Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50 : 531.1

К УПРАВЛЕНИЮ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Д. В. Лебедев

(Киев)

Доказывается возможность управления вращательным движением твердого тела в условиях неполной информированности о текущем фазовом состоянии системы, когда в каждый момент времени измерению доступна лишь проекция вектора угловой скорости на ось чувствительности одного датчика угловой скорости, жестко закрепленного на объекте. Рассматриваются две задачи управления: сообщение твердому телу режима стационарного вращения относительно оси с наибольшим моментом инерции, используемого в системах пассивной стабилизации [1–3], и задача торможения вращающегося твердого тела. Анализируются условия устойчивости исследуемых режимов движения.

1. Постановка задачи. Введем систему координат xyz, жестко связанную с твердым телом. Предполагается, что ось чувствительности датчика угловой скорости совпадает с λ-направлением, ориентация которого относительно базиса xyz задается направляющими косинусами α, β, γ и считается известной.

Пренебрегая динамикой датчика, на выходе прибора имеем сигнал

$$\vartheta = p\cdot\omega; \quad p = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}, \quad \omega = \{\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\} \tag{1.1}$$

где p — орт λ-направления, ω — вектор угловой скорости вращения объекта.

Условимся вращательное движение твердого тела описывать динамическими уравнениями Эйлера (символы в скобках означают, что остальные два уравнения получаются круговой перестановкой индексов)

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\ \omega_y\omega_z = M_x \quad (xyz) \tag{1.2}$$

в которых I_x, I_y, I_z — моменты инерции (для определенности будем считать $I_x < I_y < I_z$), M_x, M_y, M_z — управляющие моменты.

Задача 1. Располагая информацией в виде (1.1), сформировать управление $M = \{M_x, M_y, M_z\}$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарного вращения объекта вокруг оси с наибольшим моментом инерции

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \Omega = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

Задача 2. На основании информации (1.1) синтезировать управляющий момент M, обеспечивающий устойчивость невозмущенного движения

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \tag{1.4}$$

2. Об управлении движением при неполной информации о фазовом состоянии системы. Рассмотрим управляемую систему

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} x^{\cdot} = f(x, u) \equiv Ax + F(x) + Bu \\ y = Cx, \quad f(0, 0) = 0 \\ x \in R_n, \quad u \in U \subset R_m, \quad y \in R_s \end{gathered}$$

Здесь A, B, C — постоянные матрицы, $F(x)$ — вектор-функция, разложение которой по степеням величин x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) начинается членами не ниже второго порядка.

Располагая информацией о движении объекта в виде $y = Cx$, требуется выбрать управление u таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$.

Будем предполагать, что для системы первого приближения

$$(2.2)\qquad x^{\cdot} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

пара (A, B) управляема, а (A, C) наблюдаема. Это влечет за собой наблюдаемость нелинейной системы (2.1) в окрестности невозмущенного движения [4] и стабилизируемость ее линейным управлением [5]:

$$(2.3)\qquad u = Kx$$

Реализовать управление в форме (2.3) непосредственно по результатам измерений доступных наблюдению величин можно лишь в случае, когда существует матрица G, такая, что

$$(2.4)\qquad K = GC$$

Если такой матрицы не существует, используем для решения задачи систему оценки состояния, которая дает возможность по неполной информации о состоянии системы оценить все компоненты вектора x и позволяет сформулировать управление не по вектору x, а по его оценке z в соответствии с выражением

$$(2.5)\qquad u = Kz$$

Считая, что ранг матрицы наблюдаемости

$$W = \|C' \, A'C' \ldots (A')^{n-1} \, C'\|$$

равен n, введем в рассмотрение систему оценки состояния вида

$$(2.6)\qquad z^{\cdot} = Az + l(y - Cz) + F(z) + Bu$$

Из уравнений (2.1) и (2.6) следует, что вектор ошибки $e = x - z$ удовлетворяет уравнению

$$(2.7)\qquad e^{\cdot} = (A - lC)\, e + \Psi(x, e), \quad \Psi(x, e) = F(x) - F(z)$$

Отметим, что при совпадении начальных условий фильтра и объекта система (2.6) обеспечивает точное восстановление вектора состояния x.

Исследуем, каким требованиям должны удовлетворять матрицы K и l, чтобы положение равновесия $x = 0$ было асимптотически устойчивым.

Рассмотрим уравнение объекта, систему оценки его состояния и закон управления

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= Ax + F(x) + Bu, \quad y = Cx \\ z^{\cdot} &= Az + l(y - Cz) + F(z) + Bu, \quad u = Kz \end{aligned} \tag{2.8}$$

В системе (2.8) перейдем от переменных x, z к переменным x, e и представим ее в форме

$$\begin{Vmatrix} x^{\cdot} \\ e^{\cdot} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A+K & -K \\ 0 & A-lC \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ e \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} F(x) \\ \Psi(x, e) \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

Из анализа уравнений (2.9) следует, что вопрос об устойчивости тривиального решения $x = e = 0$ сводится к исследованию устойчивости матриц $A + K$ и $A - lC$. Если эти матрицы имеют собственные числа с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение $x = e = 0$ системы (2.9) устойчиво и притом асимптотически [6]. Поскольку при этом вектор ошибки $e \to 0$ при $t \to \infty$, система (2.6) оценки состояния становится асимптотической.

3. Начальное условие системы оценки состояния (2.6). В начальный момент времени ничего не известно о состоянии системы (2.6), поэтому обычно полагают $z(t_0) = 0$ [7]. Однако переходный процесс в системе оценки состояния может привести к неприемлемому качеству управляемого движения объекта. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом.

Пусть при $t < t_0$ объект совершает неуправляемое движение. Для оценки вектора x его фазового состояния введем систему уравнений

$$z^{\cdot} = Az + l(y - Cz), \quad y = Cx, \quad t \in [t_1, t_0], \quad z(t_1) = 0 \tag{3.1}$$

Вектор ошибки $e = x - z$ в рассматриваемом случае подчиняется уравнению

$$e^{\cdot} = (A - lC)\, e + F(x), \quad e(t_1) = x(t_1) \tag{3.2}$$

Система оценки состояния (3.1) не асимптотическая, однако при устойчивой матрице $A - lC$ она позволяет с определенной точностью, зависящей от характера изменения вектор-функции $F(x)$, определить вектор x.

Значение вектора z, полученное к моменту времени $t = t_0$ из решения уравнения (3.1), принимается в качестве начального условия системы оценки состояния (2.6).

4. Сообщение телу стационарного вращения. Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= (I_y - I_z)\, I_x^{-1}, \quad u_1 = M_x I_x^{-1} \qquad (1, 2, 3, xyz) \\ \omega_x &= x_1, \quad \omega_y = x_2, \quad \omega_z = x_3 + \Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

и представим уравнения (1.2) в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= Ax + F(x) + u \\ x &= \{x_1, x_2, x_3\}, \quad u = \{u_1, u_2, u_3\} \\ A &= \begin{Vmatrix} 0 & a_1\Omega & 0 \\ a_2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F(x) = \begin{Vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 \\ a_2 & x_1 & x_3 \\ a_3 & x_1 & x_2 \end{Vmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Выходом системы (4.2) будем считать скаляр

(4.3) $$y = Cx, \quad C = \|\alpha\beta\gamma\|$$

В этих обозначениях решение задачи 1 сводится к обеспечению асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$.

Наблюдая скаляр y, реализовать управление в форме (2.3) невозможно. Поэтому предполагая, что выполняется условие наблюдаемости системы (4.2), (4.3)

(4.4) $$\det W \neq 0, \quad W = \|C' \; A'C' \; (A')^2C'\|$$

сводящееся к требованию

(4.5) $$a_1a_2\Omega^3\gamma\,(a_2\beta^2 - a_1\alpha^2) \neq 0$$

будем управлять вращательным движением твердого тела по алгоритму (2.5), определяя вектор z из уравнения

(4.6) $$z^{\bullet} = Az + l\,(y - Cz) + F\,(z) + u$$

Отметим, что вектор-функции $F\,(z)$ и $\Psi\,(x, e)$ имеют в данном случае следующий вид:

$$F\,(z) = \begin{Vmatrix} a_1 & z_2 & z_3 \\ a_2 & z_1 & z_3 \\ a_3 & z_1 & z_2 \end{Vmatrix}, \quad \Psi\,(x, e) = \begin{Vmatrix} a_1\,(e_2x_3 + e_3x_2 - e_2e_3) \\ a_2\,(e_1x_3 + e_3x_1 - e_1e_3) \\ a_3\,(e_1x_2 + e_2x_1 - e_1e_2) \end{Vmatrix}$$

Выбор элементов матрицы K (для простоты будем считать $K = \operatorname{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$), таких, чтобы матрица $A + K$ была устойчивой, не вызывает затруднений.

Чтобы матрица $A - lC$ имела наперед заданные собственные числа, вектор l в уравнении фильтра (4.6) следует выбирать исходя из равенства

$$l = T^{-1}L, \quad T = \|t_1\, t_2\, t_3\|'$$
$$t_1 = (A')^2C' + \alpha_1A'C' + \alpha_2C'$$
$$t_2 = A'C' + \alpha_1C', \quad t_3 = C'$$

Через α_i обозначены коэффициенты характеристического полинома матрицы A

$$\chi_A\,(s) = s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3$$

Важно отметить, что $\det T = -\det W$, т. е. вектор l может быть вычислен только в том случае, когда система (4.2) наблюдаема.

Пусть $\theta\,(s) = s^3 + \beta_1s^2 + \beta_2s + \beta_3$ — произвольный нормированный многочлен, все корни которого имеют отрицательные вещественные части. Если теперь построить вектор L с компонентами

$$L_{4-i} = \beta_i - \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

то корни характеристического полинома матрицы $A - lC$ совпадают с корнями полинома $\theta\,(s)$ [7].

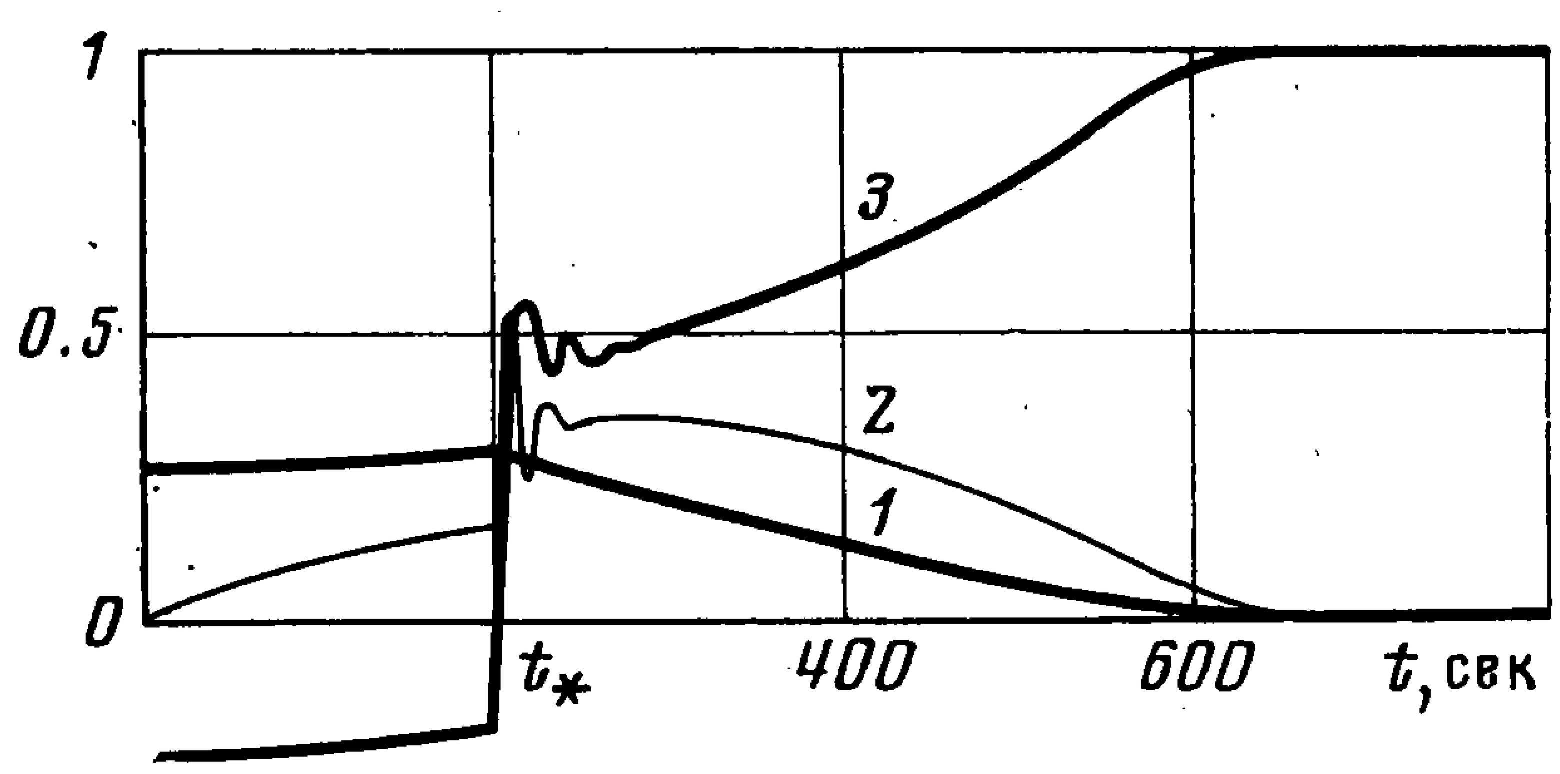
Пусть $A + K$ и $A - lC$ — устойчивые матрицы. Тогда управление

(4.7) $$M_x = I_xk_1z_1 \quad (1\;2\;3,\; xyz)$$

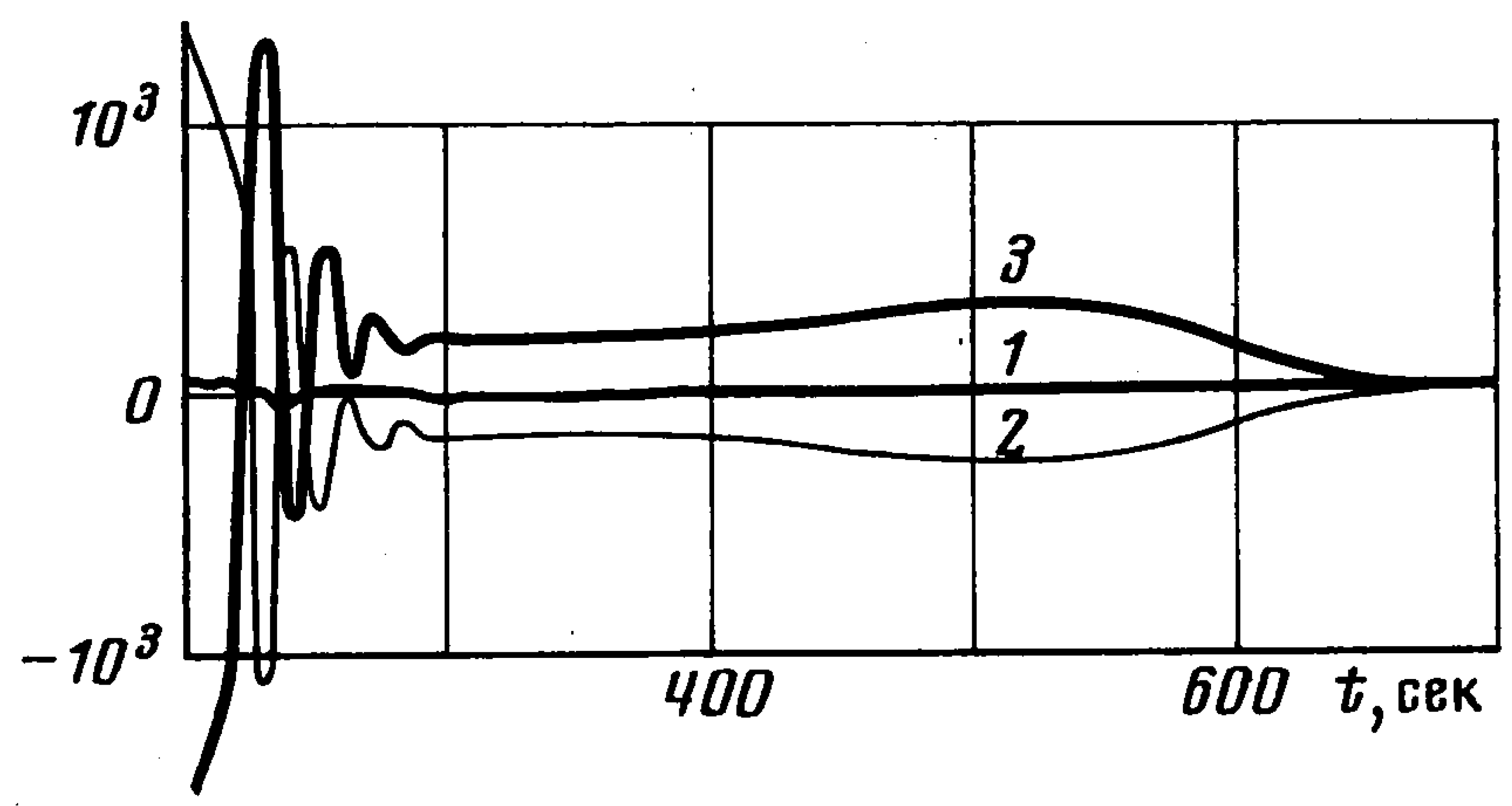
в котором z_i ($i = 1, 2, 3$) определяются из решения уравнения (4.6), обеспечивает асимптотическую устойчивость режима стационарного вращения объекта вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

5. Торможение вращающегося твердого тела. Результаты, полученные при решении задачи 1, распространяются на случай торможении вращающегося твердого тела.

Действительно, задавая точность управления торможением тела, определим допустимую остаточную угловую скорость $\omega_z = \Omega_*$. Тогда уп-



Фиг. 1



Фиг. 2

равление в виде (4.6), (4.7), при формировании которого принимается $\Omega = \Omega_*$, переводя тело в режим стационарного вращения относительно оси z, гарантирует устойчивость невозмущенного движения (1.4).

Отметим, что при решении задачи 2 не принципиально, в режим стационарного вращения относительно какой оси переводится твердое тело.

6. Пример. Рассмотрим процесс приведения твердого тела с параметрами эллипсоида инерции [8]:

$$I_x = 1.25 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 6.9 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_z = 7.1 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

из начального состояния $\omega_x(0) = 0.25$ *град / сек*, $\omega_y(0) = -0.25$ *град / сек*, $\omega_z(0) = 0$ в режим стационарного вращения $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = 1$ *град / сек*. В качестве λ-направления, по которому ориентируется ось чувствительности датчика угловой скорости, примем направление, составляющее с осями xyz равные углы ($\alpha = \beta = \gamma = 1 / \sqrt{3}$).

Характер изменения угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z *град / сек* показан на фиг. 1 (кривые *1*, *2*, *3* соответственно). На интервале времени $[0, t_*]$ тело совершает неуправляемое движение. Управляющие моменты (4.7), в которых $k_1 = k_2 = k_3 = -1$ *сек*$^{-1}$, формируются с момента времени $t = t_*$. Собственные числа матрицы $A - lC$ в системах оценки состояния (3.1), (4.6) принимаются равными $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -0.1$ *сек*$^{-1}$.

Этим значениям соответствует вектор l с компонентами $l_1 = -3.62$ *сек*$^{-1}$, $l_2 = -37.8$ *сек*$^{-1}$, $l_3 = 41.91$ *сек*$^{-1}$. Фиг. 2 иллюстрирует изменение управляющих моментов M_x, M_y, M_z *н·м* в процессе движения (кривые *1*, *2*, *3* соответственно).

Поступила 30 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гродзовский Г. Л.*, *Охоцимский Д. Е.*, *Белецкий В. В. и др.* Механика космического полета. Механика в СССР за 50 лет, т. 1. М., «Наука», 1968.
2. *Thomson W. T.*, *Reiter G. S.* Attitude drift of space vehicles. J. Astronaut. Sci., 1960, vol. 7, No. 2.
3. *Newkirk H. L.*, *Haseltin W. R.*, *Pratt A. V.* Stability of rotating space vehicles. Proc. IRE, 1960, vol. 48, No. 4.
4. *Альбрехт Э. Г.*, *Красовский Н. Н.* О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 7.
5. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн. И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М., «Наука», 1966.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Калман Р.*, *Фалб П.*, *Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971.
8. *Seltzer S. M.*, *Schweitzer G.*, *Asner B. Jr.* Attitude control of a spinning skylab. J. Spacecraft and Rockets, 1973, vol. 10, No. 3.