Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

С. П. Охезин

(Свердловск)

Рассматривается задача об управлении параболической системой в условиях неопределенности или конфликта. Задача трактуется как позиционная дифференциальная игра в подходящем функциональном пространстве [1 – 3]. Управляющие воздействия входят в граничное условие, причем механизм выработки этих воздействий описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. В основе построений лежит подход к задачам позиционного управления в системах с распределенными параметрами, развитый в [3 – 5] [1]. Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [6], строится процедура управления с поводырем, доставляющая решение рассматриваемых задач. Работа примыкает к исследованиям [1 – 9].

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченное связное открытое множество в евклидовом пространстве R_n, Γ — граница Ω. Будем считать, что на область Ω наложены ограничения (см. [10], стр. 212, 222), обеспечивающие достаточную гладкость решений рассматриваемых краевых задач.

Рассматривается конфликтно-управляемая система

$$\partial y/\partial t + Ay = f, \text{ в } Q = (t_0, \vartheta) \times \Omega \tag{1.1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0, \text{ в } \Omega \tag{1.2}$$

$$y|_\Sigma = \alpha(x) w(t), \text{ в } \Sigma = (t_0, \vartheta) \times \Gamma$$

$$dw/dt = B(t)w + C(t)u + D(t)v, \quad w(t_0) = w_0 \tag{1.3}$$

A — самосопряженный эллиптический оператор вида

$$Ay = -\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} y\right) + a(x)y \tag{1.4}$$

Здесь $y_0 \in L_2(\Omega)$ — заданное началььное состояние, $f \in L_2(Q)$ — заданное возмущение; $\alpha(x)$ — вектор-функция размерности m, суммируемая в квадрате по Γ; w — m-мерный фазовый вектор системы (1.3); u, v — векторные управления размерностей l_1 и l_2 соответственно; $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей.

[1] *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры в системах с распределенными параметрами. Тезисы III Всес. конференции по теории игр. Одесса, 1974.

Допустимыми управлениями первого (второго) игрока будем называть измеримые по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$ функции $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$, удовлетворяющие следующим ограничениям ($\|g\|$ — евклидова норма вектора g):

$$J_1(u, t_0, \vartheta) = \left(\int_{t_0}^{\vartheta} \|u(t)\|^{p_1} dt\right)^{1/p_1} \leqslant \mu(t_0) \tag{1.5}$$

$$\left(J_2(v, t_0, \vartheta) = \left(\int_{t_0}^{\vartheta} \|v(t)\|^{p_2} dt\right)^{1/p_2} \leqslant \nu(t_0)\right)$$

$$\mu(t_0) < \infty, \ \nu(t_0) < \infty; \ 1 < p_i < \infty, \ i = 1, 2$$

Изменение ограничений $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяется израсходованными в процессе игры ресурсами управляющих воздействий u и v

$$\mu^{p_1}(t_2) = \mu^{p_1}(t_1) - J_1^{p_1}(u, t_1, t_2) \tag{1.6}$$

$$\nu^{p_2}(t_2) = \nu^{p_2}(t_1) - J_2^{p_2}(v, t_1, t_2), \quad t_2 > t_1$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ задано замкнутое множество M. Требуется указать такой способ выбора управления u (управления v) по принципу обратной связи $u[t] = u[t, y_t(\cdot)]$ $(v[t] = v[t, y_t(\cdot)])$, вырабатывающий измеримые на $[t_0, \vartheta]$ по Лебегу реализации $u[t]$ $(v[t])$, удовлетворяющие (1.5), что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ $(u(\cdot))$ выполняется условие $y_\vartheta(\cdot) \in M$ $(y_\vartheta(\cdot) \notin M)$. Здесь $y_t(\cdot) = y(t, x)$, $x \in \Omega$ — состояние системы (1.1) в момент времени t.

Задачи позиционного управления в такой постановке рассматривались в [1 – 5], где исследованы случаи мгновенных ограничений на управляющие воздействия. В [6] для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, изучен также случай ограничений (1.5), (1.6). В данной работе, как и в [5], изучается параболическая управляемая система при наличии ограничений (1.5), (1.6).

Рассматриваемые задачи содержательно можно трактовать как задачи оптимального нагрева тела Ω в условиях неопределенности посредством подвода тепла к телу при помощи некоторого распределенного на границе Γ источника тепла, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением. Задачи подобного вида возникают, например, при нагреве металла под прокатку или термообработку (см. [11]).

Уточним постановку задач. Под решением системы (1.1) при выбранных y_0, w_0, $u(t)$ и $v(t)$ понимается функция $y_t(x) = y(t, x; y_0, w_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in L_2(Q)$, удовлетворяющая следующему интегральному тождеству [12]:

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\int_{\Omega} y_t(x)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi\right) dx\, dt = \int_{t_0}^{\vartheta}\int_{\Omega} f\varphi\, dx\, dt + \tag{1.7}$$

$$+ \int_{\Omega} y_0(x)\, \varphi(x, t_0)\, dx - \int_{t_0}^{\vartheta}\int_{\Gamma} [\alpha(x)\, w(t)] \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A}\, d\Gamma\, dt$$

$$\forall\varphi \in X = \{\varphi \mid \varphi \in H^{2,1}(Q); \ \varphi|_\Sigma = 0, \ \varphi(x, \vartheta) = 0, \ x \in \Omega\}$$

Здесь $w(t)$ — решение интегрального уравнения

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^{t} B(\tau)\, w(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau)\, u(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} D(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

Множество X наделяется топологией, индуцированной топологией пространства $H^{2,1}(Q)$ [12]

$$H^{2,1}(Q) = \{\varphi|\varphi,\ \partial\varphi / \partial t,\ \partial\varphi / \partial x_i,\ \partial^2\varphi / \partial x_i \partial x_j \in L_2(Q),\ i, j = 1, \ldots, n\}$$

Множество введенных движений непусто [12]. Используя разложение решения $y_t(x)$ по базису, составленному из собственных функций оператора A, можно показать, что $y_t(x)$ — непрерывная по t функция со значениями в пространстве $L_2(\Omega)$.

Состоянием системы будем называть вектор $r = \{w, y, \mu, \nu\}$, где $w \in R_m$, $y \in L_2(\Omega)$, $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$. Пары $\{t, r\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ назовем позициями. Пусть Δ — покрытие отрезка $[t_0, \vartheta]$ полуинтервалами $[\tau_i, \tau_{i+1})$ равной длины

$$\delta = \delta(\Delta) = \tau_{i+1} - \tau_i \quad (t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m(\Delta)} = \vartheta)$$

Зная состояние системы в момент времени τ_i — $r(\tau_i) = \{w(\tau_i), y_{\tau_i}(\cdot), \mu(\tau_i), \nu(\tau_i)\}$, первый (второй) игрок выбирает на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ допустимое для позиции $\{\tau_i, r(\tau_i)\}$ управление $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$, т. е.

$$J_1(u, \tau_i, \tau_{i+1}) \leqslant \mu(\tau_i), \quad J_2(v, \tau_i, \tau_{i+1}) \leqslant \nu(\tau_i)$$

Такой способ выбора управления u (v) назовем стратегией U (V) первого (второго) игрока. Движением системы (1.1) из позиции $\{t_0, w_0, y_0, \mu(t_0), \nu(t_0)\}$, отвечающим разбиению Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и стратегии U, назовем функцию $y_t(x)_\Delta = y(t, x; w_0, y_0, \mu(t_0), \nu(t_0), U)_\Delta$, удовлетворяющую (1.7). Здесь на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ управление u выбирается стратегией U по позиции $\{\tau_i, w(\tau_i), y_{\tau_i}(\cdot), \mu(\tau_i), \nu(\tau_i)\}$, $v(\cdot)$ — допустимая реализация управления второго игрока. Аналогично определяются движения $y(t, x; w_0, y_0, \mu(t_0), \nu(t_0), V)_\Delta$.

Задачи, стоящие перед игроками, формализуются следующим образом.

Задача сближения. Требуется построить стратегию U первого игрока со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число δ_0, такое, что для всех движений $y_t(x)_\Delta = y(t, x; w_0, y_0, \mu(t_0), \nu(t_0), U)_\Delta$ выполняется включение $y_\vartheta(\cdot)_\Delta \in M^\varepsilon$, если только $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$ (M^ε — замкнутая ε-окрестность множества M).

Задача уклонения. Требуется построить стратегию V второго игрока со свойством: найдется число $\varepsilon > 0$, найдется положительное число δ_0, такое, что для всех движений $y_t(x)_\Delta = y(t, x; w_0, y_0, \mu(t_0), \nu(t_0), V)_\Delta$ выполняется включение $y_\vartheta(\cdot)_\Delta \notin M^\varepsilon$, если только $\delta(\Delta) \leqslant \delta_0$.

2. Опишем процедуру управления первого игрока, доставляющую решение задачи сближения. Эта процедура — аналог известной процедуры управления с поводырем (см. [2, 6]).

Через H обозначим пространство

$$H = R_m \times L_2(\Omega) \times R_1 \times R_1$$

с нормой

$$\|\{w, y, \mu, \nu\}\|_H = (\|w\|^2_{R_m} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu^2 + \nu^2)^{1/2}$$

Пусть $z_* = \{t_*, w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}$ — некоторая позиция игры, $v[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ — реализация управления второго игрока, допустимая для позиции z_*, т. е. $J_2(v, t_*, \vartheta) \leqslant \nu_*$. Следуя [6], обозначим символом $G^{(u)}$ $(z_*,$

t^*, $v[\cdot]$), $t^* > t_*$ множество точек $r(t^*) = \{w(t^*), y_{t^*}(\cdot), \mu(t^*), \nu(t^*)\}$, где $\mu(t^*) \geqslant 0$, $\mu^{p_1}(t^*) \leqslant \mu_*^{p_1} - J_1^{p_1}(u, t_*, t^*)$, $w(t)$ — решение уравнения (1.8) с $u(t)$, $v[t]$; $y_{t^*}(x) = y(t^*, x; y_*, w_*, u(\cdot), v[\cdot])$, $\nu^{p_2}(t^*) = \nu_*^{p_2} - J_2^{p_2}(v, t_*, t^*)$. Здесь $u(\cdot)$ — всевозможные суммируемые функции, удовлетворяющие ограничению $J_1(u, t_*, t^*) \leqslant \mu_*$. Символом M^* обозначим множество

(2.1) $$M^* = \{\{w, y, \mu, \nu\} \in H \mid y \in M, \mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0\}$$

Пусть в пространстве H задано семейство множеств N_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Скажем, что система множеств N_t сильно u-стабильна, если для любых t_1 и t_2 ($t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \vartheta$), для любого $\{w_1, y_1, \mu_1, \nu_1\} \in N_{t_1}$ и для всякой функции $v(\cdot)$, такой, что $J_2(v, t_1, t_2) \leqslant \nu_1$, выполняется условие

(2.2) $$G^{(u)}(\{t_1, w_1, y_1, \mu_1, \nu_1\}, t_2, v(\cdot)) \cap N_{t_2} \neq \varnothing$$

Пусть функция $u_*(z, z^*, \delta)$ доставляет минимум интегралу

(2.3) $$\int_{t_*}^{t_*+\delta} b'u(t)\,dt$$

при $J_1^{p_1}(u, t_*, t_* + \delta) \leqslant \mu^{p_1} - \mu^{*p_1}$, $\mu - \mu^* > 0$, $\|b\| \neq 0$ и $u_*(z, z^*, \delta) = 0$ при $\mu - \mu^* \leqslant 0$ или при $\|b\| = 0$. Функция $v^*(z, z^*, \delta)$ доставляет максимум интегралу

(2.4) $$\int_{t_*}^{t_*+\delta} c'v(t)\,dt$$

при $J_2^{p_2}(v, t_*, t_* + \delta) \leqslant \nu^{*p_2} - \nu^{p_2}$, $\nu^* - \nu > 0$, $\|c\| \neq 0$ и $v^*(z, z^*, \delta) = 0$ при $\nu^* - \nu \leqslant 0$ или при $\|c\| = 0$.

Здесь

$$z = \{t_*, w, y, \mu, \nu\}, \quad z^* = \{t_*, w^*, y^*, \mu^*, \nu^*\}$$
$$\delta > 0, \; b = (w - w^*)'C(t_*), \quad c = (w - w^*)'D(t_*)$$

(штрих означает транспонирование).

Заданы: исходная позиция $z(t_*) = \{t_*, w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}$ и система сильно u-стабильных множеств N_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$. Выберем произвольно позицию

$$z^*(t_*) = \{t_*, w^*, y^*, \mu^*, \nu^*\} \in \{t = t_*\} \times N_{t*}$$

Это будет позиция вспомогательного движения — поводыря (см. [2,6]) в момент времени $t = t_*$. Выберем покрытие Δ промежутка $[t_*, \vartheta]$ системой полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ равной длины $\delta = \delta(\Delta) = \tau_{i+1} - \tau_i$ ($t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m(\Delta)} = \vartheta$). Полагаем, что на первом участке $[\tau_0, \tau_1)$ движение системы (1.1) — (1.3) порождается управлением первого игрока

$$u^{(0)}[t] = u_*(z(t_*), z^*(t_*), \delta), \quad \tau_0 \leqslant t < \tau_1$$

в паре с некоторой реализацией $v[t]$ управления второго игрока, допустимой для позиции $z(t_*)$, т. е. $J_2(v, \tau_0, \tau_1) \leqslant \nu_*$.

Выбор этих управлений определяет позицию игры

$$z(\tau_1) = \{\tau_1, w(\tau_1), y_{\tau_1}(\cdot), \mu(\tau_1), \nu(\tau_1)\}$$

которая осуществляется в момент $t = \tau_1$.

Позицию поводыря $z^*(\tau_1)$ в момент времени $t = \tau_1$ выберем из условия

$$z^*(\tau_1) \in \{t = \tau_1\} \times$$
$$\times (G^{(u)}(\{\tau_0, w^*, y^*, \mu^*, \nu^*\}, \tau_1, v^{(0)}[\cdot]) \cap N_{\tau_1})$$
$$v^{(0)}[t] = v^*(z(t_*), z^*(t_*), \delta)$$

Такая позиция всегда найдется, ибо система N_t сильно u-стабильна (см. (2.2)).

Далее процесс получения $z(\tau)$ и $z^*(\tau)$ повторяется, но уже для $t_* = \tau_1$ и т. д. вплоть до момента $t = \vartheta$. Построенное таким способом управление первого игрока

$$u_\Delta[t] = u_*(z(\tau_i), z^*(\tau_i), \delta), \quad \tau_i < t < \tau_{i+1}$$
$$i = 0, 1, \ldots, m(\Delta) - 1$$

не нарушает ограничения $J_1(u_\Delta[\cdot], t_*, \vartheta) \leqslant \mu_*$.

Стратегию управления с поводырем первого игрока, построенную относительно системы N_τ, будем обозначать

$$U(N_\tau) = U(\tau_i, \tau_{i+1}, r_1(\tau_i), r_2(\tau_i), N_\tau)$$

где

$$r_1(t_*) = \{w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}, \quad r_2(t_*) = \{w^*, y^*, \mu^*, \nu^*\}$$

Пусть $\{\alpha_j\}$ — фиксированная последовательность чисел, обладающая следующими свойствами (см. аналогичные построения в [5]):

(2.5) $$0 < \alpha_j < 1$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \left\| \frac{\partial \omega_j}{\partial \nu_A} \right\|^2_{L_2(\Gamma)} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \lambda_j^2 < \infty$$

Здесь ω_j, λ_j — решение в пространстве $H^1(\Omega)$ следующей спектральной задачи [10,12,13]:

(2.6) $$A\omega = \lambda\omega, \quad \omega|_\Gamma = 0$$

Для простоты будем считать, что $a > 0$ (см. (1.4)). В силу ограничений, наложенных на оператор A (см. [10,13]) и область Ω (см. [10]), задача (2.6) имеет решение из $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ для счетного числа значений λ, причем [10]

1) λ_j — вещественные, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$;

2) $$\int_\Omega \omega_j^2\, dx = 1, \quad \int_\Omega \omega_j \omega_k\, dx = 0, \quad j \neq k;$$

3) ω_j образуют базис в $L_2(\Omega)$ и в $H_0^1(\Omega)$.

Последовательности (2.4) существуют, ибо по теоремам о следах [12,13] функции $\partial\omega_j / \partial\nu_A \in L_2(\Gamma)$.

Замечание 2.1. В отличие от условий на числа $\{\alpha_j\}$, указанных в [5], здесь вводится дополнительное предположение (последнее неравенство в (2.5)). Это вызвано существом дела, ибо ограничения на ресурсы управления теперь интегральные.

Через $\|\cdot\|_\alpha$ обозначим новую норму в пространстве $L_2(\Omega)$, определяемую следующим образом:

$$\|y\|_\alpha = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle^2 \right)^{1/2}$$

Введем в пространстве H норму

$$\|r\|_\alpha = \|\{w, y, \mu, \nu\}\|_\alpha = (\|w\|^2_{R_m} + \|y\|_\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2)^{1/2}$$

Через M_α^ε обозначим множество $\{\varphi \in L_2(\Omega)\,|$, найдется $m(\varphi) \in M$, такое, что $\|\varphi - m(\varphi)\|_\alpha \leqslant \varepsilon\}$. Справедлива следующая

Лемма 2.1. Пусть $N_t \neq \varnothing$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $N_\vartheta \subset M^*$ и система множеств N_t сильно u-стабильна, тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\beta(\varepsilon) > 0$, что для всех движений

$$y_t(x)_\Delta = y(x, t; t_0, w_0, y_0, \mu_0, \nu_0, U(N_\tau))_\Delta$$

имеет место включение $y_\vartheta(\cdot)_\Delta \in M_\alpha^\varepsilon$, если только $\delta(\Delta) \leqslant \delta(\varepsilon)$ и $\|r_1(t_0) - r_2(t_0)\|_\alpha \leqslant \beta(\varepsilon)$.

Здесь

$$r_1(t_0) = \{w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\}, \quad r_2(t_0) = \{w_0^*, y_0^*, \mu_0^*, \nu_0^*\}$$

— состояние поводыря в момент $t = t_0$.

В основе доказательства леммы лежит оценка расстояния между движением системы (1.1), (1.3) и движением поводыря, причем устанавливается, что выбор управлений $u_*(z, z^*, \delta)$ и $v^*(z, z^*, \delta)$ обеспечивает близость между этими движениями в метрике $\|\cdot\|_\alpha$ при достаточно малом шаге разбиения δ.

Обозначим через $U^\circ(N_\tau)$ стратегию первого игрока, при которой $r_1(t_0) = r_2(t_0)$. Из леммы 2.1 вытекает следующая

Теорема 2.1. Пусть $N_t \neq \varnothing$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $N_\vartheta \subset M^*$ и система множеств N_t сильно u-стабильна и пусть $r(t_0) = \{w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\} \in N_{t_0}$, тогда стратегия $U^\circ(N_\tau)$ решает задачу сближения.

3. Опишем позиционную процедуру управления с поводырем второго игрока, доставляющую решение задачи уклонения. Пусть в пространстве H задана система множеств K_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Аналогично тому, как это сделано в п. 2, вводятся множества $G^{(v)}(z_*, t^*, u[\cdot])$, где $z_* = \{t_*, w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}$, $t^* > t_*$, и определяется сильная v-стабильность системы K_t. (Нужно только в определении п.2 поменять местами u и v, μ и ν). Обозначим через $u^*(z, z^*, \delta)$ функцию, доставляющую максимум интегралу (2.3) при $J_1^{p_1}(u, t_*, t_* + \delta) \leqslant \mu^{*p_1} - \mu^{p_1}$, $\mu^* - \mu > 0$, $\|b\| \neq 0$ и $u^*(z, z^*, \delta) = 0$ при $\mu^* - \mu \leqslant 0$ или при $\|b\| = 0$. Функция $v_*(z, z^*, \delta)$ доставляет минимум интегралу (2.4) при $J_2^{p_2}(v, t_*, t_* + \delta) \leqslant \nu^{p_2} - \nu^{*p_2}$, $\nu - \nu^* > 0$, $\|c\| \neq 0$ и $v_*(z, z^*, \delta) = 0$ при $\nu - \nu^* \leqslant 0$ или при $\|c\| = 0$. Обозначения те же, что и в п. 2. Определим для сильно v-стабильного семейства K_t процедуру управления с поводырем второго игрока. Управление второго игрока будем формировать следующим образом:

$$v_\Delta[t] = v_*(z(\tau_i), z^*(\tau_i), \delta), \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} = \tau_i + \delta \tag{3.1}$$
$$i = 0, 1, \ldots, m(\Delta) - 1$$

Здесь $z(\tau_i)$ — позиция игры, реализовавшаяся в момент $t = \tau_i$ при выборе управления $v_\Delta[t]$ (3.1) в паре с допустимым управлением $u(t)$ $(\tau_0 \leqslant t < \tau_i)$ первого игрока, т. е. $J_1(u, \tau_0, \tau_i) \leqslant \mu(\tau_0)$; $z^*(\tau_i)$ — позиция поводыря в момент $t = \tau_i$. Для определения позиций поводыря используются управления

$$u^{[i]}(t) = u^*(z(\tau_i), z^*(\tau_i), \delta), \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \; i = 0, 1, \ldots, m(\Delta)-1$$

В качестве исходной позиции выбираем произвольную точку множества K_{t_0}. Последующие позиции поводыря определяются из условия

$$z^*(\tau_i) \in \{t = \tau_i\} \times (G^{(v)}(z^*(\tau_{i-1}), \tau_i, u^{[i-1]}(\cdot)) \cap K_{\tau_i})$$

вплоть до момента $t = \vartheta$. Такие точки $z^*(\tau_i)$ всегда существуют, ибо система K_t сильно v-стабильна.

Построенное управление $v_\Delta[t]$ не нарушает ограничения $J_2(v_\Delta[t], t_0, \vartheta) \leqslant \nu(t_0)$. Так же, как и в п. 2, определяется стратегия $V^\circ(K_\tau)$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие системы сильно v-стабильных множеств K_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, у которых $K_\vartheta \subset G^*$, где $G^* = \{\{w, y, \mu, \nu\} \in H | \mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0, \; y \in G, \; G = \bar{G} \subset L_2(\Omega), \; G \cap M = \varnothing\}$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. Пусть существует сильно v-стабильная система K_t, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такая, что $\{w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\} \in K_{t_0}$, тогда стратегия $V^\circ(K_\tau)$ решает задачу уклонения из позиции $\{t_0, w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\}$.

Доказательство опирается на аналог леммы 2.1 и теоремы 2.1 для сильно v-стабильных множеств.

Справедливы следующие утверждения, касающиеся решения задачи об уклонении.

Лемма 3.1. Если позиция $z_* = \{t_*, w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}$ принадлежит некоторому сильно v-стабильному семейству K_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, то существует ε-окрестность этой позиции в пространстве H, что из любой позиции, принадлежащей этой ε-окрестности, разрешима задача об уклонении.

Доказательство вытекает из аналога леммы 2.1 для сильно v-стабильных множеств.

Используя лемму 3.1, можно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.2. Если позиция $z_* = \{t_*, w_*, y_*, \mu_*, \nu_*\}$ принадлежит некоторому сильно v-стабильному семейству K_t, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, то существует сильно v-стабильное семейство K_t^*, такое, что K_t^* целиком содержит некоторую ε-окрестность точки z_*.

Рассмотрим следующее семейство множеств: $K_t^{(v)} = \bigcup K_t$ — объединение всех сильно v-стабильных семейств. Обозначим $N_t = H \setminus K_t^{(v)}$. Имеет место

Теорема 3.2. Пусть $N_{t_0} \neq \varnothing$, тогда $N_t \neq \varnothing$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ и система множеств N_t сильно u-стабильна.

Из теорем 2.1, 3.2, лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующая теорема об альтернативе.

Теорема 3.3. Для любой начальной позиции $\{t_0, w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\}$ всегда разрешима либо задача сближения, либо задача уклонения. Задача сближения (уклонения) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\{w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\} \in N_{t_0} \quad (\{w_0, y_0, \mu_0, \nu_0\} \notin N_{t_0})$$

Замечание 3.1. Все рассмотренные выше конструкции распространяются на вторую и третью краевые задачи [11 – 13] для уравнения (1.1). Подобные построения выполнимы для случая мгновенных ограничений на управления игроков. При этом последнее из условий (2.5) можно опустить. Аналогичные результаты справедливы и для систем с распределенными управлениями вида

$$\partial y/\partial t + Ay = f + bu_1 + cv_1$$

где ограничения на управления u_1 и v_1 типа (1.5). Заметим, наконец, что приведенные выше результаты имеют место для задач сближения и уклонения к моменту ϑ (см. [2])

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 25 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения—уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 5.
4. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
5. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории дифференциальных игр в параболических системах. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
6. *Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения—уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
7. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
8. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
9. *Пшеничный Б. Н., Онопчук Ю. И.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
11. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.