

**О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА — ЧАПЛЫГИНА**

В. В. Козлов

(Москва)

Исследуются качественные свойства типичных вращений тяжелого твердого тела в случае Горячева — Чаплыгина, когда первые интегралы уравнений движения независимы. Найдены числа вращения касательных векторных полей на двумерных инвариантных торах. Показано, что нутация твердого тела — квазипериодическое движение, а собственное вращение и прецессия обладают главным движением. Если число вращения иррационально, то в случае быстрых вращений твердого тела главное движение линии узлов равно нулю.

В случае Горячева — Чаплыгина задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 4C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Кроме того, начальные условия выбираются так, чтобы постоянная интеграла площадей была равна нулю. Тогда существует дополнительный частный интеграл, наличие которого позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам [1].

Качественное исследование движения волчка Горячева — Чаплыгина начато Л. Н. Сретенским в работе [2], где в уравнения движения введен малый параметр, соответствующий быстрым вращениям тела, и дана картина движения в первом приближении по этому параметру. Эти исследования были продолжены в [3]. Работа [4] посвящена анализу изменения специальных переменных, введенных Чаплыгиным для интегрирования уравнений движения. Качественная картина вращения тела в некоторых вырожденных случаях исследована в работе [5].

Ниже рассматриваются некоторые математические задачи, возникающие в связи с анализом движения тела в случае Горячева — Чаплыгина. При этом не делается никаких упрощающих предположений.

1. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Горячева — Чаплыгина. Переменные Эйлера — Пуассона $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для симметрии формул будем всюду обозначать соответственно через x_1, x_2, \dots, x_6 . Уравнения Эйлера — Пуассона в случае Горячева — Чаплыгина имеют четыре независимых интеграла [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} I_1 &= 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - 2\mu x_4, & I_2 &= x_3(x_1^2 + x_2^2) + \mu x_1 x_6 \\ I_3 &= 4(x_1 x_4 + x_2 x_5) + x_3 x_6 & (I_3 = 0), & I_4 &= x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \\ & & (I_4 = 1) & \end{aligned}$$

В этих формулах $\mu = Pr/C$, где P — вес тела, r — расстояние от центра масс до точки подвеса, C — момент инерции относительно оси динамической симметрии.

Обозначим через $E(I_1, I_2)$ совместные уровни четырех интегралов (1.1) в шестимерном фазовом пространстве уравнений Эйлера — Пуассона.

Всюду ниже рассматриваются только такие постоянные интегралов I_1 и I_2 , при которых функции (1.1) независимы на $E(I_1, I_2)$. В частности, исключается случай, когда $I_1 = 0$. Остальные постоянные образуют множество нулевой меры. Если интегралы (1.1) независимы, то E — гладкое двумерное многообразие. На E естественным образом возникает классическая динамическая система [6]. Эти системы могут быть исследованы методами заметки [7].

Каждая связная компонента E — двумерный тор [7]. Естественно поставить вопрос о количестве связных компонент E . Частичный ответ на этот вопрос дает

Лемма 1. Если μ мало, то E — объединение двух торов.

Доказательство. Пусть сначала $\mu = 0$. Тогда совместные уровни функций I_1 и I_2 в трехмерном пространстве $R^3 \{x_1 x_2 x_3\}$ — две окружности S_i^1 ($i = 1, 2$), лежащие в разных плоскостях $x_3 = \text{const}$. Каждой точке $\{x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ\}$ на S_i^1 ($i = 1, 2$) соответствует окружность, высекаемая на сфере Пуассона $\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1\}$ интегралом площадей

$$4(x_1^\circ x_4 + x_2^\circ x_5) + x_3^\circ x_6 = 0$$

Так как положение этой окружности непрерывно зависит от точки $\{x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ\}$, то при $\mu = 0$ многообразие E состоит из двух связных компонент. Если $\mu \neq 0$, но мало, то по теореме Морса [8] совместные уровни будут диффеоморфны уровню при $\mu = 0$ и, следовательно, иметь столько же компонент связности.

Замечание. Будем увеличивать μ . Тогда, по той же теореме Морса, количество связных компонент может измениться только тогда, когда интегралы (1.1) станут зависимыми.

На каждом двумерном инвариантном торе T^2 можно выбрать угловые переменные $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$, в которых уравнения движения имеют вид

$$(1.2) \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2$$

где ω_i ($i = 1, 2$) — постоянные, зависящие от I_1 и I_2 . Уравнения (1.2) задают на T^2 условно-периодическое движение с двумя частотами ω_1 и ω_2 . Для их вычисления введем переменные s_1, s_2 согласно формулам

$$x_3 = s_1 + s_2, \quad 4(x_1^2 + x_2^2) = -s_1 s_2$$

Отметим, что переменные $s_1, -s_2$ были введены Чаплыгиным для интегрирования уравнений движения [1]. Переменные Эйлера — Пуассона можно выразить через s_1, s_2 , воспользовавшись интегралами (1.1). В новых переменных уравнения движения приобретут следующий вид (ср. с [1], гл. VIII):

$$(1.3) \quad s_1 \dot{=} \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad s_2 \dot{=} \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}$$

$$(\Phi(z) = 4\mu^2 z^2 - (z^3 - I_1 z - 4I_2)^2)$$

Уравнения (1.3) по форме совпадают с уравнениями в случае Ковалевской [7]. Следовательно, к этим уравнениям можно применить результаты заметки [7].

Переменные s_1 и s_2 изменяются в интервалах $[a_1 b_1]$ и $[a_2 b_2]$, где многочлен $\Phi(z) \geq 0$. Если $I_2 \neq 0$, то пересечение $[a_1 b_1] \cap [a_2 b_2]$ пусто. В противном случае переменные s_1 и s_2 могут совпадать, а так как $s_1 s_2 \leq 0$, то

при некоторых начальных данных на T^2 имеет место равенство $s_1 = s_2 = 0$. Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $I_2 = 0$. Качественное исследование изменения переменных s_1 и s_2 подробно изложено в [4,7].

Числа a_i, b_i ($i = 1, 2$) — простые корни многочлена $\Phi(z)$, так как в противном случае на соответствующем инвариантном торе существовали бы асимптотические движения. Но этого не может быть в силу предположения о независимости интегралов (1.1).

Введем угловые переменные $\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$(1.4) \quad \psi_i = \frac{\pi}{\tau_i} \int_{a_i}^{s_i} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \quad \tau_i = \int_{a_i}^{b_i} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \quad s_i \in [a_i b_i] \quad (i = 1, 2)$$

В новых переменных уравнения (1.3) запишутся следующим образом:

$$(1.5) \quad \dot{\psi}_i = \frac{\pi}{2\tau_i [s_1(\psi_1) - s_2(\psi_2)]} \quad (i = 1, 2)$$

где $s_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π , определяемые из соотношений (1.4). Уравнения (1.5) обратной заменой переменных $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ приводятся к виду [7] (п. 3)

$$(1.6) \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\pi}{2\tau_i \Lambda} \quad (i = 1, 2)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} s_1(x) dx - \int_0^{2\pi} s_2(x) dx \right) \quad (\Lambda \neq 0)$$

Эти уравнения определяют на $T^2 \{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ условно-периодическое движение. Отношение частот (число вращения) равно $\gamma = \tau_1/\tau_2$. Число вращения γ зависит, конечно, от I_1 и I_2 . Эта функция непостоянна, по крайней мере при малых значениях параметра μ .

2. Задача о собственном вращении. Будем исследовать движение тела в углах Эйлера ϑ, φ, ψ . Очевидно, что x_1, x_2, \dots, x_6 — условно-периодические функции времени. Так как $\cos \vartheta = x_6$ и $0 \leq \vartheta \leq \pi$, то функция $\vartheta(t)$ тоже условно-периодична.

Лемма 2. Если в начальный момент времени $I_1 \mu^2 < 4I_2^2$, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что при всех t

$$(2.1) \quad |x_6(t)| < 1 - \varepsilon$$

Доказательство. Пусть $|x_6| = 1$. Тогда $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Из интегралов (1.1) вытекают равенства $x_1^2 + x_2^2 = I_1/4$, $|x_1| = |I_2/\mu|$ ($\mu \neq 0$). Отсюда $x_2^2 = I_1/4 - I_2^2/\mu^2$. Следовательно, если в некоторый момент времени на E выполнено равенство $|x_6| = 1$, то $I_1 \mu^2 \geq 4I_2^2$. Так как множество E компактно, то в условиях леммы при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство (2.1).

Замечание. Если $I_1 \mu^2 \geq 4I_2^2$, то при некоторых начальных данных, удовлетворяющих этому неравенству, ось динамической симметрии занимает вертикальное положение.

Используем следующую терминологию из небесной механики [9,10]. Величина $\xi(t)$ обладает средним движением $\lambda = \text{const}$, если для всех t

$$\xi(t) = \lambda t + O(1)$$

Величина $\xi(t)$ обладает главным движением λ , если $\xi(t) = \lambda t + o(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t) - \lambda t}{t} = 0$$

Утверждение 1. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда собственное вращение обладает средним движением.

Доказательство. Так как $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$ для всех t , то

$$e^{i\varphi} = \frac{x_5 + ix_4}{\sqrt{1 - x_6^2}}$$

есть двухчастотная условно-периодическая функция времени. По теореме Боля об аргументе [11]

$$\varphi = (m\omega_1 + n\omega_2)t + f(t)$$

где m, n — целые числа, а f условно-периодична по t . Следовательно, $\varphi = \lambda t + O(1)$.

Если в некоторый момент времени $t = t'$ выполняется равенство $x_6^2 = 1$, то формально угол φ не определен. В этом случае можно поступить следующим образом. Известно, что

$$\varphi' = x_3 - x_6 \frac{x_1x_4 + x_2x_5}{1 - x_6^2} = \frac{x_3(4 - 3x_6^2)}{4(1 - x_6^2)}$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t \rightarrow t'} \varphi' = \frac{I_2}{2I_1}, \quad \lim_{t \rightarrow t'-0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t'+0} \varphi(t) = \varphi'$$

В силу последнего равенства естественно положить $\varphi(t') = \varphi'$. Тогда функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Эти рассуждения указывают на целесообразность изучения собственного вращения даже в том случае, когда ось симметрии может занимать вертикальные положения.

Теорема 1. Пусть $I_1 \neq 0$, $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$. Если при заданных постоянных интегралов I_1, I_2 частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то собственное вращение обладает средним движением. Если ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то собственное вращение обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2 .

Доказательство. В силу утверждения 1 достаточно рассмотреть случай, когда $I_1\mu^2 > 4I_2^2$. Если отношение ω_1/ω_2 рационально, то φ' — непрерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6^2 = 1$, функция φ' полагается равной $I_2/2I_1$). Следовательно, в этом случае $\varphi = \lambda t + O(1)$.

Пусть теперь отношение ω_1/ω_2 иррационально. Рассмотрим на $T^2 \{ \varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi \}$ окружность $S^1 = \{ (\varphi_1, \varphi_2) \in T^2 : \varphi_1 = \varphi_1^0 \}$. Переменная $\varphi_2 \bmod 2\pi$ является угловой переменной на S^1 . Определим на прямом произведении $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$ функцию

$$F(\varphi_2, t) = \int_0^t \Phi(\omega_1\tau + \varphi_1^0, \omega_2\tau + \varphi_2) d\tau, \quad \varphi_2 \in S^1, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$$

Здесь $\dot{\varphi} = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$. Ясно, что $f(\varphi_2) = F(\varphi_2, 2\pi/\omega_1)$ — изменение угла φ за время, когда точка на T^2 , двигаясь по иррациональной обмотке из точки $(\varphi_1^0, \varphi_2) \in S^1$, снова вернется на S^1 .

Докажем, что $f(\varphi_2)$ интегрируема по Риману.

Если $f(\varphi_2)$ имеет разрыв в точке $\varphi_2 = \varphi_2'$, то траектория $(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2')$, $0 \leq t \leq 2\pi/\omega_1$ проходит через точки на T^2 , где $x_6^2 = 1$. Таких точек четыре, поэтому $f(\varphi_2)$ может иметь только конечное число точек разрыва. Следовательно, достаточно доказать ограниченность этой функции.

Докажем, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена на $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$.

Рассмотрим поведение угла φ , когда точка $m(t) = (\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2)$ находится вблизи точек a_1, \dots, a_4 , где $x_6^2 = 1$. Так как $I_1 \mu^2 \neq 4I_2^2$, то якобиан

$$\frac{\partial (I_1 I_2 I_3 I_4)}{\partial (x_1 x_2 x_3 x_6)}$$

отличен от нуля в точках $a_1, \dots, a_4 \in T^2$.

Следовательно, в малых окрестностях этих точек можно принять переменные x_4 и x_5 за локальные координаты на T^2 , и переменные x_1, x_2, x_3 и x_6 — однозначные аналитические функции от x_4 и x_5 .

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$(2.2) \quad \dot{x}_4 = x_3 x_5 - x_2 x_6, \quad \dot{x}_5 = x_1 x_6 - x_3 x_4$$

где вместо x_1, x_2, x_3 и x_6 подставлены их выражения через x_4 и x_5 . Так как $I_1 \neq 0$, то уравнения (2.2), не имеют особых точек вблизи a_i ($i = 1, \dots, 4$).

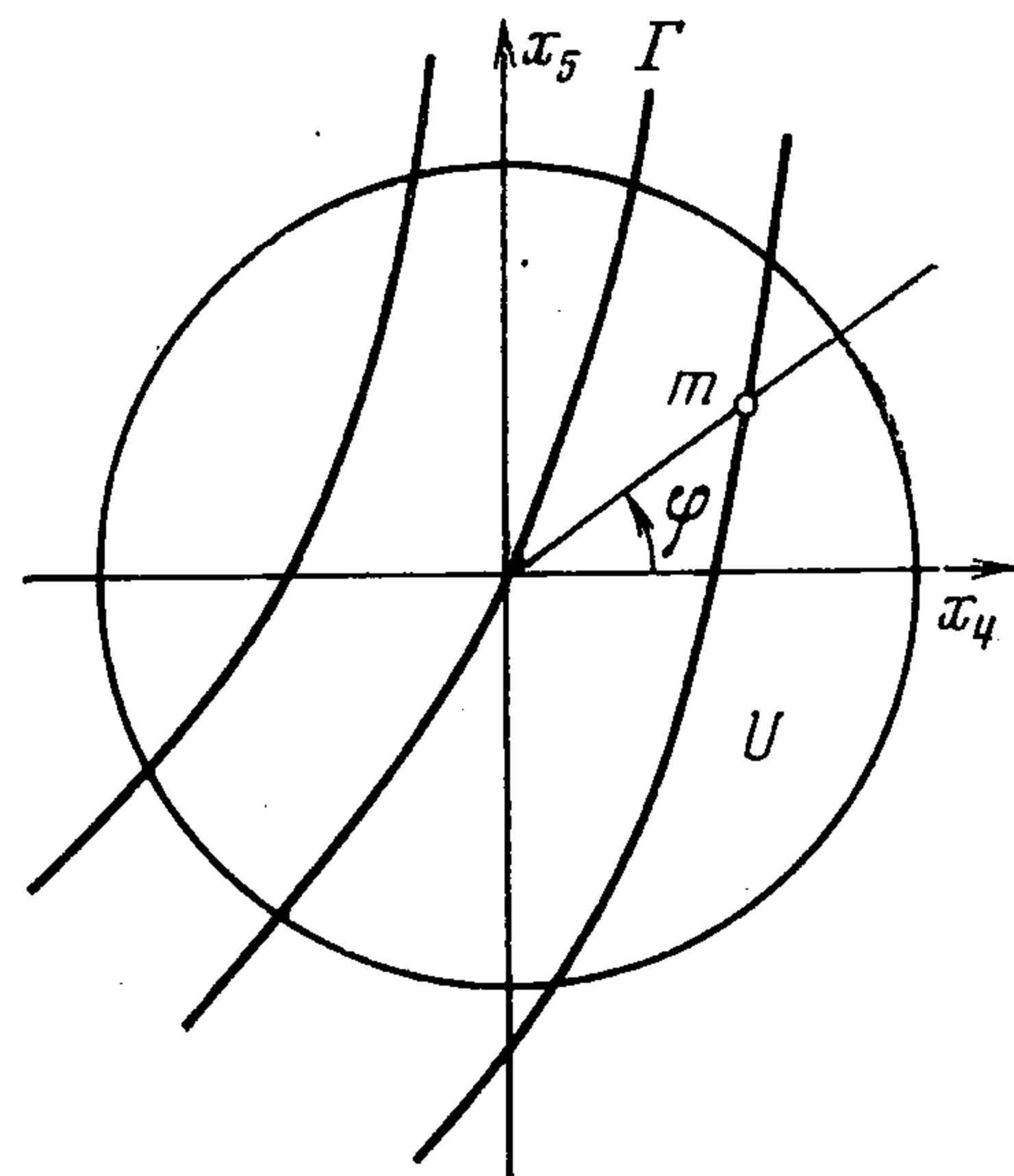
Существуют достаточно малые окрестности U_i точек a_i , такие, что, когда $m(t) \in U_i$, то колебание функции $F(\varphi_2, t)$ не превосходит 2π .

Действительно, когда m движется по траекториям уравнений (2.2), то $F(\varphi_2, t)$ совпадает с углом φ , изображенным на фигуре. Траектория Γ , проходящая через точку $x_4 = x_5 = 0$, делит $U_i = U$ на две части, в каждой из которых изменение φ непрерывно, а при переходе через Γ функция φ испытывает скачок на π . Но во всех случаях колебание φ ограничено заведомо числом 2π , так как в малой окрестности U траектории уравнений (2.2) почти прямые.

В дополнение к U_i ($i = 1, \dots, 4$) функция $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$, следовательно, функция $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ ограничена, а вместе с ней ограничено колебание функции $F(\varphi_2, t)$. Объединяя доказанное, заключаем, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена в $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$.

За время $t = n2\pi/\omega_1$ угол φ станет равным

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k2\pi\omega_2/\omega_1 + \varphi_2) = \sigma_n$$



Так как ω_2/ω_1 иррационально, то по теореме Вейля о равномерном распределении [12] существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lambda$$

Из ограниченности функции $F(\varphi_2, t)$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{2\pi\lambda}{\omega_1} = \Lambda$$

По той же теореме Вейля число Λ зависит только от I_1, I_2 . Теорема доказана.

Идея доказательства этой теоремы восходит к исследованиям Вейля о среднем движении перигелиев планет [10].

3. Задача о движении линии узлов. Угол прецессии ψ определяется из следующего соотношения:

$$\psi' = \frac{x_1 x_4 + x_2 x_5}{1 - x_6^2} = - \frac{x_3 x_6}{4(1 - x_6^2)}$$

Если выполнены условия леммы 1, то $\psi' = \Psi$ — аналитическая функция от равномерно изменяющихся переменных φ_1 и φ_2 . В других случаях Ψ имеет особенность в точках на T^2 , где $x_6^2 = 1$. Пусть $x_6^2 = 1$ при $t = t'$. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталю, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t \rightarrow t'} \Psi(t) = \mp \frac{I_2}{2I_1} \quad (x_6(t) \rightarrow \pm 1)$$

Теорема 2. Пусть $I_1 \neq 0, I_1 \mu^2 \neq 4I_2^2$. Если частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то линия узлов обладает средним движением. Если же ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то линия узлов обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2 .

Доказательство. Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то ψ' — непрерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6 = \pm 1$, она полагается равной $\mp I_2/2I_1$). Следовательно, $\psi = \lambda t + O(1)$.

Рассмотрим случай, когда отношение ω_1/ω_2 иррационально. Если $I_1 \mu^2 < 4I_2^2$, то $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ непрерывна на T^2 и заключение теоремы вытекает из теоремы об усреднении [6]. Если же $I_1 \mu^2 > 4I_2^2$, то как при доказательстве теоремы 1, введем функцию

$$F(\varphi_2, t) = \int_0^t \Psi(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2) dt, \quad \varphi_2 \in S^1, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$$

Для доказательства ее ограниченности снова рассмотрим окрестности U_i точек a_i ($i = 1 \dots 4$). В областях U_i , где x_6 близко к 1, запишем тождество

$$\psi' = 2\varphi' + f, \quad f = - \frac{x_3(1 - 6x_6)}{4(1 + x_6)}$$

Когда $m(t) \in U_i$, то интеграл по времени от f ограничен (так как f непрерывна в U_i) вместе с интегралом от $2\varphi'$. Аналогично рассматривается движение в других окрестностях, где x_6 близко к -1 . Вне U_i ($i = 1 \dots$

... 4) функция Ψ ограничена, следовательно, ограничено колебание F . Объединяя сказанное, получим, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена на $S^1\{\varphi_2 \bmod 2\pi\} \times [0, 2\pi/\omega_1]$. Для завершения доказательства осталось применить теорему Вейля о равномерном распределении.

Утверждение 2. Если $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$, то функция $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ интегрируема по Лебегу на $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$.

Доказательство. Если $I_1\mu^2 < 4I_2^2$, то Ψ непрерывна на T^2 и утверждение очевидно. В случае, когда $I_1\mu^2 > 4I_2^2$, функция Ψ непрерывна всюду, кроме точек a_1, \dots, a_4 , где $x_6^2 = 1$. Поэтому достаточно доказать интегрируемость Ψ в малых окрестностях U_i точек a_i ($i = 1, \dots, 4$). Так как $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$, то за локальные координаты в U_i можно взять переменные x_4 и x_5 . Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)}$$

аналитичен по x_4, x_5 . По формуле замены переменных

$$\iint_{U_i} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \iint_{U_i} \Psi(x_4, x_5) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)} dx_4 dx_5$$

Воспользуемся равенством

$$\Psi = -\frac{x_3 x_6}{4(x_4^2 + x_5^2)}$$

Функции x_3 и x_6 аналитичны по x_4 и x_5 в U_i , причем $x_3 = 0$, когда $x_4 = x_5 = 0$. Следовательно, подынтегральная функция в переменных x_4, x_5 имеет вид

$$F = f(x_4, x_5) / (x_4^2 + x_5^2)$$

где f — аналитическая функция в U_i и $f(0, 0) = 0$. В полярных координатах (r, φ) : $x_4 = r \cos \varphi, x_5 = r \sin \varphi$

$$\iint_{U_i} F dx_4 dx_5 = \iint_{U_i} \frac{f}{r} dr d\varphi$$

Так как f/r непрерывна и ограничена в проколотой окрестности точки a_i , то F интегрируема по Лебегу в области U_i ($i = 1, \dots, 4$). Утверждение доказано.

Теорема 3. При малых μ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = 0$$

Для доказательства этой теоремы потребуется

Лемма 3. Пусть сужение функции $f(x_1 \dots x_6)$ на инвариантный тор T^2 интегрируемо по Лебегу. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{f}{V_4} d\sigma$$

где V_4 — четырехмерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\text{grad } I_i$ ($i = 1, \dots, 4$) как на сторонах, а $d\sigma$ — элемент площади на T^2 как поверхности в $R^6\{x_1 \dots x_6\}$.

Доказательство. В некоторой окрестности инвариантного тора $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ в R^6 можно сделать обратимую замену переменных

$$x_i = x_i(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2) \quad (i = 1, \dots, 6)$$

В новых переменных (I, φ) уравнения движения имеют вид (когда $I_3 = 0$)

$$I_i' = 0, \varphi_j' = \Phi_j(I_1, \dots, I_4); \quad i = 1, \dots, 4; j = 1, 2$$

Эти уравнения имеют интегральный инвариант с плотностью

$$\rho = M \frac{\partial(x_1, \dots, x_6)}{\partial(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)}$$

где M — плотность интегрального инварианта в переменных x_1, \dots, x_6 . Так как $M \equiv 1$, а $\rho = 1$, когда $I_3 = 0$, то в этом случае

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_6)}{\partial(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)} = 1$$

Рассмотрим векторы

$$\xi_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial I_i}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial I_i} \right) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$\eta_j = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_j}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial \varphi_j} \right) \quad (j = 1, 2)$$

Очевидно, что

$$(\text{grad } I_i, \xi_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 4)$$

$$(\text{grad } I_i, \eta_k) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4; k = 1, 2)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Представим векторы ξ_i в виде $\xi_i' + \xi_i''$, где ξ_i' ортогональны η_1, η_2 , а ξ_i'' разлагаются по η_1 и η_2 . Тогда

$$(3.1) \quad V_6(\xi_1 \dots \xi_4 \eta_1 \eta_2) = \left| \frac{\partial(x_1 \dots x_6)}{\partial(I_1 \dots I_4, \varphi_1, \varphi_2)} \right| = V_4(\xi_i') V_2(\eta_j) = 1$$

Здесь через $V_n(a_1, \dots, a_n)$ обозначен n -мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах a_1, \dots, a_n как на сторонах. Так как снова

$$(\text{grad } I_i, \xi_j') = \delta_{ij}$$

то

$$V_4(\text{grad } I_i) V_4(\xi_j') = 1$$

Учитывая (3.1), получим, что

$$V_4(\text{grad } I_i) = V_2(\eta_j)$$

Следовательно

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi_1 d\varphi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f V_2(\eta_1, \eta_2)}{V_4(\text{grad } I_i)} d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{f}{V_4} d\sigma$$

так как по определению элемента площади $d\sigma = V_2(\eta_1, \eta_2) d\varphi_1 d\varphi_2$. Лемма доказана

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим преобразование $\pi: R^6 \rightarrow R^6$, определенное формулой $y = \pi(x)$, где $x = (x_1 \dots x_6)$, а $y = (-x_1 - x_2 x_3 x_4 x_5 - x_6)$. Отображение π — линейное ортогональное преобразование — произведение трех зеркальных отражений относительно координатных гиперплоскостей. При малых μ каждый из двух инвариантных торов, составляющих совместный уровень интегралов, переходит в себя (см. доказательство леммы 1). Так как $\pi: T^2 \rightarrow T^2$ сохраняет площадь, то якобиан этого преобразования равен единице и, следовательно

$$(3.2) \quad \oint_{T^2} \frac{\Psi(\pi(x))}{V_4(\pi(x))} d\sigma = \oint_{T^2} \frac{\Psi(x)}{V_4(x)} d\sigma$$

По формуле Грамма

$$V_4(\text{grad } I_k) = \sqrt{\det(\text{grad } I_i, \text{grad } I_j)} \quad (i, j, k = 1, \dots, 4)$$

Используя это соотношение, можно показать, что $V_4(\pi(x)) = V_4(x)$. Так как $\Psi(\pi(x)) = -\Psi(x)$, то из (3.2) следует равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{\Psi}{V_4} d\sigma = 0$$

Теорема доказана.

Следствие. Если μ мало и отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, то главное движение линии узлов равно нулю.

Действительно, по теореме о равномерном распределении [6,12]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{t} = \lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = 0$$

Автор благодарит В. В. Румянцеву и Ю. А. Архангельского за внимание к работе.

Поступила 17 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. Сретенский Л. Н. Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 1.
3. Архангельский Ю. А. Движение быстрого гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 7.
4. Докшевич А. И. Качественное исследование решения Горячева — Чаплыгина. В сб.: Механика твердого тела, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1972.
5. Горр Г. В. Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева — Чаплыгина. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
6. Arnold V. I., Avez A. Ergodic problems of classical mechanics. N. Y., W. A. Benjamin, 1968.
7. Козлов В. В. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Ковалевской. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
8. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М., «Наука», 1971.
9. Шарлье К. Небесная механика. М., «Наука», 1966.
10. Weyl H. Mean motion. I. Amer. J. Math., 1938, vol. 60, No. 4.
11. Бор Г. Почти периодические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
12. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.