Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 536.46 : 533.6

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

А. И. Суслов

(Москва)

Рассматривается одномерная однофазная задача со свободной границей для уравнения теплопроводности. Одно из условий на свободной границе нелинейно. Доказываются теоремы существования и единственности решений сформулированной задачи. В случае, когда задача имеет решение типа стационарной волны, устанавливаются достаточные условия устойчивости такого решения к возмущениям начальных данных.

Рассматривается задача со свободной границей

(1) $\quad T_t = T_{xx}$ в области

$D\ \{-\infty < x < s(t),\ 0 < t < A\}$

(2) $\quad T|_{t=0} = f(x), \quad T|_{x=s(t)} = 1, \quad T \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

(3) $\quad s'(t) = -u(p(t),\ T_x(s(t), t)), \quad s(0) = 0$

Эта задача возникает в одномерной теории горения пороха с постоянной температурой поверхности (см. [1, 2]). Функция $T(x, t)$ — температура пороха, u — скорость горения, $s(t)$ — координата поверхности пороха в момент времени t. Функции $T(x, t)$ и $s(t)$ подлежат определению.

Отличие задачи (1) — (3) от классической задачи Стефана состоит в том, что связь (3) между $s'(t)$ и $T_x(s(t), t)$ нелинейна. Заданная функция $p(t)$ из (3) — давление в газовой фазе ($x > s(t)$), содержащей продукты газификации пороха и продукты горения.

Предположим, что $p(t) \in C[0, A]$, $p(t) > 0$; функция $u(p, \varphi)$, где φ — производная температуры на границе $s(t)$, определена и непрерывна в области $\{0 < p < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < \infty\}$. Пусть также $0 \leqslant u(p, \varphi) \leqslant M_0$ при всех p и φ.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C^2(-\infty, 0]$, f и $f' \to 0$ при $x \to -\infty$, $f''(x)$ — ограниченная функция; $f(0) = 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Тогда в области D существует решение $T(x, t)$, $s(t)$ задачи (1) — (3), такое, что $T(x, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(D \cup \partial D)$, $T_x \in C(D \cup \partial D)$, T и $T_x \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по $t \in [0, A]$; $s(t) \in C^1[0, A]$.

Доказательство. Обозначим через G область $\{-\infty < x < 0,\ 0 < t < A\}$, через H — замыкание G и рассмотрим в области G краевую задачу

(4) $\quad T_t = T_{xx} - v(t)\, T_x$

(5) $\quad T|_{t=0} = f(x), \quad T|_{x=0} = 1, \quad T \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

где $v(t) \in C[0, A]$, $0 \leqslant v(t) \leqslant M_0$. Сформулируем вспомогательную лемму:

Лемма 1. В области G существует единственное решение $T(x, t)$ задачи (4), (5), такое, что $T(x, t) \in C^{2,1}(G) \cap C^{1+\delta}(H)$, $0 \leqslant T(x, t) \leqslant 1$, T и $T_x \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по $t \in [0, A]$.

Доказательство. Предположим, что

(6) $$v(t) \in C^{\alpha/2}[0, A], \quad f''(x) \in C^{\alpha}(-\infty, 0]$$

с некоторой постоянной $\alpha \in (0, 1)$ и, кроме того

(7) $$f''(0) - v(0) f'(0) = 0.$$

Тогда по теореме 5.2 гл. 4 из [3] в области G существует единственное решение $T(x, t)$ задачи (4), (5) из класса $C^{2+\alpha}(H)$. По теореме 10 гл. 3 из [4] уравнение (4) в области G можно дифференцировать по x любое число раз.

С помощью принципа максимума можно доказать, что $0 \leqslant T(x, t) \leqslant 1$ и, следовательно, $T_x(0, t) \geqslant 0$. Положим $\Phi(x) = (x + l)^m / l^m$. В силу свойств $f(x)$ число $l > 0$ и натуральное m можно выбрать так, что $f(x) \geqslant \Phi(x)$ при $-l \leqslant x \leqslant 0$. Из принципа максимума следует, что $T(x, t) \geqslant \Phi(x)$ в области $\{-l \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant A\}$, если m достаточно велико. Отсюда вытекает, что $T_x(0, t) \leqslant m / l$. Дифференцируя уравнение (4) по x и применяя принцип максимума, получаем

(8) $$|T_x| \leqslant \max\{\max|f'(x)|, m/l\}$$

Так как уравнение (4) при v и f, удовлетворяющих условиям (6), (7), выполняется в замкнутой области H, то $0 \leqslant T_{xx}(0,t) \leqslant mM_0 / l$. Аналогично оценке (8) получаем неравенство

(9) $$|T_{xx}| \leqslant \max\{\sup|f''(x)|, mM_0/l\}$$

Проинтегрируем тождество Грина для функций $T(\xi, \tau) - 1$ и фундаментального решения

$$K(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\left(x - \xi - \int_\tau^t v(y)\,dy\right)^2 \Big/ 4(t-\tau)\right]$$

уравнения (4) по области $\{\varepsilon < \tau < t - \varepsilon, -\infty < \xi < 0\}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

(10) $$T(x, t) - 1 = \int_0^t T_\xi(0, \tau) K(x, t; 0, \tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^0 [f(\xi) - 1] K(x, t; \xi, 0)\,d\xi$$

Дифференцируя (10) по x и учитывая, что $K_x = -K_\xi$, приходим к равенству

(11) $$T_x(x, t) = \int_0^t T_\xi(0, \tau) K_x(x, t; 0, \tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^0 f'(\xi) K(x, t; \xi, 0)\,d\xi$$

Из (8), (10), (11) следует, что T, $T_x \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по $t \in [0, A]$, если f и $f' \to 0$ при $x \to -\infty$.

Далее по теореме 4 гл. 7 из [4] для любого $\delta \in (0,1)$ справедливо неравенство

(12) $$\|T\|_{C^{1+\delta}(H)} \leqslant B_1 \|f\|_{C^2(-\infty, 0]}$$

где постоянная B_1 зависит от δ, M_0, A.

Таким образом, лемма доказана при дополнительных ограничениях (6), (7) на $v(t)$, $f(x)$.

В общем случае аппроксимируем функции v, f функциями $v_k(t)$, $f_k(x)$, удовлетворяющими условиям (6), (7), причем $0 \leqslant v_k(t) \leqslant M_0$, $v_k(t) \to v(t)$ при $k \to \infty$ равномерно на $[0, A]$, $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ по норме $C^1(-\infty, 0]$.

Рассмотрим краевую задачу (4), (5) с $v_k(t)$ вместо $v(t)$ в уравнении (4) и с $f_k(x)$ вместо $f(x)$ в начальном условии (5). Эта задача, как показано выше, имеет решение $T_k \in C^{2+\alpha}(H)$ и для T_k справедливы оценки (8), (9), (12). Из (9) следует, что производные T_{kxx} ограничены постоянными, не зависящими от k. Обозначим через G^ρ множество точек $(x, t) \in G$, удаленных от границы G на расстояние, не меньшее ρ. В области G^ρ можно по методу [5] оценить производные T_{kxxx} постоянной, зависящей лишь от M_0, $\sup|T_{kxx}|$ и ρ. Из леммы 6 работы [6] вытекает, что в области $G^{2\rho}$ функция T_{kxx} непрерывна по Гельдеру с показателем $^2/_3$ и константой Гельдера, не зависящей от k.

Следовательно, найдется подпоследовательность $k_n \to \infty$, такая, что $T_{k_n} \to T$, $T_{k_n x} \to T_x$ равномерно в H, $T_{k_n xx} \to T_{xx}$ равномерно в области $G^{2\rho} \cap \{x \geqslant -N\}$, $N > 1$ — любое число. Можно показать, что $T(x, t)$ — единственное решение задачи (4), (5), T и $T_x \to 0$ при $x \to -\infty$ равномерно по $t \in [0, A]$ и, кроме того, для T — справедлива оценка (12). Лемма 1 доказана.

Пусть $C^{1,0}(H)$ — банахово пространство функций, непрерывных в H и имеющих непрерывную в H производную по x, с нормой

$$\| T \|_{1,0} = \| T \|_{C(H)} + \| T_x \|_{C(H)}$$

Обозначим через V_K множество функций $\theta \in C^{1,0}(H)$, таких, что $\theta(x, 0) = f(x)$, $\theta(0, t) = 1$, $0 \leqslant \theta(x, t) \leqslant 1$ и $\| \theta \|_{1,0} \leqslant K$. В области G рассмотрим краевую задачу для уравнения

(13) $$T_t = T_{xx} - u(p(t), \theta_x(0, t)) T_x, \quad \theta(x, t) \in V_K$$

с граничными условиями (5).

По лемме 1 существует единственное решение $T_\theta(x, t)$ задачи (5), (13), причем $0 \leqslant T_\theta(x, t) \leqslant 1$ и для T_θ справедливы оценки (8) и (12). Поэтому на множестве V_K можно определить преобразование F, ставящее в соответствие функции $\theta \in V_K$ решение $T_\theta(x, t)$ задачи (5), (13).

Из (8) следует, что при достаточно большом K имеет место вложение $FV_K \subset V_K$. Используя (12) и то, что $T_{\theta x} \to 0$ при $x \to -\infty$, можно доказать компактность множества FV_K в $C^{1,0}(H)$. Оператор F непрерывен на V_K.

Действительно, пусть $T_i = F\theta_i$, $u_i(t) = u(p(t), \theta_{ix}(0, t))$, $\theta_i \in V_K$, $i = 1,2$. Положим $z = T_1 - T_2$. Функция $z(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$z_t = z_{xx} - u_1(t) z_x - [u_1(t) - u_2(t)] T_{2x}$$

и однородным граничным условиям. Поэтому справедлива оценка

(14) $$\| z \|_{C^{1+\delta}(H)} \leqslant B_2 \| (u_1 - u_2) T_{2x} \|_{C(H)}$$

аналогичная оценке (12). Здесь B_2 зависит от δ, M_0, A.

Предположим, что $\| \theta_1 - \theta_2 \|_{1,0} \leqslant \gamma$. Тогда

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant A} | \theta_{1x}(0, t) - \theta_{2x}(0, t) | \leqslant \gamma$$

Поскольку функция $u(p, \varphi)$ непрерывна по своим аргументам, то $| u_1(t) - u_2(t) | \leqslant \varepsilon(\gamma)$. Таким образом, из неравенства (14) следует непрерывность оператора F.

Множество V_K замкнуто и выпукло в $C^{1,0}(H)$. Следовательно, по теореме Шаудера оператор F имеет в V_K неподвижную точку $T_*(x, t)$. Функция $T_*(x, t)$ удовлетворяет уравнению

(15) $$T_t = T_{xx} - u(p(t), T_x(0, t)) T_x$$

и условиям (5). Положим

$$s(t) = -\int_0^t u(p(\tau), T_{*x}(0, \tau))\, d\tau$$

и сделаем замену переменных $t = t$, $x' = x + s(t)$. Функции $T_*^\circ(x', t) = T_*(x' - s(t), t)$ и $s(t)$ являются решением задачи (1) — (3). Теорема 1 доказана.

При более жестких ограничениях на $u(p, \varphi)$ методами работы [7] можно установить теорему существования и единственности решения задачи (1) — (3), ослабив при этом требования к $f(x)$:

Теорема 2. Если $u(p, \varphi)$ непрерывна по p и липшиц-непрерывна по φ, $0 \leqslant u \leqslant M_0$; $f(x) \in C^1(-\infty, 0]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(0) = 1$, $f(x) \to 0$ при $x \to -\infty$, то в области D существует единственное решение $T(x, t)$, $s(t)$ задачи (1) — (3), такое, что $T \in C^{2,1}(D) \cap C(D \cup \partial D)$, $s \in C^1[0, A]$.

Если $p(t) \equiv 1$, $u(1, 1) = 1$ и $f(x) = e^x$, то задача (1) — (3) имеет решение типа стационарной волны $T = e^{x+t}$, $s(t) = -t$. Вопрос об устойчивости стационарного решения к возмущениям начального распределения температуры $f(x)$ представляет интерес. Ниже формулируется и доказывается теорема, дающая достаточные условия устойчивости стационарного решения при постоянном давлении.

Теорема 3. Если $p(t) \equiv 1$, $|f''(x)| \leqslant Me^{\alpha x}$, где $\alpha > 0$; функция $u(\varphi) \equiv u(1, \varphi)$ гельдер-непрерывна и монотонно убывает по φ при $\varphi \geqslant 0$, то $u(T_x(s(t), t)) \to 1$ при $t \to \infty$, а график $T(x, t)$ как функции x при $t \to \infty$ становится сколь угодно близок по форме к графику функции e^x.

Доказательство. Достаточно показать, что если $T(x, t)$ — решение задачи (5), (15), то $[T(x, t) - e^x] \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in (-\infty, 0]$ и $u(t) = u(T_x(0, t)) \to 1$ при $t \to \infty$.

Пусть $r = T(x, t) - e^x$, $q = r_x = T_x(x, t) - e^x$. Функции r и q удовлетворяют в области G уравнениям

$$r_t = r_{xx} - u(t)\, r_x - (u(t) - 1)\, e^x \tag{16}$$

$$q_t = q_{xx} - u(t)\, q_x - (u(t) - 1)\, e^x \tag{17}$$

Кроме того, $r(0, t) = 0$, $r \to 0$ при $x \to -\infty$.

Умножим (16) на r, (17) на q, сложим полученные равенства и проинтегрируем по x от $-\infty$ до 0. Поскольку

$$\int_{-\infty}^0 [(u-1)\, e^x r + (u-1)\, e^x q]\, dx =$$

$$= (u-1) \int_{-\infty}^0 (e^x r + e^x r_x)\, dx = (u-1) \int_{-\infty}^0 (e^x r)_x\, dx = 0$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^0 \frac{r^2 + r_x^2}{2}\, dx = -\int_{-\infty}^0 (r_x^2 + r_{xx}^2)\, dx +$$

$$+ r_x(0, t)\, r_{xx}(0, t) - \frac{u}{2} r_x^2(0, t)$$

Так как $u(\varphi)$ и $T_x(0, t)$ (в силу (12)) непрерывны в смысле Гельдера по своим аргументам, то функция $u(t) = u(T_x(0, t))$ непрерывна в смысле Гельдера по t. Из результатов [8] следует, что в этом случае уравнение (15) выполняется в замкнутых областях $H \cap \{t \geqslant \rho\}$, $\rho > 0$. Следовательно, $r_{xx}(0, t) = u(t)\, r_x(0, t) + u(t) - 1$ при $t > 0$ и

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{r^2+r_x^2}{2}\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{0}(r_x^2 + r_{xx}^2)\,dx + \\ + \frac{u}{2}r_x^2(0,t) + (u-1)\,r_x(0,t)$$

при $t > 0$. Из условия $|f''(x)| \leqslant Me^{\alpha x}$ с помощью принципа максимума можно получить неравенства $|T, T_x, T_{xx}| \leqslant M_1e^{\alpha x}$. Поэтому все интегралы, входящие в (18), имеют смысл и возможны перестановки дифференцирования по t и интегрирования по x.

Докажем, что правая часть равенства (18) неположительна.

Поскольку функция $u(\varphi)$ монотонно убывает и $u(1) = 1$, при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $(u(t) - 1)\, r_x(0, t) \leqslant 0$. Оценим слагаемое $u(t)\, r_x^2(0, t)/2$ с помощью членов, имеющих соответствующий знак. Если $u(t_1) > 2$, то $0 \leqslant T_x(0, t_1) < 1$ и, следовательно, $-1 \leqslant r_x(0, t_1) < 0$. Отсюда получаем

$$(19)\qquad \frac{u(t_1)}{2}r_x^2(0,t_1) + (u(t_1)-1)\,r_x(0,t_1) \leqslant \\ \leqslant |r_x(0,t_1)|\left(\frac{u(t_1)}{2} - u(t_1) + 1\right) = |r_x(0,t_1)|\left(1 - \frac{u(t_1)}{2}\right) < 0$$

Пусть $u(t_2) \leqslant 2$. Так как

$$\frac{u(t)}{2}r_x^2(0,t) = \int\limits_{-\infty}^{0} u(t)\,r_x(x,t)\,r_{xx}(x,t)\,dx$$

то

$$(20)\qquad \frac{u(t_2)}{2}r_x^2(0,t_2) - \int\limits_{-\infty}^{0}[r_x^2(x,t_2) + r_{xx}^2(x,t_2)]\,dx = \\ = -\int\limits_{-\infty}^{0}(r_x^2 - ur_xr_{xx} + r_{xx}^2)\big|_{t=t_2}dx \leqslant 0$$

Из (19) и (20) следует неположительность правой части равенства (18).

Положим

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{r^2+r_x^2}{2}\,dx$$

Поскольку $g(t) \geqslant 0$ и, как показано выше, $g'(t) \leqslant 0$ при всех $t > 0$, то существует $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = g_0 \geqslant 0$.

Предположим, что $g_0 > 0$. Так как $r(0, t) = 0$, справедливо неравенство

$$(21)\qquad \int\limits_{-\infty}^{0} r^2dx \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}|r|\,dx\right)^{4/3}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}r_x^2dx\right)^{1/3}$$

Неравенство (21) доказывается так же, как теорема 2.2 гл. 3 из [3]. Так как $0 \leqslant T \leqslant M_1 e^{ax}$, то

$$\int_{-\infty}^{0} |r|\, dx < B_3$$

где B_3 не зависит от t. Поэтому из (21) следует, что

$$\int_{-\infty}^{0} r_x^2 dx \geqslant g_1 > 0$$

при всех $t > 0$, если $g_0 > 0$.

Полупрямую $\{t > 0\}$ разобьем на три множества: $S_1 = \{t\colon u(t) \geqslant 2\}$, $S_2 = \{t\colon {}^3/_2 < u(t) < 2\}$, $S_3 = \{t\colon u(t) \leqslant {}^3/_2\}$. При $t \in S_1$ справедливо неравенство

$$g'(t) \leqslant -\int_{-\infty}^{0} r_x^2 dx \leqslant -g_1 < 0 \tag{22}$$

Из свойств $u(\varphi)$ следует, что $r_x(0, t) < -g_2 < 0$, если ${}^3/_2 < u(t) < 2$. Учитывая (20), получаем

$$g'(t) \leqslant (u-1)\, r_x(0, t) \leqslant -g_2/2 \tag{23}$$

при $t \in S_2$. При $t \in S_3$ имеем

$$g'(t) \leqslant -\frac{7}{16} \int_{-\infty}^{0} r_x^2 dx \leqslant -\frac{7}{16} g_1 < 0 \tag{24}$$

Неравенства (22) — (24) получены в предположении $g_0 > 0$. Из этих неравенств следует, что $g'(t) < -g_3 < 0$ при всех $t > 0$ и $g \to -\infty$ при $t \to \infty$. Таким образом, предположение $g_0 > 0$ приводит к противоречию. Значит, $g_0 = 0$ и

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{0} r^2 dx = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{0} r_x^2 dx = 0$$

Так как

$$r^2 = -\int_{x}^{0} 2 r r_x dx \leqslant \int_{-\infty}^{0} (r^2 + r_x^2)\, dx$$

то $r \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x. Из ограниченности производной r_{xx} и равенства $r(0, t) = 0$ вытекает, что $r_x(0, t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда получаем, что $T_x(0, t) \to 1$ и $u(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Теорема 3 доказана.

Автор благодарит О. А. Олейник и В. Б. Либровича за полезные обсуждения и внимание к работе.

Поступила 16 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б.* К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11—12.
2. *Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б.* Теория нестационарного горения пороха. М., «Наука», 1975.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
5. *Бернштейн С. Н.* Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа. Докл. АН СССР, 1938, т. 18, № 7.
6. *Олейник О. А., Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 5.
7. *Friedman A.* Free boundary problems for parabolic equations. I. Melting of solids. J. Math. and Mech., 1959, vol. 8, No. 4.
8. *Ciliberto C.* Formule di maggiorazione e teoremi di essistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili. Ricerche mat., 1954, vol. 3, No. 1.