta_2 - \gamma^2)$ изменяет знак. Если на поверхности Π функция X не обращается в нуль, то по одну сторону от этой поверхности будет находиться множество значений параметров задачи, при которых круговое решение неустойчиво по эксцентриситетам. В частности, оно будет неустойчиво при вариации полуосей a_1, a_2 .

Остается доказать, что условие $\beta_1\beta_2 - \gamma^2 = 0$ не влечет $X = 0$. В силу аналитической зависимости X от параметров z достаточно доказать это в каком-либо предельном случае. При $a_1/a_2 \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ можно получить асимптотические оценки

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{3}{4}A \left(\frac{2}{L_1} - \frac{1}{L_2} + O_1(\delta) + O_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \right) \\ \beta_2 &= -\frac{3}{4}A \left(\frac{2}{L_2} - \frac{1}{L_1} + O_3(\delta) + O_4\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \right) \\ \gamma &= AO_5\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \quad \delta_1 = -\frac{15}{2}A \frac{\delta}{L_1^2 L_2} (|L_1 - L_2| + O_6(\delta) + O_7\left(\frac{a_1}{a_2}\right)) \\ \delta_2 &= AO_8\left(\frac{a_1}{a_2} \delta\right), \quad \delta_3 = AO_9\left(\frac{a_1}{a_2} \delta\right), \quad A = \mu \frac{a_1^2}{a_2^3}\end{aligned}$$

Видно, что можно найти такие $O_{10}(\delta)$ и $O_{11}(a_1/a_2)$, что соотношение $\beta_1\beta_2 - \gamma^2 = 0$ будет выполнено при

$$L_1 = 2L_2 + O_{10}(\delta) + O_{11}(a_1/a_2)$$

При этом подсчет по формуле (3.4) дает

$$X = \frac{135}{32} \mu^2 \frac{a_1^4}{a_2^6} \frac{\delta}{L_2^3} \left[1 + O_{12}(\delta) + O_{13}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \right] \neq 0$$

Тем самым доказано существование области неустойчивых круговых орбит вблизи поверхности $\beta_{10}\beta_{20} - \gamma_0^2 = 0$. Используя выражения (3.2) для $\beta_{10}, \beta_{20}, \gamma_0$, можно разрешить это уравнение относительно L_2

$$(3.5) \quad L_2 = \frac{L_1}{4} \left(5 - \frac{B_1'^2}{B_1'^2} \pm \sqrt{\left(5 - \frac{B_2'^2}{B_1'^2} \right)^2 - 16} \right)$$

Отсюда следует, что для любых значений a_1, a_2, m_0, m_1 при достаточно малом $\delta > 0$ существуют два интервала значений m_2 , при которых соответствующее круговое значение неустойчиво. Длина этих интервалов стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Замечания. 1°. Формула (3.5) в случае Хилла дает два решения

- а) $L_1 = 2L_2$ ($\alpha = c_0 / L_1 = 1/2, \beta = L_2 / L_1 = 1/2$)
- б) $L_2 = 2L_1$ ($\alpha = 1, \beta = 2$)

Выше было показано, что в случае а) $X \neq 0$ и тем самым другим путем получен вывод о неустойчивости плоских (обратных) круговых орбит при $\alpha = \beta = 1/2$.

В случае б) описанная процедура не позволяет с точностью приближения Хилла доказать неравенство $X \neq 0$. Это также согласуется с тем, что при $\alpha = 1$, $\beta = 2$ никакой неустойчивости в хилловском приближении выявлено не было. Однако это не исключает выявления неустойчивости при учете следующего приближения по a_1 / a_2 . Этот случай требует более детального анализа.

2°. При полном (нелинейном) анализе проблемы устойчивости круговых плоских (обратных) орбит следует еще в области $\beta_1 \beta_2 - \gamma^2 < 0$ выявить поверхности, на которых возникают резонансные соотношения (третьего и четвертого порядка) между корнями характеристического уравнения (3.1) и исследовать систему на устойчивость с учётом членов третьего и четвертого порядка по p_j, q_j в гамильтониане \bar{H}' .

Рассматриваемая система имеет всего две степени свободы, поэтому вне указанных резонансных поверхностей, вообще говоря, имеет место строгая (нелинейная) устойчивость по эксцентриситетам и наклонению [2].

4. Сравнение с результатами численного интегрирования. Выводы приближенного анализа осредненной системы были проверены методом численного интегрирования в следующей постановке.

В невращающейся декартовой системе координат с началом в m_0 рассматривались строгие уравнения движения трёх точек, гравитирующих по закону всемирного тяготения.

Использовались безразмерные величины длины, массы и времени, определенные так, чтобы гравитационная постоянная была равна единице.

При этом были выбраны следующие значения для масс планет и начальных значений элементов орбит:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} m_0 = m_1 = 1, \quad m_2 = 1/9 \\ a_1 = 1, \quad e_1 = 0.08, \quad i_1 = 175.4^\circ, \quad \omega = g_1 = 26.6^\circ, \quad \theta_1 = 180^\circ, \quad \vartheta_1 = 0 \\ a_2 = 5.3, \quad e_2 = 0, \quad i_2 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \vartheta_2 = 0 \end{aligned}$$

Здесь ϑ_i — истинная аномалия, индекс 1 относится к орбите m_1 относительно m_0 , а индекс 2 — к орбите m_2 относительно барицентра m_0 и m_1 . Декартовы координаты и компоненты скорости m_1 и m_2 относительно m_0 в момент времени $t = 0$ вычислялись по данным (4.1) с помощью известных формул задачи двух тел.

Начальные данные подобраны так, что они соответствуют наиболее интересному случаю $\alpha \approx \beta \approx 1/2$. Эти условия неоднозначно определяют массы точек и полуоси орбит. Оставшийся произвол был использован компромиссным образом для получения достаточно малого a_1/a_2 (приближение Хилла) при не очень малом v_1 (1.2). Слишком малое v_1 привело бы к увеличению времени, за которое проявляются существенные эффекты эволюции.

При $\alpha = \beta = 1/2$ из первого соотношения (2.2) следует зависимость эксцентриситета орбиты от взаимной наклонности орбит I

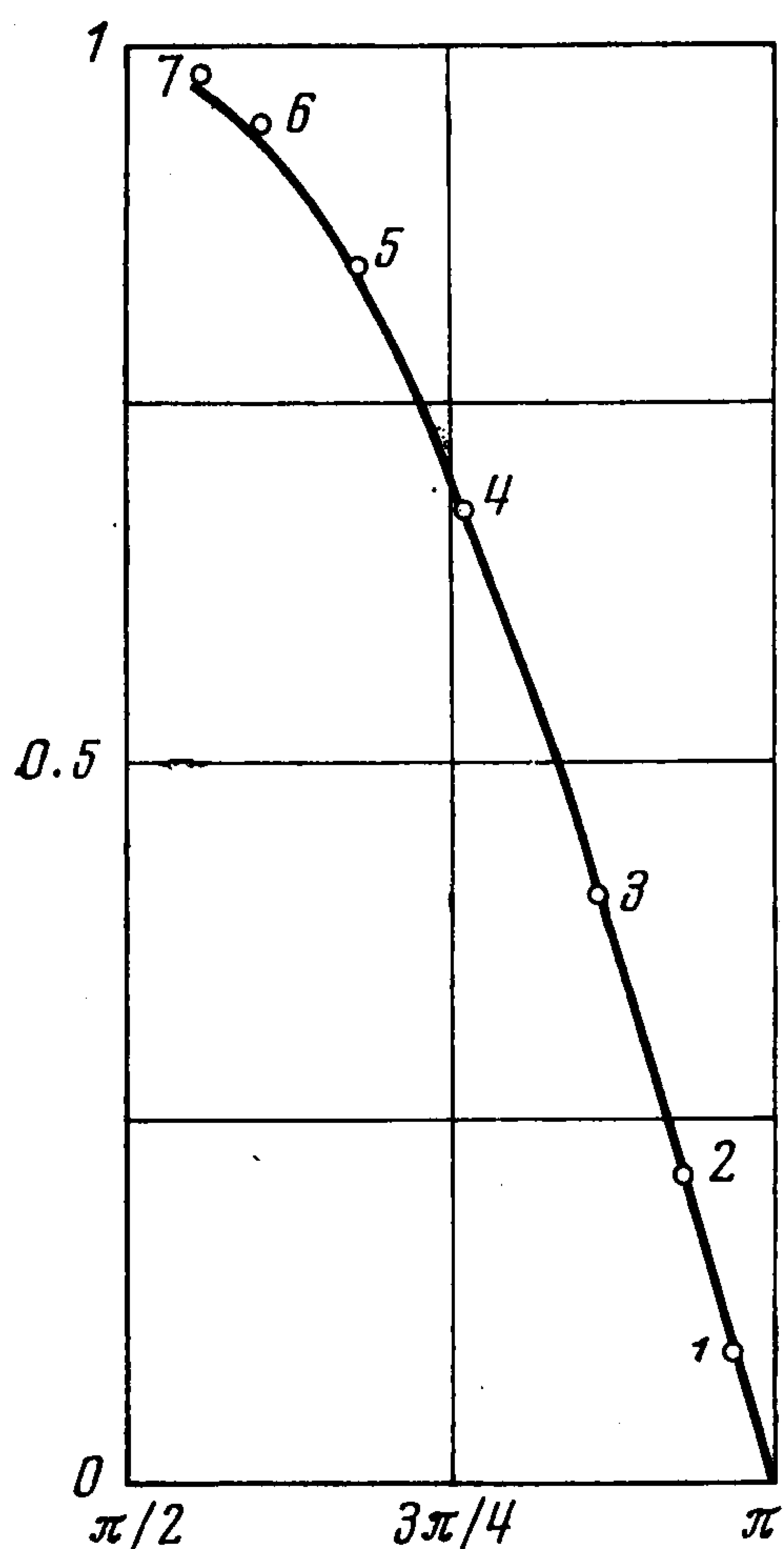
$$(4.2) \quad e_1 = \sin I$$

Начальные значения e_1 и I удовлетворяют этой зависимости. С целью проверки выявленной неустойчивости круговых плоских орбит необходимо выбрать e_1 (и $\sin I$) более близкими к нулю. Однако можно показать, что при малых начальных e_1 эволюция протекает чрезвычайно медленно. Двукратное увеличение эксцентриситета происходит на интервале времени порядка $1/e_1^2$ (так же зависит и рабочее время ЭВМ). В этом смысле $e_1 = 0.08$ тоже выбрано из компромиссных соображений.

На фиг. 4 дан график зависимости (4.2) и точками указаны оскулирующие значения e_1, I , вычисленные методом численного интегрирования. Время, соответствующее точкам 1—7, дается ниже

N	1	2	3	4	5	6	7
$t \cdot 10^{-6}$	0	1	1.1	1.128	1.136	1.14	1.1 424

Численное интегрирование подтверждает результаты данного анализа не только качественно, но и количественно с достаточной степенью точности.



Фиг. 4

Некоторое отличие расчетных точек от теоретической кривой при $e_1 \approx 0.96$, $I \approx 107.6^\circ$ может быть объяснено отличием оскулирующих элементов от средних.

5. Исторические замечания. Осредненная задача трёх тел в приближении Хилла рассматривалась в работе [3]. Анализировался случай $\beta \gg 1$, что фактически эквивалентно ограниченной задаче трех тел. Было показано, что задача интегрируема. Качественное исследование проведено лишь для случая малых эксцентриситетов и наклонений, когда параметры α , β принадлежат области IV и фазовая картина на плоскости (ϵ, ω) имеет простейший тип (фиг. 2, e).

Полное исследование ограниченной задачи было выполнено в работах [4, 5]. В частности, были обнаружены качественно новые типы движений, соответствующие области II' на плоскости (α, β) ; выявлен эффект падения на центральное тело орбит с начальным наклонением 90° (это — частный случай условия $\alpha = \beta$ при $m_1 \rightarrow 0$); определено критическое наклонение $\cos^2 I = 3/5$.

Неограниченная задача в приближении Хилла рассматривалась в работах [6-10]. Было показано, что неограниченная задача интегрируема [6] и про-

ведено ее качественное исследование при достаточно больших β [6-10]. При этом не были обнаружены случаи, когда (α, β) принадлежат областям I, II, III на фиг. 1, где проявляются существенно новые эффекты, обусловленные неограниченностью задачи.

Формулы для критических наклонений $I^{1,2,3}$ другим методом были получены в [11].

Устойчивость прямых движений при малых наклонениях и эксцентриситетах известна из анализа вековых возмущений Лагранжа (см., например, [1]).

Поступила 13 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарлье К. Л. Небесная механика. М., «Наука», 1966.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974.
3. Brown E. W. The stellar problem of three bodies. Month. Not., 1936, 1937, vol. 97, p. 56, 62, 116, 338.
4. Лидов М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 8. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Lidov M. L. On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. Dynamics of satellites. Sympos., Paris, 1962, Berlin, Springer-Verlag, 1963.
6. Harrington R. S. Dynamical evolution of tripple stars. Astron. J., 1968, vol. 73, No. 3, p. 190.
7. Соловая Н. А. Приложение метода Цейцеля к звездной задаче трех тел. Тр. Гос. астрон. ин-та им. Штернберга, 1972, т. 43, вып. 2.
8. Орлов А. А., Соловая Н. А. О вычислении промежуточных движений в тройных звездных системах. Тр. Гос. астрон. ин-та им. Штернберга, 1974, т. 45.
9. Соловая Н. А. Частные случаи промежуточных движений в звездной задаче трех тел. Тр. Гос. астрон. ин-та им. Штернберга, 1974, т. 45.
10. Соловая Н. А. О стационарных промежуточных движениях в звездной задаче трех тел. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1975, № 2.
11. Krasinsky G. A. Stationary solutions of the averaged three body problem and some problems of planet motion stability. The stability of the Solar system and of small stellar systems, ed. Y. Kozai, p. 95. Reidel Publ. Comp., 1974.