Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

О КОРРЕКЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ПРОЦЕССА

В. Н. Лагунов

(Калинин)

Предлагается конструктивный способ коррекции процесса, описываемого нелинейным векторным дифференциальным уравнением в нормальной форме. Вектор-помеха и вектор, осуществляющий коррекцию, входят слагаемыми в правую часть уравнения. Для реализации указанного способа необходимо знать максимум абсолютного значения вектор-помехи и фазовый вектор возмущенного помехой процесса для некоторой последовательности моментов времени. Предполагается, что правая часть дифференциального уравнения удовлетворяет условию Липшица по фазовой координате.

1. Оптимальное течение некоторого процесса описывается векторным дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = f(x), \quad t \in [t_0, t'], \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

где вектор x принадлежит конечномерному евклидову пространству. Предполагается, что в рассматриваемой области выполнено условие Липшица

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant L\, |x' - x''|, \quad L \geqslant 0 \tag{1.2}$$

благодаря которому интегральная кривая $x(t)$, $t \in [t_0, t']$, $x(t_0) = x_0$ уравнения (1.1) существует, единственна и является абсолютно-непрерывной вектор-функцией (см. [1]). Указанную кривую в дальнейшем будем называть невозмущенной или оптимальной траекторией.

Оптимальному течению процесса вдоль оптимальной траектории мешает помеха в виде измеримой вектор-функции $u^2(t)$, $t \in [t_0, t']$, входящей дополнительным слагаемым в правую часть уравнения (1.1). Об этой помехе известно, кроме сказанного, лишь то, что она удовлетворяет ограничению

$$|u^2(t)| \leqslant u_0^2, \quad t \in [t_0, t'] \tag{1.3}$$

Для нейтрализации действия указанной помехи в правую часть уравнения (1.1) вводится еще одно слагаемое: кусочно-постоянная вектор-функция $u^1(t)$, $t \in [t_0, t']$. В результате из уравнения (1.1) получается дифференциальное уравнение

$$y^{\cdot} = f(y) + u^1 + u^2, \quad t \in [t_0, t'], \quad y(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

интегральная кривая которого $y(t)$, $t \in [t_0, t']$, $y(t_0) = x_0$ также является абсолютно-непрерывной вектор-функцией, существующей и единственной на рассматриваемом отрезке. Эту кривую в дальнейшем будем называть возмущенной траекторией.

В предположении, что

$$(1.5) \qquad f,\ L,\ x_0,\ t_0,\ t',\ u_0^2$$

известны и, кроме того, что известны точки $x(t_k)$, $y(t_k)$ для некоторой последовательности моментов времени $\{t_k\} \subset [t_0, t']$, требуется указать такой способ построения функции $u^1(t)$, который для любого заданного $\varepsilon > 0$ и любой помехи $u^2(t)$ (обладающей перечисленными свойствами) обеспечивает выполнение следующего неравенства:

$$(1.6) \qquad |x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0, t']$$

Этот способ должен включать в себя и правило для нахождения последовательности $\{t_k\}$, а также учитывать, что в реальных условиях на определение положения точек $x(t_k)$, $y(t_k)$ и на следующий за этим расчет вектор-функции $u^1(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ требуется некоторое время.

Решение задачи создания такого способа, представляющего собой частное проявление экстраполяционного метода [2], дается ниже. Предлагаемый метод отличается, в частности, от методов работ [3—5] (так, в отличие от [4,5] для его реализации не требуется знать вероятностных характеристик помехи).

Отметим, что $\max_k (t_{k+1} - t_k) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ поэтому при достаточно малом ε окажется недостаточно времени для фактического проведения расчетов.

2. Описанная задача допускает более четкую формулировку в виде следующей дифференциальной антагонистической игры качества. Эта игра задается дифференциальным уравнением (1.4), где u^i $(i = 1, 2)$ — управление i-го игрока, удовлетворяющее всем требованиям, изложенным в п. 1; такое управление будем называть допустимым.

Допустимыми стратегиями первого игрока будут кусочно-программные стратегии, ставящие величинам t_k, $x(t_k)$, $y(t_k)$ и (1.5) в соответствие число t_{k+1} и вектор-функцию $u_k^1(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, являющуюся сужением некоторого допустимого управления первого игрока на $[t_k, t_{k+1})$.

Допустимая стратегия второго игрока может быть любой, удовлетворяющей единственному требованию: формируемое с ее помощью управление второго игрока должно быть допустимым (т. е. удовлетворять требованиям, указанным в п. 1).

В частности, можно считать, что игра происходит при наличии дискриминации первого игрока.

Допустимую стратегию i-го игрока обозначим через v^i, а класс его допустимых стратегий — V^i.

Плата в рассматриваемой игре задается следующей формулой:

$$(2.1) \qquad J(v^1, v^2) = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t'} |x(t) - y(t)|$$

где $x(t)$ — невозмущенная траектория, а $y(t)$ — возмущенная траектория, соответствующая управлениям, порожденным стратегиями v^i.

Теперь задача, решаемая в данной работе, может быть сформулирована следующим образом: конструктивно описать такую стратегию $v_0^1 \in V^1$, для которой выполняется следующее соотношение:

$$J(v_0^1, v^2) \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, v^2 \in v^2$$

Из сказанного ясно, что в рассматриваемой игре первый игрок — минимизирующий, а второй — максимизирующий (последнего игрока можно мыслить и как «природу»). Смысл игры состоит в обеспечении первым игроком такого реального течения процесса (описываемого возмущенной траекторией), которое не более чем на ε в смысле критерия (2.1) отличается от оптимального течения процесса (описываемого невозмущенной траекторией).

3. Предполагая выполненным условие

$$u^1(t_k + \tau) = u_*^1 = \text{const}, \quad \tau \geqslant 0$$

в силу (1.2), (1.3) из (1.4) для почти всех τ получаем

$$\frac{d}{d\tau}\rho(t_k, \tau) \leqslant \left|\frac{d}{d\tau}y(t_k+\tau)\right| \leqslant a_1 + L\rho(t_k, \tau)$$

$$\rho(t_k, \tau) = |y(t_k+\tau) - y(t_k)|, \quad \tau \geqslant 0$$

$$a_1 = |f(y(t_k)) + u_*^1| + u_0^2$$

Отсюда следует, что для решения $\rho_1(t_k, \tau)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\rho_1(t_k, \tau) - L\rho_1(t_k, \tau) - a_1 = 0, \quad \rho_1(t_k, 0) = 0, \quad \tau \geqslant 0$$

будет выполняться следующее соотношение (см. [6], стр. 32):

$$\rho(t_k, \tau) \leqslant \rho_1(t_k, \tau) = a_1 L^{-1}(\exp(L\tau) - 1), \quad \tau \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Проинтегрируем уравнение (1.4) вдоль траектории $y(t)$, $t \in [t_k, t_k + \tau]$, $\tau > 0$. Получим

$$y(t_k+\tau) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_k+\tau} f(y(t_k))\,d\theta + \int_{t_k}^{t_k+\tau} [f(y(t_k+\theta)) - f(y(t_k))]\,d\theta + \int_{t_k}^{t_k+\tau} u_*^1\,d\theta + \int_{t_k}^{t_k+\tau} u^2(t_k+\theta)\,d\theta \tag{3.2}$$

В силу указанного и (3.1) абсолютное значение суммы второго и последнего слагаемого в (3.2) не превосходит величины

$$R_1(t_k, \tau) = \int_0^\tau L\rho_1(t_k, \theta)\,d\theta + u_0^2\tau = a_1 L^{-1}(\exp(L\tau) - L\tau - 1) + u_0^2\tau \tag{3.3}$$

Обозначим через $S(x, z)$ замкнутый шар в рассматриваемом евклидовом пространстве с центром в точке x и радиусом z.

Из сказанного выше и (3.2), (3.3) вытекает, что справедлива

Лемма (*об экстраполяции*). Если $y(t_k)$ — точка траектории $y(t)$ уравнения (1.4), соответствующая моменту t_k, то при

$$u^1(t) = u_*^1, \quad t \in [t_k, t_k + \tau], \quad \tau > 0$$

и любом допустимом управлении $u^2(t)$, $t \in [t_k, t_k+\tau]$ упомянутая точка переместится к моменту $t = t_k + \tau$ в точку $y(t_k+\tau)$, лежащую в шаре радиуса $R_1(t_k, \tau)$ (3.3) с центром в точке $y(t_k) + [f(y(t_k)) + u_*^1]\tau$, т. е.

$$y(t_k+\tau) \in S(y(t_k) + [f(y(t_k)) + u_*^1]\tau,\ R_1(t_k, \tau)) \tag{3.4}$$

Замечание. Радиус шара в (3.4) в общем случае не может быть уменьшен. Это легко установить, рассмотрев пример с $L = 0$, $u^2(t) = u_*^2 = \mathrm{const}$, где $|u_*^2| = u_0^2$. Для указанного примера точка $y(t_k+\tau)$ в (3.4) располагается на границе шара, причем при соответствующем выборе направления вектора u_*^2 — в любой точке границы. Следовательно, в общем случае центр минимального шара, содержащего все точки вида $y(t_k+\tau)$, определяется однозначно и совпадает с центром шара в (3.4).

4. Оценим сверху расстояние

$$r(t_k+\tau) = |x(t_k+\tau) - y(t_k+\tau)|, \quad \tau \geqslant 0$$

Применяя лемму об экстраполяции в частном случае, когда $u^1(t) \equiv u^2(t) \equiv 0$, а следовательно $y(t) \equiv x(t)$, получаем включение

$$x(t_k+\tau) \in S(x(t_k) + f(x(t_k))\tau,\ R(t_k, \tau)), \quad \tau \geqslant 0 \tag{4.1}$$
$$R(t_k, \tau) = |f(x(t_k))| L^{-1}(\exp(L\tau) - L\tau - 1)$$

Из (3.4), (4.1) следует

$$r(t_k+\tau) \leqslant r_1(t_k+\tau) \equiv |[y(t_k) - x(t_k)] + [f(y(t_k)) - f(x(t_k)) + u_*^1]\tau| + R_1(t_k, \tau) + R(t_k, \tau) \tag{4.2}$$

Нетрудно проверить, что $r_1(t_k+\tau)$ — вогнутая функция аргумента τ.

5. Обобщим соотношения (3.4), (4.2) на случай управления

$$u^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_k+\Delta\tau), \quad \Delta\tau > 0 \\ u_*^1 = \mathrm{const}, & t \in [t_k+\Delta\tau, t_k+\Delta\tau+\tau], \quad \tau > 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

В силу леммы об экстраполяции находим (см. (3.3))

$$y(t_k+\theta) \in S(y(t_k) + f(y(t_k))\theta,\ R'(t_k, \theta)) \tag{5.2}$$
$$R'(t_k, \theta) = [|f(y(t_k))| + u_0^2] L^{-1}(\exp(L\theta) - L\theta - 1) + u_0^2\theta, \quad \theta \in [0, \Delta\tau]$$

В силу той же леммы имеем

$$y(t_k+\Delta\tau+\varphi) \in S(y(t_k+\Delta\tau) + [f(y(t_k+\Delta\tau)) + u_*^1]\varphi,\ R_1(t_k+\Delta\tau, \varphi)), \quad \varphi \in [0, \tau] \tag{5.3}$$

Из (1.2) и (3.1) вытекает неравенство

$$|f(y(t_k+\Delta\tau)) - f(y(t_k))| \leqslant L\rho'(t_k, \Delta\tau) \tag{5.4}$$
$$\rho'(t_k, \Delta\tau) = [|f(y(t_k))| + u_0^2] L^{-1}(\exp(L\Delta\tau) - 1)$$

Следствием (5.2) — (5.4) будет включение

$$y(t_k+\Delta\tau+\varphi) \in S(y(t_k) + f(y(t_k))\Delta\tau + [f(y(t_k)) + u_*^1]\varphi,\ R_2(t_k, \Delta\tau, \varphi) + R'(t_k, \Delta\tau) + L\rho'(t_k, \Delta\tau)\varphi), \quad \varphi \in [0, \tau] \tag{5.5}$$

где $R_2(t_k, \Delta\tau, \varphi)$ получено из $R_1(t_k+\Delta\tau, \varphi)$ (3.3) заменой в a_1 величины $|f(y(t_k+\Delta\tau)) + u_*^1|$ на не ме́ньшую величину (см. (5.4))

$$|f(y(t_k)) + u_*^1| + L\rho'(t_k, \Delta\tau)$$

Принимая во внимание включения (4.1), (5.2), (5.5), получаем для управления (5.1) следующие соотношения:

(5.6) $r(t_k+\theta)\leqslant r_1(t_k+\theta)\equiv|y(t_k)-x(t_k)+[f(y(t_k))-f(x(t_k))]\theta|+R(t_k,\theta)+R'(t_k,\theta),\quad \theta\in[0,\Delta\tau]$

(5.7) $r(t_k+\Delta\tau+\varphi)\leqslant r_2(t_k+\Delta\tau+\varphi)\equiv|y(t_k)-x(t_k)+[f(y(t_k))-f(x(t_k))](\Delta\tau+\varphi)+u_*^1\varphi|+R(t_k,\Delta\tau+\varphi)+R_2(t_k,\Delta\tau,\varphi)+R'(t_k,\Delta\tau)+L\rho'(t_k,\Delta\tau)\varphi,\ \varphi\in[0,\tau]$

Как и для функции $r_1(t_k+\theta)$, непосредственно устанавливается вогнутость функции $r_2(t_k+\Delta\tau+\varphi)$ по аргументу φ, причем можно заметить, что

(5.8) $r_1(t_k+\Delta\tau)=r_2(t_k+\Delta\tau)$

6. Число F, ограничивающее сверху функцию $|f(y)|$ в рассматриваемой области G_ε

$$|f(y)|\leqslant F,\quad y\in G_\varepsilon$$

существует, так как функция $f(y)$ в силу (1.2) непрерывна, а множество точек G_ε, удаленных от невозмущенной траектории на расстояние, не превышающее ε, ограничено.

Число F может быть вычислено следующим образом. Зададим некоторое положительное целое число m и для точек

$$x_l=x(t_0+l\Delta t),\quad \Delta t=(t'-t_0)/m,\quad l=0,\ldots,m$$

невозмущенной траектории построим шаровые окрестности $S(x_l,z_l)$, где

$$z_l=|f(x_l)|L^{-1}(\exp(L\Delta t)-1)$$

Построенные окрестности, очевидно, покрывают всю невозмущенную траекторию. Поэтому максимальное значение функции $|f(x)|$ на невозмущенной траектории будет не больше числа $\max_l\{|f(x_l)|+Lz_l\}$, а следовательно, можно положить

(6.1) $F=\max\limits_{0\leqslant l\leqslant m}\{|f(x_l)|+|f(x_l)|(\exp(L\Delta t)-1)\}+\varepsilon L=\max\limits_{0\leqslant l\leqslant m}|f(x_l)|\exp(L\Delta t)+\varepsilon L$

Заметим, что, например, для функции $f(x)=Lx$ формула (6.1) при $m\to\infty$ дает в пределе в качестве F точную верхнюю грань функции $|f(y)|$ в области G_ε. Что же касается первого слагаемого в правой части равенства (6.1), то оно, очевидно, для любой рассматриваемой функции $f(y)$ в пределе при $m\to\infty$ дает точную верхнюю грань $|f(x)|$ на невозмущенной траектории.

7. Пусть числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

(7.1) $0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1,\quad \alpha+2\beta<1$

Лемма 7.1. Если

$$r(t_k)\leqslant\varepsilon\alpha,\quad u^1(t)=0,\quad t\geqslant t_k$$

(см. п. 4), то

(7.2) $r(t_k+\tau)\leqslant\varepsilon(1-\beta),\quad \tau\in[0,\tau_\alpha]$

$$\tau_\alpha=\varepsilon(1-\alpha-\beta)/(L\varepsilon+u_0^2)$$

Справедливость леммы следует из того, что почти в каждый момент t скорость перемещения точки $y(t)$ относительно точки $x(t)$ равна $[f(y(t)) - f(x(t)) + u^2(t)]$.

До тех пор, пока выполняется неравенство $r(t) \leqslant \varepsilon$, абсолютное значение последнего выражения в силу (1.2), (1.3) не превосходит знаменателя дроби в (7.2).

Лемма 7.2. Если

(7.3) $\quad r_1(t_k) \leqslant \varepsilon(1-\beta), \quad u^1(t) = 0, \quad t \geqslant t_k$

то

$$r_1(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon, \quad \tau \in [0, \tau_\beta]$$

(7.4) $\quad \tau_\beta = \varepsilon\beta \,/\, [L\varepsilon + u_0^2 + {}^1/_2(2F + u_0^2)\, LT \exp(LT)], \quad T = t' - t_0$

В самом деле, из (5.6), (7.3) имеем

(7.5) $\quad r_1(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon(1-\beta) + L\varepsilon\tau + R(t_k, \tau) + R'(t_k, \tau)$

Используя формулу Маклорена, получаем

(7.6) $\quad R(t_k, \tau) \leqslant {}^1/_2\, |f(x(t_k))|\, L\tau^2 \exp(L\tau) \leqslant {}^1/_2\, FLT \exp(LT)\,\tau$

(7.7) $\quad R'(t_k, \tau) \leqslant {}^1/_2\, [\,|f(x(t_k))| + u_0^2]L\tau^2 \exp(L\tau) + u_0^2\tau \leqslant$
$\leqslant {}^1/_2(F + u_0^2)\, LT\exp(LT)\,\tau + u_0^2\tau, \quad \tau \in [t_k, t']$

Отсюда следует

(7.8) $\quad R(t_k, \tau) + R'(t_k, \tau) \leqslant \{{}^1/_2(2F + u_0^2)\, LT\exp(LT) + u_0^2\}\tau \equiv$
$\equiv W(\tau)$

Заменив в (7.5) сумму двух последних слагаемых правой частью неравенства (7.8), приравняем полученную новую правую часть неравенства (7.5) числу ε. Корень полученного уравнения относительно τ и есть τ_β (7.4). Из способа нахождения числа τ_β вытекает заключение леммы 7.2.

Следствием соотношений (7.1), (7.2), (7.4), (7.7), (7.8) и способа нахождения числа τ_β являются неравенства

(7.9) $\quad \tau_\alpha > \tau_\beta, \quad R(t_k, \tau_\beta) + R'(t_k, \tau_\beta) \leqslant W(\tau) < \varepsilon\beta$

8. *Лемма 8.1.* Если

(8.1) $\quad r(t_k) \in (\varepsilon\alpha, \varepsilon(1-\beta)]$

и $u_{1,k}^1$, τ_k удовлетворяют системе соотношений

$$y(t_k) - x(t_k) + [f(y(t_k)) - f(x(t_k))]\,(\tau_\beta + \tau_k) + u_{1,k}^1\tau_k = 0$$

(8.2) $\quad R(t_k, \tau_\beta + \tau_k) + R_2(t_k, \tau_\beta, \tau_k) + R'(t_k, \tau_\beta) + L\rho'(t_k, \tau_\beta)\tau_k =$
$= \varepsilon(1-\beta)$

то при управлении

(8.3) $\quad u_k^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_k + \tau_\beta) \\ u_{1,k}^1, & t \in [t_k + \tau_\beta, t_k + \tau_\beta + \tau_k] \end{cases}$

выполняются неравенства

(8.4) $\quad r_1(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon, \quad r(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon, \quad \tau \in [0, \tau_\beta]$

(8.5) $\quad r(t_k + \tau_\beta + \tau_k) \leqslant \varepsilon(1-\beta), \quad r(t_k + \tau_\beta + \tau) \leqslant \varepsilon, \ \tau \in [0, \tau_k]$

Доказательство. Из (8.1), (4.2) следует включение

$$r_1(t_k) \in (\varepsilon\alpha, \varepsilon(1-\beta)]$$

а из него, леммы 7.2 и (8.3), (5.6) вытекает (8.4).

Следствием (8.4), (5.6) и равенства $\Delta\tau = \tau_\beta$ в (5.1) и (8.3) будет такое неравенство:

(8.6) $$r_2(t_k + \tau_\beta) \leqslant \varepsilon$$

а из условия (8.2) и (5.7) вытекает равенство

(8.7) $$r_2(t_k + \tau_\beta + \tau_k) = \varepsilon(1 - \beta)$$

следствием которого и (5.7) является первое неравенство в (8.5). Поскольку функция $r_2(t_k + \tau_\beta + \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k$ вогнута, из (8.6), (8.7) следует неравенство

$$r_2(t_k + \tau_\beta + \tau) \leqslant \varepsilon, \quad \tau \in [0, \tau_k]$$

а из него — второе неравенство в (8.5).

Существование решения системы (8.2) вытекает из несложного анализа этой системы. Выразим $u_{1,k}{}^1$ из первого уравнения системы и подставим это выражение во второе уравнение системы. Получившуюся после этого левую часть второго уравнения обозначим символом $P(\tau_k)$; само уравнение примет вид

(8.8) $$P(\tau_k) = \varepsilon(1 - \beta)$$

Из (7.1), (7.9) вытекает, что $P(0) < \varepsilon(1 - \beta)$. Легко заметить, что $P(\tau)$ — непрерывная функция, неограниченно возрастающая при $\tau \to \infty$. Поэтому существует единственный наименьший корень уравнения (8.8).

9. Функция $P(\tau)$ в конечном виде выражается через элементарные функции, но она имеет громоздкий вид, и поэтому целесообразно для дальнейшего найти более простое уравнение, решение которого было бы аналогично решению τ_k в смысле леммы 8.1.

С помощью формул (7.6) с последующими преобразованиями типа (7.7), построим линейную возрастающую функцию $P_1(\tau)$, связанную с $P(\tau)$ следующим образом:

(9.1) $$P(\tau) \leqslant P_1(\tau), \quad \tau \geqslant 0; \quad P_1(0) < \varepsilon(1 - \beta)$$

А именно, заменим слагаемые левой части уравнения (8.8) правыми частями приводимых ниже неравенств

$$R(t_k, \tau_\beta + \tau) \leqslant {}^1/_2\, FL\, T \exp(LT)(\tau_\beta + \tau)$$

$$R_2(t_k, \tau_\beta, \tau) \leqslant {}^1/_2\, \{F + [\varepsilon + L\varepsilon(\tau_\beta + T)]\}\, L\tau \exp(LT) + u_0{}^2\tau$$

поскольку ввиду первого уравнения (8.2)

(9.2) $$|u_{1,k}^1| \leqslant [\varepsilon + L\varepsilon(\tau_\beta + \tau_k)]\tau_k{}^{-1}$$

$$R'(t_k, \tau_\beta) \leqslant {}^1/_2\,(F + u_0{}^2)\, L\tau_\beta{}^2 \exp(L\tau_\beta) + u_0{}^2\tau_\beta$$

$$L\rho'(t_k, \tau_\beta)\,\tau \leqslant (F + u_0{}^2)\, L\tau_\beta \exp(L\tau_\beta)\,\tau$$

Видно, что построенная функция $P_1(\tau)$ обладает всеми требуемыми свойствами (второе неравенство в (9.1) следует из (7.1) и (7.9)).

Обозначим через τ^* корень уравнения

(9.3) $$P_1(\tau) = \varepsilon(1 - \beta)$$

а соответствующий ему вектор, получаемый из разрешенного относительно $u_{1,k}^1$ первого уравнения (8.2) после подстановки τ^* вместо τ_k, — через $u_{2,k}^1$. Для дальнейшего существенно, что число τ^*, как видно из приведенных рассмотрений, единственно и не зависит от k.

Пара τ^*, $u^1_{2,k}$ аналогична паре τ_k, $u^1_{1,k}$ в следующем смысле: все утверждения леммы 8.1 остаются в силе, если в соотношениях (8.2) — (8.5) заменить τ_k на τ^*, $u^1_{1,k}$ на $u^1_{2,k}$, а во втором уравнении системы (8.2) $P(\tau_k)$ на $P_1(\tau^*)$. В самом деле, соотношения (8.4) сохраняются, поскольку ни число τ_β, ни управление $u^1(t)$ на отрезке $[t_k, t_k+\tau_\beta]$ не изменялись. Ввиду (5.7) и того, что функции P и P_1 связаны неравенством (9.1), функция $r_2(t_k+\tau_\beta+\varphi)$ и функция $r_3(t_k+\tau_\beta+\varphi)$, полученная из r_2 заменой слагаемых, образующих $P(\varphi)$, функцией $P_1(\varphi)$, будут связаны неравенством

$$r_2(t_k+\tau_\beta+\varphi) \leqslant r_3(t_k+\tau_\beta+\varphi), \quad \varphi \geqslant 0$$

Свойства функции r_3 аналогичны, как легко заметить, свойствам функции r_2, использовавшимся при доказательстве леммы 8.1 (в частности, выполняется равенство $r_2(t_k+\tau_\beta) = r_3(t_k+\tau_\beta)$), поэтому вторая часть леммы — соотношения (8.5) — при замене функции r_2 функцией r_3 переходят в соотношения, получающиеся из (8.5) заменой τ_k на τ^*.

Можно заметить также, что все утверждения леммы 8.1 остаются в силе при замене τ^* числом $\tau' \in (0, \tau^*)$; однако, как видно из оценки

$$(9.4) \qquad |u^1_{2,k}| \leqslant [\varepsilon + L\varepsilon(\tau_\beta+\tau^*)] / \tau^* = \varepsilon / \tau^* + L\varepsilon \quad (\tau_\beta / \tau^* + 1)$$

являющейся следствием (9.2), верхняя граница абсолютного значения вектора-коррекции при этом возрастает.

10. Теперь можно описать решение задачи данной работы.

Находим F (6.1); задаем числа α, β, удовлетворяющие условиям (7.1); находим числа τ_α (7.2), τ_β (7.4); вычисляем корень τ^* уравнения (9.3); определяем стратегию $v_0{}^1$ следующим образом: в момент t_k полагаем $u_k{}^1(t) = 0$, $t \in [t_k, t_k+\tau_\beta)$; находим $r(t_k)$; если $r(t_k) \leqslant \varepsilon\alpha$, доопределяем $u_k{}^1(t) = 0$, $t \in [t_k+\tau_\beta, t_{k+1}]$, $t_{k+1} = t_k+\tau_\alpha$; если $r(t_k) \in (\varepsilon\alpha, \varepsilon(1-\beta)]$, то, подставив τ^* в первое равенство (8.2) вместо τ_k и заменив $u^1_{1,k}$ на $u^1_{2,k}$ находим $u^1_{2,k}$, после чего доопределяем $u_k{}^1(t) = u^1_{2,k}$, $t \in [t_k+\tau_\beta, t_{k+1})$, $t_{k+1} = t_k+\tau_\beta+\tau^*$.

Из всего ранее сказанного вытекает, что построенная стратегия обладает всеми требуемыми свойствами.

Замечания. 1°. Вычисление $r(t_k)$, $u^1_{2,k}$ должно быть проведено за промежуток времени $[t_k, t_k+\tau_\beta]$.

2°. Можно в качестве τ^* взять число

$$\tau^\circ = \min\{\tau^*, \tau_\alpha - \tau_\beta\}$$

Тогда последовательность $\{t_k\}$, $t_k = t_0 + k(\tau_\beta+\tau^\circ)$ оказывается известной сразу и, следовательно, еще до начала осуществления коррекции можно вычислить векторы $x(t_k)$, $f(x(t_k))$ (но при этом может возрасти правая часть неравенства (9.4)).

3°. Если константа L не дана, а функция $f(x)$ достаточно регулярна, можно оценить L, построив окрестности точек x_l, рассмотренных в п. 6 и воспользовавшись разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности каждой точки x_l.

На основе изложенного в данной работе приема проведен контрольный расчет на ЭВМ модельного примера. Блок-схема программы расчета составлена с помощью описания, приведенного выше.

Поступила 18 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1953, т. 1.
2. *Лагунов В. Н.* Экстраполяционный метод в теории дифференциальных игр. В сб.: Информационные материалы. М., АН СССР Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1970, № 5 (42).
3. *Красовский Н. Н., Шелементьев Г. С.* О коррекции движения системы с двумя степенями свободы при одной циклической координате. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. *Богуславский И. А., Иващенко О. И.* Оптимальная импульсная коррекция движения по статистической информации. Автоматика и телемеханика, 1971, № 2.
5. *Черноусько Ф. Л.* Оптимизация процессов управления и наблюдения в динамической системе при случайных возмущениях. Автоматика и телемеханика, 1972, № 4.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.