Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Изучаются задачи управления параболическими системами в условиях неопределенности. Указываются необходимые и достаточные условия разрешимости задач и способ построения искомых управлений. Работа примыкает к исследованиям [1-9]. Основное отличие данной работы, как и работ [4-8], от известных исследований, посвященных задачам управления системами с распределенными параметрами (см., например, [10-15]), состоит в том, что здесь речь идет об управлении по принципу обратной связи.

1. Имеется система, состояние которой в каждый момент t из заданного временного промежутка $[t_0, \vartheta]$ характеризуется скалярной функцией $y(t, \cdot) = y(t, x)$, определенной в области Ω n-мерного евклидова пространства R^n. Система подвержена управляющим воздействиям u_1, u_2 и неконтролируемым возмущениям (помехам) v_1, v_2. Динамика системы описывается уравнением и совокупностью краевых условий

$$\partial y(t, x)/\partial t = Ay(t, x) + b_1(t, x)u_1(t, x) - c_1(t, x)v_1(t, x) + f(t, x); \; x \in \Omega, \; t_0 < t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial y(t, x)}{\partial \nu_A} + \sigma_2(x)\, y(t, x) = b_2(x)\, u_2(t) - c_2(x)v_2(t); \; x \in \Gamma, \; t_0 < t \leqslant \vartheta \tag{1.2}$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.3}$$

$$Ay = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + a(x)\, y$$

Здесь Γ — граница Ω; $\partial / \partial \nu_A$ — конормальная производная. В каждый текущий момент t управляющие воздействия стеснены ограничениями $u_1(t, \cdot) \in P_1(t)$, $u_2(t) \in P_2(t)$, где $P_1(t)$ — некоторая совокупность функций, определенных на Ω, со значениями в R^{r_1}; $P_2(t) \subset R^{r_2}$; для помех v_1, v_2 в каждый текущий момент t имеются оценки $v_1(t, \cdot) \in Q_1(t)$, $v_2(t) \in Q_2(t)$, где $Q_1(t)$ — некоторая совокупность функций, определенных на Ω, со значениями в R^{m_1}; $Q_2(t) \subset R^{m_2}$.

Основная цель данной работы состоит в изучении следующей задачи, к которой сводятся многие стандартные задачи конфликтного управления системой (1.1), (1.2). При заданных ограничениях на ресурсы управлений u_1, u_2 и известных оценках интенсивностей помех v_1, v_2 требуется указать способ формирования воздействий u_1, u_2 по принципу обратной связи ($u_1[t, x] = u_1(t, x, y[t, \cdot])$, $u_2[t] = u_2(t, y[t, \cdot])$), который обеспечил бы при любых допустимых реализациях помех приведение системы (1.1) — (1.3) в заданные сроки на заданное множество состояний, причем так, чтобы в процессе управления выполнялись заданные фазовые ограничения.

Для системы (1.1), (1.2) отдельные варианты задачи изучались в [5–7]. Так, в [5] с позиций теории полугрупп рассмотрен [1], в частности, случай, когда краевое условие (1.2) является однородным условием Дирихле ($\sigma_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$) и фазовые ограничения на состояния системы отсутствуют. В [6] изучен вариант задачи, когда управляющим воздействиям и помехам подвержена лишь граница области Ω ($b_1 = 0$, $c_1 = 0$), причем соотношение (1.2) — снова краевое условие Дирихле, и речь идет о приведении системы на заданное множество состояний в заданный момент времени в отсутствие фазовых ограничений. В [7] обсуждались вопросы эффективного построения предложенной в [5] процедуры управления. Ниже задача рассматривается в общей для системы (1.1), (1.2) постановке.

2. Уточним постановку задачи. Символом $B(E_1; E_2)$ будем обозначать банахово пространство B функций на E_1 со значениями в E_2; $B(E_1) = B(E_1; R^1)$; $\|\cdot\|_B$ — символ нормы в B. Измеримость и интегрируемость всюду понимается в смысле меры Лебега, производные — в обобщенном смысле (см., например, [16–18]). Предполагаются выполненными следующие условия: Ω — ограниченная область со свойствами 1), 2) и R (см. стр. 212 и стр. 222 из [16]); A — самосопряженный эллиптический оператор [16]; функции a_{ij}, a измеримы и ограничены на Ω, причем $\partial a_{ij} / \partial x_k$ ограничены на Ω; b_1, c_1 измеримы и ограничены на $Q = (t_0, \vartheta) \times \Omega$; $f \in L^2(Q)$; b_2, c_2, σ_2 измеримы и ограничены на Γ, и в Γ $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 0$; $\sigma_2 > 0$ при $\sigma_1 = 0$; $y_0 \in L^2(\Omega)$. Далее, множества $P_1(t) \subset L^2(\Omega; R^{r_1})$, $P_2(t) \subset R^{r_2}$, $Q_1(t) \subset L^2(\Omega; R^{m_1})$, $Q_2(t) \subset R^{m_2}$, причем эти множества в соответствующих пространствах выпуклые, замкнутые, измеримые и равноограниченные по $t \in [t_0, \vartheta]$. Все рассматриваемые величины считаются вещественными.

Пусть $u_i(\cdot) = u_i(t)$, $t_1 \leqslant t < t_2$ — измеримая функция со значениями в $P_i(t)$, $i = 1, 2$. Согласно теоремам об измеримом выборе [19], такие функции существуют. Всякую пару $u(\cdot) = u(\cdot; t_1, t_2) = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ таких функций будем называть u-программой. Правило $U = U(t_1, t_2, y)$, ставящее в соответствие каждой тройке $\{t_1, t_2, y\}$, где $t_1 \in [t_0, \vartheta)$, $t_2 \in (t_1, \vartheta]$, $y \in L^2(\Omega)$, некоторую программу $u(\cdot; t_1, t_2)$ (так что $U(t_1, t_2, y) = u(\cdot; t_1, t_2)$), назовем стратегией U.

Введем понятие движения системы (1.1), (1.2), отвечающего стратегии U. Пусть Δ — конечное разбиение $[t_0, \vartheta]$ точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m(\Delta)} = \vartheta$, $\delta(\Delta) = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Образуем множество

$$\Phi = \{\varphi \in H^{2,1}(Q) \mid \varphi(\vartheta, x) = 0,\ x \in \Omega;$$

$$\sigma_1 \partial\varphi(t, x) / \partial\nu_A + \sigma_2(x)\varphi(t, x) = 0,\ x \in \Gamma,\ t \in (t_0, \vartheta)\}$$

[1] Аналогичные вопросы обсуждались также в работе: *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры в системах с распределенными параметрами. Тезисы III Всес. конференции по теории игр. Одесса, 1974.

Здесь $H^{2,1}(Q)$ — пространство Соболева, состоящее из всех элементов $L^2(Q)$, имеющих обобщенные производные первого и второго порядков по x и первого по t. Движением $y[t] = y[t]_\Delta = y[t;\ t_0,\ y_0,\ U]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ системы (1.1), (1.2) из позиции $\{t_0,\ y_0\}$, отвечающим стратегии U, назовем всякую функцию $y[\cdot]_\Delta \in C([t_0,\ \vartheta];\ L^2(\Omega))$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in \Phi$ равенству

$$(2.1)\qquad \int\limits_Q y\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - A\varphi\right)dx\,dt = \int\limits_Q (f + b_1u_1[t] - c_1v_1[t])\,\varphi\,dx\,dt + \int\limits_\Omega y_0\varphi(t_0,\ x)\,dx + \int\limits_{t_0}^{\vartheta}\int\limits_\Gamma (b_2u_2[t] - c_2v_2[t])\,F(\varphi)\,d\Gamma\,dt$$

Здесь $F(\varphi) = \varphi / \sigma_1$ при $\sigma_1 \neq 0$ и $F(\varphi) = -\sigma_2^{-1}\partial\varphi / \partial\nu_A$ при $\sigma_1 = 0$; на каждом промежутке $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$

$$\{u_1[\cdot],\ u_2[\cdot]\} = U(\tau_i,\ \tau_{i+1},\ y[\tau_i])$$

и $v_1[t]$, $v_2[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — какие-то измеримые реализации помех со значениями в $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ соответственно.

Существование движений можно проверить, например, методом Галеркина или используя метод транспонирования [9,18] и опираясь на теорию однородных краевых задач для уравнений параболического типа [17].

Исходная задача управления может быть теперь сформулирована следующим образом.

Пусть M и N — некоторые множества в пространстве $[t_0,\ \vartheta] \times L^2(\Omega)$.

Задача 2.1. Требуется построить стратегию U со свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать число $\delta > 0$, такое, что для каждого движения $y[t]_\Delta = y[t;\ t_0,\ y_0,\ U]_\Delta$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$ в некоторый момент $t_y = t(y[\cdot]_\Delta)$ выполняется условие

$$(2.2)\qquad \rho(\{t_y,\ y[t_y]_\Delta\},\ M) = \inf_{\{t_*,\ h_*\}\in M} (|t_y - t_*|^2 + \|y[t_y]_\Delta - h_*\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$(2.3)\qquad \rho(\{t,\ y[t]_\Delta\},\ N) \leqslant \varepsilon,\quad t_0 \leqslant t \leqslant t_y$$

Укажем условия разрешимости задачи 2.1 и способ построения искомой стратегии.

3. Пусть $\{\lambda_j,\ \omega_j\}$ — решение в $H^1(\Omega)$ спектральной задачи

$$A\omega = -\lambda\omega,\quad x \in \Omega;\quad \sigma_1\frac{\partial\omega}{\partial\nu_A} + \sigma_2\omega|_\Gamma = 0$$

где $H^m(\Omega)$ — пространство Соболева порядка m в области Ω (см., например, [10,17,18]). Пусть $\{\alpha_j;\ j = 1, 2, \ldots\}$ — некоторое множество чисел α_j, удовлетворяющих условиям: если $\sigma_1 \neq 0$, то $\alpha_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots$, если $\sigma_1 = 0$, то

$$0 < \alpha_j < 1,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2 < \infty,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2\left\|\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu_A}\right\|^2_{L^2(\Gamma)} < \infty$$

(Такие числа α_j существуют, так как при сделанных предположениях о параметрах системы и области Ω согласно теоремам вложения (см., например, [16]) $\partial\omega_j / \partial\nu_A \in L^2(\Gamma)$.)

Обозначим для $y \in L^2(\Omega)$

$$\|y\|_\alpha = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j\rangle_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$

Здесь $\langle\cdot, \cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ — символ скалярного произведения в $L^2(\Omega)$. При $\sigma_1 \neq 0$ имеем $\|y\|_\alpha = \|y\|_{L^2(\Omega)}$.

Пусть K — некоторое множество в пространстве позиций $[t_0, \vartheta] \times \times L^2(\Omega)$. Обозначим символом U^e стратегию следующего вида. Пусть выбрана некоторая тройка $\{t_1, t_2, y\}$. Если $K(t_1) = \varnothing$, то $U^e(t_1, t_2, y)$ — произвольная программа $u(\cdot; t_1, t_2)$. Если $K(t_1) \neq \varnothing$, то $U^e(t_1, t_2, y) = \{u_1^e(\cdot), u_2^e(\cdot)\}$. Здесь $u_\nu^e(\cdot)$, $\nu = 1, 2$— функции со свойством: существуют последовательности $\{u_\nu^{(k)}\}$, $\nu = 1, 2$ и $\{z^{(k)}\}$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \|y - z^{(k)}\|_\alpha = \inf_{h\in K(t_1)} \|y - h\|_\alpha$$

$$z^{(k)} \in K(t_1), \quad k = 1, 2,\ldots$$

$$\{u_\nu^{(k)}\} \to u_\nu^e \text{ слабо в } L^2([t_1, t_2); R^{r_\nu})$$

$$\langle u_1^{(k)}, l_1(z^{(k)} - y)\rangle_{L^2([t_1, t_2);\, L^2(\Omega;\, R^{r_1}))} =$$

$$= \max_{\{u_1\}} \langle u_1, l_1(z^{(k)} - y)\rangle_{L^2([t_1, t_2);\, L^2(\Omega;\, R^{r_1}))}$$

$$\langle u_2^{(k)}, l_2(z^{(k)} - y)\rangle_{L^2([t_1, t_2);\, R^{r_2})} = \max_{\{u_2\}} \langle u_2, l_2(z^{(k)} - y)\rangle_{L^2([t_1, t_2);\, R^{r_2})}$$

$$l_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j\rangle_{L^2(\Omega)}\, e^{-\lambda_j(2t_2 - t_1 - t)} \omega_j b_1(t, x)$$

$$l_2(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j\rangle_{L^2(\Omega)}\, e^{-\lambda_j(2t_2 - t_1 - t)} \langle b_2, F(\omega_j)\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

Здесь $K(t_1)$ — сечение K плоскостью $t = t_1$; $\{u_\nu\}$, $\nu = 1, 2$ — совокупность всех измеримых на $[t_1, t_2)$ функций $u_\nu(t)$ со значениями в $P_\nu(t)$. Программа $\{u_1^e(\cdot), u_2^e(\cdot)\}$ при условии $K(t_1) \neq \varnothing$ всегда существует. Стратегию U^e назовем экстремальной к множеству K.

Назовем стратегией $V = V(t_1, t_2, y)$ правило, ставящее в соответствие всякой тройке $\{t_1, t_2, y\}$ некоторую пару $v(\cdot; t_1, t_2) = \{v_1(\cdot), v_2(\cdot)\}$ измеримых на промежутке $[t_1, t_2)$ функций $v_1(t)$, $v_2(t)$ со значениями в $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ соответственно (так что $V(t_1, t_2, y) = v(\cdot; t_1, t_2)$).

Пусть $W(M, N)$ — совокупность всех пар $\{t_*, y_*\} \in [t_0, \vartheta] \times L^2(\Omega)$ со свойством: каковы бы ни были стратегия V, числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, существует по крайней мере одно движение $y[t] = y[t]_\Delta = y[t; t_*, y_*, V]_\Delta$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, для которого в некоторый момент $t_y = t(y[\cdot]_\Delta) \in \in [t_*, \vartheta]$ выполняется условие

$$\rho(\{t_y, y[t_y]_\Delta\}, M) \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho(\{t, y[t]_\Delta\}, N) \leqslant \varepsilon, \quad t_* \leqslant t \leqslant t_y$$

(движения $y\,[t;\ t_*,\ y_*,\ V]_\Delta$ определяются по аналогии с движениями $y\,[t;\ t_*,\ y_*,\ U]_\Delta$: в определении последних следует лишь величины U, $v_i\,[t]$ заменить на величины V, $u_i\,[t]$, где теперь $u_i\,[t]$ — какие-то измеримые функции со значениями в $P_i\,(t)$, $i = 1,\ 2$).

Теорема 3.1. Пусть множества M и N замкнуты в метрике

$$(3.1) \qquad \|\{t,\ y\}\|_\alpha = (t^2 + \|y\|_\alpha{}^2)^{1/2}$$

Задача 2.1 разрешима тогда и только тогда, когда

$$(3.2) \qquad \{t_0,\ y_0\} \in W\,(M,\ N)$$

При условии (3.2) задачу 2.1 разрешает стратегия U^e, экстремальная к множеству $W\,(M,\ N)$.

Необходимость условия (3.2) для разрешимости задачи 2.1 очевидна. Утверждение, что при условии (3.2) стратегия U^e, экстремальная к множеству W, решает задачу 2.1, проверяется следующим образом. Прежде всего, показывается (см. подобные рассуждения в [1,4]), что для каждого движения $y\,[t]_\Delta = y\,[t;\ t_0,\ y_0,\ U^e]_\Delta$, отвечающего разбиению Δ с достаточно малым диаметром $\delta\,(\Delta)$, точка $\{t,\ y\,[t]_\Delta\}$ остается в малой окрестности W, измеренной в метрике (3.1), вплоть до момента попадания в малую окрестность множества M, также измеренную в метрике (3.1). Поэтому каждая такая точка $\{t,\ y\,[t]_\Delta\}$ при достаточно малом $\delta\,(\Delta)$ необходимо побывает при $t \leqslant \vartheta$ в наперед заданной окрестности M прежде, чем покинет наперед заданную окрестность множества N, причем эти окрестности измеряются в метрике (3.1). Учтем, что всякое ограниченное множество в $L^2(\Omega)$ компактно в метрике (3.1) и что множество движений $y\,[\cdot;\ t_0,\ y_0,\ U^e]_\Delta$ компактно в пространстве $C\,([t_0,\ \vartheta];\ L^2\,(\Omega))$, а также учтем замкнутость M и N в метрике (3.1). Отсюда получаем, что для каждого движения $y\,[\cdot;\ t_0,\ y_0,\ U^e]_\Delta$ выполняются соотношения (2.2), (2.3), если только диаметр $\delta\,(\Delta)$ разбиения Δ достаточно мал.

Замечание 3.1. Рассмотрим следующую задачу об уклонении. Требуется построить стратегию V со свойством: существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, такие, что для каждого движения

$$y\,[t]_\Delta = y\,[t;\ t_0,\ y_0,\ V]_\Delta, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

с $\delta\,(\Delta) \leqslant \delta$ выполняется условие: не существует момента $t_y = t\,(y\,[\cdot]_\Delta)$, для которого

$$\rho\,(\{t,\ y\,[t]_\Delta\},\ N) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_y$$

$$\rho\,(\{t_y,\ y\,[t_y]_\Delta\},\ M) \leqslant \varepsilon$$

Пусть множества M и N замкнуты в метрике (3.1). Можно проверить, что задача об уклонении имеет решение тогда и только тогда, когда для начальной позиции $\{t_0,\ y_0\}$ не выполняется условие (3.2). Стратегия V, решающая эту задачу, также может быть построена в форме стратегии, экстремальной к некоторому множеству в пространстве $[t_0,\ \vartheta] \times L^2\,(\Omega)$.

Замечание 3.2. Замкнутость M и N в метрике (3.1) заведомо имеет место, если проекции этих множеств на пространство $L^2\,(\Omega)$ — ограниченные слабо замкнутые множества в $L^2\,(\Omega)$.

4. Укажем случаи, когда множество $W(M, N)$ допускает аналитическое описание.

Предположим, что $N = L^2(\Omega)$, множество M целиком лежит в гиперплоскости $t = \vartheta$: $M = \{\{t, y\} | t = \vartheta,\ y \in M(\vartheta)\}$ и его сечение $M(\vartheta)$ — выпуклое ограниченное замкнутое множество в пространстве $L^2(\Omega)$.

Обозначим

$$G_0(t, \vartheta) y = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\cdot) e^{-\lambda_j(\vartheta - t)} \langle \omega_j, y\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$G_1(t, \vartheta) f = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\cdot) \int_t^{\vartheta} e^{-\lambda_j(\vartheta-\tau)} \langle \omega_j, f\rangle_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$G_{1u}(t, \vartheta) u_1 = G_1(t, \vartheta) b_1 u_1, \qquad G_{1v}(t, \vartheta) v_1 = G_1(t, \vartheta) c_1 v_1$$

$$G_{2u}(t, \vartheta) u_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\cdot) \int_t^{\vartheta} \langle F(\omega_j), b_2\rangle_{L^2(\Gamma)} e^{-\lambda_j(\vartheta-\tau)} u_2(\tau)\, d\tau$$

$$G_{2v}(t, \vartheta) v_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\cdot) \int_t^{\vartheta} \langle F(\omega_j), c_2\rangle_{L^2(\Gamma)} e^{-\lambda_j(\vartheta-\tau)} v_2(\tau)\, d\tau$$

$$\gamma(t, y, \vartheta) = \sup_{\|h\|_{L^2(\Omega)}=1} \varphi(t, y, \vartheta, h) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t, y, \vartheta, h) = {} & \rho_{1v}(t, \vartheta, h) + \rho_{2v}(t, \vartheta, h) - \\ & - \rho_{1u}(t, \vartheta, h) - \rho_{2u}(t, \vartheta, h) + \rho_M(h) - \\ & - \langle h, G_1(t, \vartheta) f\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle h, G_0(t, \vartheta) y\rangle_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\rho_{iv}(t, \vartheta, h) = \max_{\{v_i\}} \langle h, G_{iv}(t, \vartheta) v_i\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\rho_{iu}(t, \vartheta, h) = \max_{\{u_i\}} \langle h, G_{iu}(t, \vartheta) u_i\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\rho_M(h) = \min_{q \in M(\vartheta)} \langle h, q\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Условие 4.1. Если при некоторых $t \in [t_0, \vartheta)$, $y \in L^2(\Omega)$ выполняется неравенство $\gamma(t, y, \vartheta) > 0$, то верхняя грань в (4.1) достигается на единственном элементе.

Условие 4.1 — аналог известного условия регулярности [1] (см. также [8]).

Имеет место

Теорема 4.1. Пусть выполняется условие 4.1. Элемент $\{t, y\} \in W(M, L^2(\Omega))$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t, y, \vartheta) \leqslant 0$.

Доказательство теоремы 4.1 проводится по плану доказательства аналогичного утверждения из [8].

Замечание 4.1. Условие 4.1 заведомо выполняется, если при каждом $t \in [t_0, \vartheta)$ функционал

$$\chi(t, \vartheta, h) = \rho_{1v}(t, \vartheta, h) + \rho_{2v}(t, \vartheta, h) - \rho_{1u}(t, \vartheta, h) - \rho_{2u}(t, \vartheta, h) + \rho_M(h)$$

является вогнутым по h. В свою очередь вогнутость $\chi(t, \vartheta, h)$ при любом t

будет, например, иметь место, если выполняется следующее условие однотипности; существуют для каждого $t \in [t_0, \vartheta)$ выпуклые множества $R_i(t) \subset \subset L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, такие, что при почти всех $t \in [t_0, \vartheta)$

$$G_{tu}(t, \vartheta) P_i(t) = G_{iv}(t, \vartheta) Q_i(t) + R_i(t), \quad i = 1, 2$$

Поступила 25 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
3. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
4. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
6. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории дифференциальных игр в параболических системах. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
7. *Вайсбурд И. Ф., Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра сближения для систем с распределенными параметрами. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
8. *Осипов Ю. С.* Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх. I, II. В сб.: Управляемые системы, № 8. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1971.
9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
10. *Егоров Ю. В.* Некоторые задачи теории оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 5.
11. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
12. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. Изд-во МГУ, 1974.
13. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1974.
14. *Friedman A.* Differential games of pursuit in Banach space. J. Math. Analysis and Appl., 1969, vol. 25, No. 1.
15. *Плотников В. И.* О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы). Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 1.
16. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
18. *Lions J.-L., Magenes, E.* Problémes aux limites non homogenes et applications, vol. 2. Paris, Dunod, 1968.
19. *Kuratowski K., Rull-Nardzewski K.* A leneral theorem on selectors. Bull. L'Academ. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astronet Phys., 1965, vol. 13, No. 6.