

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАННЫХ КАПЕЛЬ

А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в области, ограниченной поверхностью, положение которой определяется конечным числом параметров. Определена функция Лагранжа, зависящая от конечного числа переменных, для следующих случаев:

1. Потенциальное циклическое движение жидкости с деформируемой границей.
2. Циклическое плоскопараллельное движение жидкости с постоянным вихрем и аналогичное вихревое осесимметричное течение.

Показано, что внутри капли в осесимметричном потоке при больших числах Рейнольдса устанавливается поле скоростей, вихрь которого пропорционален расстоянию до оси симметрии. Для вихревого течения внутри капли из уравнений Лагранжа получены вариационное уравнение стационарной формы капли и условие ее устойчивости, которые исследованы на семействе эллипсоидов.

Для заданных интенсивности вихря и числа Вебера найдено существование, вообще говоря, двух стационарных форм капли. Для случая капли жидкости в газе одна из форм всегда неустойчива. Показано, что динамический напор внутри капли может существенно превосходить динамический напор внешнего обтекания, и при этом сложное отрывное течение вокруг капли практически не влияет на ее форму и устойчивость. К этому случаю относится свободно падающая в воздухе капля воды, которая может иметь форму, вытянутую параллельно скорости потока.

1. Некоторые выводы из точной постановки задачи стационарного движения капли. Рассматривается стационарное осесимметричное движение капли несжимаемой вязкой жидкости внутри другой вязкой несжимаемой жидкости. Пусть v_+ , ζ_+ — соответственно векторы скорости и вихря движения жидкости вне капли, μ_+ , ν_+ — динамическая и кинематическая вязкости, ρ_+ — плотность жидкости вне капли. Соответствующие характеристики движения жидкости внутри капли — v_- , ζ_- , μ_- , ν_- , ρ_- . Пусть x , y , α — цилиндрические координаты, координата x направлена по оси симметрии, y — расстояние до оси, α — азимутальный угол. В этой системе координат векторы скорости имеют только две первые отличные от нуля компоненты, а у векторов вихря ζ_+ , ζ_- только третьи компоненты отличны от нуля ζ_+ , ζ_- . На поверхности капли S выполняются условия равенства скоростей и касательных напряжений и условие для скачка нор-

мальных напряжений на границе двух сред с поверхностным натяжением

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v_+' &= v_-' , \quad v_+' = |v_+'| , \quad v_-' = |v_-'| \\ \mu_+ (\zeta_+' + 2\kappa v_+') &= \mu_- (\zeta_-' + 2\kappa v_-') \\ p_{nn}^+ - p_{nn}^- &= 2H\sigma \end{aligned}$$

где κ — кривизна образующей поверхности S , H — средняя кривизна поверхности S , σ — коэффициент поверхностного натяжения.

В системе координат, связанной с каплей, скорость v_+' на бесконечности должна стремиться к постоянному вектору u (скорость жидкости на бесконечности).

Число Рейнольдса R_+ внешнего течения предполагается большим. Поэтому вне тонкого пограничного слоя $\delta \sim l / \sqrt{R_+}$ (l — характерный размер капли) скорость v_+' близка к скорости жидкости v_+ при потенциальном обтекании.

Внутри капли устанавливается поле скорости, вектор вихря которого всюду отличен от нуля. Можно показать, что в пределе $v_- \rightarrow 0$ внутри капли устанавливается поле скоростей, азимутальная компонента вектора вихря которого пропорциональна расстоянию до оси симметрии

$$(1.2) \quad \zeta_-' \rightarrow \zeta = y\omega, \quad \omega = \text{const}$$

Действительно, в цилиндрических координатах $\omega' = \zeta' / y$ удовлетворяет уравнению

$$(1.3) \quad (v_-' \nabla) \omega' = v_- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega'$$

При $v_- \rightarrow 0$ величина ω' вдоль линии тока остается постоянной. Граница капли является линией тока и поэтому на ней ω' стремится к постоянной величине. Так как для решений уравнения (1.3) максимум и минимум достигаются на границе области [1], то всюду внутри капли в пределе $v_- \rightarrow 0$ величина ω' стремится к постоянной.

Замечание 1.1. Соответствующие рассуждения для плоского случая приводятся в [2].

Кроме того, решение Адамара — Рыбчинского [3] для медленного движения капли показывает, что и при большой вязкости величина ω' близка к постоянной.

Таким образом, для оценок можно считать, что внутри капли происходит движение с постоянной завихренностью, откуда для скорости и вихря на границе капли $\zeta_-' \sim v_-' / l \sim \omega l$.

Движение капель можно подразделить на два случая. В первом случае $v_-' \ll v_+$ вне капли вблизи границы S устанавливается течение, близкое к течению в пограничном слое δ на твердой границе. На толщине пограничного слоя δ скорость сильно изменяется от v_+ до $v_+' = v_-'$. Величина вихря на границе вне капли $\zeta_+' \sim v_+ / \delta$, откуда из граничного условия (1.1) получается оценка для характеристик, определяющих движение капли

$$(1.4) \quad v_-' / v_+ \sim \mu_+ \sqrt{R_+} / \mu_- \ll 1$$

Оценка (1.4) обычно выполняется при движении жидких капель в газе. Так, для капли воды в воздухе отношение $\mu_+ / \mu_- \approx 0.02$ и для чисел Рейнольдса $R_+ \sim 100$ можно считать, что условие (1.4) выполнено.

Для кинетических энергий жидкости вне капли T_+ и внутри капли T_- из (1.4) можно получить следующие оценки:

$$(1.5) \quad \frac{T_-}{T_+} \sim \frac{\rho_-}{\rho_+} \left(\frac{v_-'}{v_+} \right)^2 \sim \frac{\rho_+ v_+^2}{\rho_- v_-^2} R_+$$

Из оценки (1.5) следует, что для многих практически важных случаев кинетическая энергия внутреннего движения капли сравнима и даже может превосходить кинетическую энергию внешнего движения. Так, для капли воды в воздухе $T_- / T_+ \sim 0.3 R_+$.

В другом случае

$$(1.6) \quad \mu_+ \sqrt{R_+} / \mu_- \geq 1, v_-' \sim v_+$$

скорость потенциального движения жидкости вне капли одного порядка со скоростью внутри капли.

В этом случае отношение кинетических энергий по порядку величины равно отношению плотностей

$$(1.7) \quad T_- / T_+ \sim \rho_- / \rho_+$$

В обоих случаях оценки (1.5) и (1.7) показывают, что при движении капель в газе внутреннее движение и поверхностное натяжение оказывают более существенное влияние на форму и устойчивость капли, чем внешний поток. Однако на силу сопротивления капли, а значит и скорость свободного падения, напротив, существенно влияет внешнее течение, что можно показать при помощи аналогичных оценок для диссипации энергии. В дальнейшем предполагается скорость движения капли известной. Это упрощает задачу, так как отпадает необходимость расчета сложного отрывного обтекания.

2. Динамическая модель капли. При больших числах Рейнольдса распределение нормальных напряжений на границе капли мало отличается от давлений соответствующих течений идеальных жидкостей. В связи с этим форму и устойчивость капли можно исследовать в рамках идеальных жидкостей. При таком подходе к решению рассматриваемой проблемы обычно предполагают, что течение как снаружи, так и внутри капли потенциальное [4-6]. Последнее означает, что внутри стационарно движущейся капли движение отсутствует. Однако оценки (1.5), (1.7) показывают, что установившееся внутреннее движение капли является определяющим при расчете формы и устойчивости капли.

В пределе большого числа Рейнольдса внутри капли устанавливается течение идеальной жидкости, где $v_-, \zeta_- (0, 0, \zeta_-), p_-, \rho_-$ — соответственно векторы скорости и вихря, давление и плотность жидкой капли. Как было показано выше (1.2), азимутальная компонента вихря пропорциональна расстоянию до оси симметрии.

Если при обтекании капли пренебречь явлениями отрыва и вихревого следа, то аналогично [4-6] можно предположить, что вне капли происходит

безотрывное потенциальное обтекание идеальной несжимаемой жидкости (v_+ , p_+ , ρ_+ — соответственно скорость, давление и плотность жидкости вне капли). Это допущение, как следует из изложенного выше, не является существенным ограничением для обтекания капли газом.

На границе капли вместо условий (1.1) для вязкой жидкости следует удовлетворить условиям равенства нормальных скоростей и скачка давлений

$$(2.1) \quad v_{+n} = v_{-n}, \quad p_- - p_+ = 2H\sigma$$

Решение, удовлетворяющее условию (1.2) внутри капли, условию потенциальности снаружи и граничным условиям (2.1), можно получить при любом значении ω . При этом величину завихренности ω в рамках идеальной жидкости найти невозможно, она может быть определена только для вязкой жидкости при помощи, например, оценок (1.5), (1.7).

Пусть $F(x, y, q_i) = 0$ — уравнение поверхности S капли. Обобщенные координаты q_i и скорости \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) определяют положение поверхности S и скорость движения ее по нормали. Тогда кинетическая энергия жидкости внутри и вне капли будет однозначной функцией обобщенных координат q_i и скоростей \dot{q}_i , а также величины, задающей завихренность внутри капли ω . Поэтому можно ожидать, что для движения поверхности капли S справедливы уравнения Лагранжа.

Если движение потенциально как снаружи, так и внутри капли, то эти уравнения можно вывести из уравнений Эйлера [7-9]. Функция Лагранжа оказывается равной разности кинетической энергии суммарного движения вне и внутри капли и потенциальной энергии. Для вихревого движения вид функции Лагранжа неизвестен.

3. Функция Лагранжа. Следуя [10], назовем разности

$$(3.1) \quad \Delta Q = Q(x + \xi(x, t), t) - Q_0(x, t) \quad \delta Q = Q(x, t) - Q_0(x, t)$$

соответственно лагранжевым и эйлеровым изменениями характеристики Q , вызванными возмущениями. В формулах (3.1) $Q_0(x, t)$ — характеристика исходного течения, $Q(x + \xi, t)$ — характеристика возмущенного течения, $\xi(x, t)$ — лагранжево «бесконечно малое» перемещение, вызванное возмущением. Векторы x и $x + \xi(x, t)$ определяют координаты одной и той же частицы жидкости соответственно в исходном и возмущенном течениях в один и тот же момент времени t .

Очевидна связь операций Δ и δ

$$(3.2) \quad \Delta = \delta + \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Здесь и далее по одинаковым индексам $j = 1, 2, 3$ подразумевается суммирование.

В силу несжимаемости имеем

$$(3.3) \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} \xi = 0$$

Из определения лагранжева перемещения ξ следует, что

$$(3.4) \quad \frac{d\xi}{dt} = \Delta v = \delta v + \xi_j \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{rot}(\xi \times v) = \delta v$$

Пусть ψ — функция тока осесимметричного движения, g — аналогичная функция для вектора ξ , тогда

$$(3.5) \quad v = \operatorname{rot} k \frac{\psi}{y}, \quad \xi = \operatorname{rot} k \frac{g}{y}$$

где \mathbf{k} — единичный вектор, перпендикулярный плоскости меридиана, функции ψ и g существуют в силу условий несжимаемости (3.3).

Внутри капли поле скорости удовлетворяет уравнению Эйлера

$$(3.6) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$$

При помощи (3.4) можно получить тождество

$$\Delta \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{v}\xi) - \xi \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)$$

Интегрируя тождество по объему капли V и по времени в пределах от t_1 до t_2 , получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta T = \int_V \rho v \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \xi \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau$$

$$T = \int_V \rho \frac{v^2}{2} d\tau, \quad \delta T = \int_V \rho v \Delta v d\tau$$

Если воспользоваться уравнениями движения (3.6) и условием несжимаемости (3.3), то интеграл от $\xi \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ можно преобразовать к поверхностному, откуда

$$(3.7) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \delta T = \int_V \rho v \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S p \delta n dS$$

$$\delta n = \xi n = \sum_{i=1}^N w_i \delta q_i$$

Здесь δn — смещение поверхности капли S по нормали при изменении ее обобщенных координат на величины δq_i . Функции точки на поверхности w_i задают смещение поверхности S по нормали при единичном изменении i -й обобщенной координаты.

Пусть $q_i(t)$, $\delta q_i(t)$ — произвольные функции, заданные на отрезке (t_1, t_2) . На концах отрезка t_1, t_2 вариации δq_i , а следовательно, и нормальное смещение δn равны нулю

$$(3.8) \quad \delta q_i |_{t_1} = \delta q_i |_{t_2} = 0, \quad \delta n |_{t_1} = \delta n |_{t_2} = 0$$

Равенство (3.8) означает, что в начальный и конечный моменты времени t_1 и t_2 поверхности в исходном и возмущенном течениях совпадают.

На лагранжево смещение можно наложить условие $\xi |_{t_1} = 0$, т. е. в исходном и возмущенном течениях в начальный момент времени t_1 координаты частиц жидкости совпадают. В момент времени t_2 лагранжево смещение ξ даже для потенциального течения, вообще говоря, отлично от нуля, так как положение частицы жидкости существенно зависит от всей предыстории движения поверхности S . Т. е. жидкость представляет собой неголономную систему.

Замечание 3.1. При обосновании уравнений Лагранжа обычно ссылаются на монографию [11] (см. стр. 502—506). Однако представленный там вывод для ациклического потенциального движения жидкости несостоятелен. В монографии отсутствует определение оператора D/Dt , но если под ним подразумевается оператор лагранжева изменения характеристики Δ , а под виртуальной скоростью V лагранжево перемещение ξ (только в этом случае справедлива формула (16) и можно вносить оператор D/Dt под знак интеграла по объему, движущемуся вместе с жидкостью), то формула (15) принимает вид

$$\xi = \sum_i \frac{\partial v}{\partial q_i} \delta q_i$$

Эта формула, лежащая в основе всего доказательства, справедлива, если жидкость представляет собой голономную систему, а в общем случае ациклического потенциального движения неверна.

Для случая потенциального движения в односвязной области из вариационного уравнения (3.7) уравнения Лагранжа получены в [9]. В этом случае первый интеграл правой части (3.7) преобразуется к поверхностному, который в силу (3.8) равен нулю. Для завихренного движения этот интеграл даст существенный вклад в функцию Лагранжа. Дальнейший вывод связан с преобразованием первого интеграла (3.7), для чего необходимо дать следующее определение.

Определение. Пусть положение поверхности S однозначно определяется обобщенными координатами q_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Будем называть среду скрепленной с поверхностью S , если координаты частиц этой среды x зависят только от положения поверхности S .

Векторы x , v^* координат и скорости частиц среды являются функциями обобщенных координат q_i и скоростей \dot{q}_i и лагранжевых координат среды x^*

$$(3.9) \quad x = X(q_i, x^*), \quad v^* = \sum_{i=1}^N \frac{\partial X}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Можно ввести лагранжево перемещение среды ξ^* аналогично вектору ξ для движущейся жидкости. Для несжимаемой среды, скрепленной с поверхностью S , векторы v^* и ξ^* удовлетворяют уравнениям, аналогичным (3.3), (3.4)

$$(3.10) \quad \operatorname{div} v^* = 0, \quad \operatorname{div} \xi^* = 0, \quad \frac{\partial \xi^*}{\partial t} + \operatorname{rot}(\xi^* \times v^*) = \delta v^*$$

Для осесимметричного движения несжимаемой среды, скрепленной с телом, можно ввести функции тока ψ^* , g^* аналогично (3.5)

$$(3.11) \quad v^* = \operatorname{rot} k \frac{\psi^*}{y}, \quad \xi^* = \operatorname{rot} k \frac{g^*}{y}$$

Если подставить (3.11) в (3.10), а (3.5) в (3.4), то можно получить следующие интегралы уравнений (3.10) и (3.4):

$$(3.12) \quad \frac{dg}{dt} = \delta \psi, \quad \frac{d^* g^*}{dt} = \delta \psi^*, \quad \frac{d^*}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^*_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta \psi, \quad \frac{\partial g^*}{\partial t} = \Delta^* \psi, \quad \Delta^* = \delta + \xi^*_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Для преобразования интеграла в вариационном уравнении (3.7) воспользуемся тождеством

$$v(\xi - \xi^*) = \operatorname{div} \left(\frac{g - g^*}{y} k \times v \right) + \frac{g - g^*}{y} k \operatorname{rot} v$$

которое нетрудно получить при помощи равенств (3.5), (3.11). Отсюда

$$(3.13) \quad \int_V v(\xi - \xi^*) d\tau = \int_S \frac{g - g^*}{y} k \times v n dS + \int_V \frac{g - g^*}{y} k \operatorname{rot} v d\tau$$

На границе S векторы ξ и ξ^* , а также v и v^* имеют одинаковые нормальные компоненты

$$(3.14) \quad (\xi - \xi^*) n|_S = 0, \quad (v - v^*) n|_S = 0$$

Отсюда следует, что на границе S разности функций «тока» $g - g^*$ и $\psi - \psi^*$ постоянны. Внося постоянную $g - g^*$ за знак интеграла по поверхности, переходя к объемному интегралу и пользуясь тем, что

$$\operatorname{div} \left(\frac{k}{y} \times v \right) = -\omega, \quad \frac{k}{y} \operatorname{rot} v = \omega$$

из (3.13) можно получить

$$\int_V \mathbf{v} (\xi - \xi^*) d\tau = -\omega V (g - g^*)|_S + \int_V (g - g^*) \omega d\tau$$

При помощи (3.12) производную по времени вдоль траектории частиц жидкости от разности $g - g^*$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d(g - g^*)}{dt} &= \Delta\psi - \Delta^*\psi^* + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (g - g^*) = \Delta(\psi - \psi^*) + \\ &+ \operatorname{div} (g - g^*) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \end{aligned}$$

Откуда с учетом второго условия (3.14)

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} (\xi - \xi^*) d\tau = -\rho\omega\Delta(\psi - \psi^*)|_S + \delta \int_V \rho\omega(\psi - \psi^*) d\tau$$

Разность $\psi - \psi^*$ определена с точностью до произвольной функции времени, которую можно выбрать так, что на связной границе $\psi - \psi^*|_S = 0$.

Интегрируя равенство (3.15) по времени от t_1 до t_2 и пользуясь тем, что для среды, скрепленной с поверхностью S , в моменты времени t_1 и t_2 $\xi^* = 0$ (из определения (3.9) следует, что среда, скрепленная с телом, голономна) можно получить (3.16)

$$(3.16) \quad \int_V \rho \mathbf{v} \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \rho\omega\delta \int_V (\psi - \psi^*) d\tau$$

Подставляя (3.16) в (3.7), получим для движения внутри капли

$$(3.17) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \left(T_- - \rho\omega \int_V (\psi - \psi^*) d\tau \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S p_- \delta n dS$$

Для движения вне капли справедливо равенство [12]

$$(3.18) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \delta T_+ = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S p_+ \delta n$$

Наконец, из граничного условия (2.1) нетрудно получить

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta \sigma S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S (p_- - p_+) \delta n dS$$

где S — площадь поверхности капли.

Складывая равенства (3.17) и (3.18) и вычитая из суммы последнее равенство, получим

$$(3.19) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = 0$$

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T_+ + T_- - \sigma S - \rho\omega \int_V (\psi - \psi^*) d\tau$$

Экстремалью вариационного уравнения (3.19) является решение системы дифференциальных уравнений Лагранжа.

Рассмотренный вывод уравнений Лагранжа можно распространить на более общие случаи движения жидкости в объеме V , ограниченном деформирующейся поверхностью S .

1°. Циклическое потенциальное движение в произвольной M -связной области V . Область V превращается в односвязную добавлением $M - 1$ перегородки Π_k ($k = 1, 2, \dots, M - 1$). В этом случае

$$(3.20) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \rho \delta n dS, \quad L = T - \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k Q_k$$

$$Q_k = \rho \int_{\Pi_k} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS$$

где T — кинетическая энергия жидкости в объеме V , Γ_k — циркуляции по взаимно непроводимым контурам, Q_k — расходы через перегородки.

2°. Циклическое плоскопараллельное движение с постоянным вихрем ω и аналогичное осесимметричное течение в M -связной области. Функция Лагранжа имеет вид

$$(3.21) \quad L = T - \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k Q_k - \rho \omega \int_S (\psi - \psi^*) d\tau$$

Вывод уравнений Лагранжа в первом случае можно провести при помощи тождества

$$(3.22) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Pi_k} (\xi - \xi^*) \cdot \mathbf{n} dS = \delta \int_{\Pi_k} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS$$

Следует отметить, что в силу условий (3.14) интегралы по перегородкам не зависят от их выбора и поэтому можно задать закон движения перегородки произвольно. Предположим, что перегородки Π_k движутся вместе с жидкостью. Для доказательства тождества воспользуемся известной формулой для производной по времени от потока соленодального вектора через жидкую поверхность [18] и аналогичной формулой для вариации

$$(3.23) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Pi_k} (\xi - \xi^*) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Pi_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\xi - \xi^*) + \text{rot}((\xi - \xi^*) \times \mathbf{v}) \right] \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\delta \int_{\Pi_k} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Pi_k} [\delta(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*) + \text{rot}((\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \times \xi)] \cdot \mathbf{n} dS$$

Отсюда при помощи уравнений (3.3), (3.4), (3.10) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Pi_k} (\xi - \xi^*) \cdot \mathbf{n} dS - \delta \int_{\Pi_k} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Pi_k} \text{rot}[(\xi - \xi^*) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)] \cdot \mathbf{n} dS =$$

$$= \oint_{L_k} (\xi - \xi^*) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot d\mathbf{l}$$

Здесь L_k — контур, ограничивающий перегородку Π_k . Контур L_k лежит на поверхности S .

Векторы $\xi - \xi^*$, $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$, $d\mathbf{l}$ лежит в одной плоскости (в силу (3.14) перпендикулярны одному вектору \mathbf{n}), поэтому последний интеграл равен нулю и таким образом тождество (3.22) доказано.

При помощи очевидных преобразований и интегрирования тождества (3.22) по времени можно получить

$$\int_V \rho \mathbf{v} \cdot \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_V \text{div} \rho \Phi \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k \int_{\Pi_k} \xi \cdot \mathbf{n} dS \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k Q_k$$

Отсюда из вариационного уравнения (3.7) получим (3.20).

Для вывода уравнений Лагранжа (3.21) достаточно воспользоваться равенством, которое получается аналогично (3.16)

$$\int_V \rho v \xi d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \left(\sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k Q_k + \rho \omega \int_V (\psi - \psi^*) d\tau \right)$$

Заметим, что вывод уравнений Лагранжа для плоского случая отличается от осесимметричного формальной заменой y на единицу.

4. Вариационное уравнение стационарного движения. Условие устойчивости. При движении капли в безграничной жидкости функция Лагранжа не зависит от координаты x_0 , определяющей перемещение капли по оси симметрии. Координата x_0 является циклической и можно ввести функцию Раусса L° .

$$(4.1) \quad L^\circ = L - u \frac{\partial L}{\partial u}$$

Скорость $u = x_0$ необходимо исключить при помощи закона сохранения импульса

$$(4.2) \quad \partial L / \partial u = P$$

Как известно [14], функция Раусса L° является функцией Лагранжа приведенной системы с позиционными координатами q_1, \dots, q_N , определяющими форму капли. Слагаемое L° , не зависящее от обобщенных скоростей q_i , взятое с обратным знаком, является потенциальной энергией U приведенной системы.

Для вычисления U достаточно в формулах (3.19), (4.1), (4.2) положить $q_i = 0$. Если учесть, что при этом

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \psi &= \omega \psi_\omega, \quad \psi^* = 0 \\ T_+ &= 1/2 M u^2, \quad T_- = 1/2 (\rho_- V u^2 + I \omega^2) \\ I &= \rho_- \int_V \left(\text{rot } \mathbf{k} \frac{\psi_\omega}{y} \right)^2 d\tau = \rho_- \int_V \psi_\omega^2 d\tau \end{aligned}$$

где M — присоединенная масса капли, ψ_ω — функция тока стационарного завихренного движения внутри капли — является решением следующей краевой задачи [11]:

$$(4.4) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_\omega = -y^2, \quad \psi_\omega|_S = 0$$

то можно получить для U следующее выражение:

$$(4.5) \quad U = \frac{P^2}{2(M + \rho_- V)} + \frac{1}{2} I \omega^2 + \sigma S$$

Условию стационарного движения капли будет соответствовать условие равновесия приведенной системы, т. е. $\delta U = 0$. Условием устойчивости этого движения будет $\delta^2 U > 0$.

Вычисляя соответствующие вариации при постоянном объеме капли, нетрудно получить условие устойчивого стационарного движения капли

$$(4.6) \quad \begin{aligned} -1/2 u^2 \delta M + 1/2 \omega^2 \delta I + \sigma \delta S &= 0 \\ -\frac{1}{2} u^2 \delta^2 M + \frac{u^2 (\delta M)^2}{(M + \rho_- V)} + \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 I + \sigma \delta^2 S &> 0 \end{aligned}$$

Вариационное уравнение стационарного движения капли можно получить непосредственно, не обращаясь к уравнениям Лагранжа.

Для вариации присоединенной массы [12] и площади поверхности известны соотношения

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \delta \frac{1}{2} u^2 (M + \rho_+ V) &= \frac{\rho_+}{2} \int_S v_+^2 \delta n dS \\ \delta S &= \int_S 2H \delta n dS \end{aligned}$$

Для вывода аналогичного соотношения для δI воспользуемся тождеством

$$\int_V (\mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}) d\tau = \int_S (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \mathbf{n} dS$$

Положив в тождестве

$$\mathbf{A} = \mathbf{k} \frac{\delta \psi_\omega}{y}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{k} \frac{\psi_\omega}{y}$$

и учитывая, что ψ_ω — функция тока для движения жидкости с единичной завихренностью

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{k} y, \quad \psi_\omega|_S = 0$$

можно получить

$$(4.8) \quad \int_V \delta \psi_\omega d\tau = - \int_S \frac{\delta \psi_\omega}{y} \mathbf{k} \times \operatorname{rot} \mathbf{k} \frac{\psi_\omega}{y} \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\delta \psi_\omega}{y^2} \frac{\partial \psi_\omega}{\partial n} dS$$

Лагранжева вариация ψ_ω на поверхности S равна нулю, так как ψ_ω на S тождественно равна нулю, откуда из (3.2) следует

$$-\delta \psi_\omega = \frac{\partial \psi_\omega}{\partial n} \delta n$$

Подставляя эйлерову вариацию $\delta \psi_\omega$ в (4.8), получим требуемое соотношение

$$(4.9) \quad \frac{1}{2} \omega^2 \delta I = \frac{\rho_-}{2} \int_S v_-^2 \delta n dS$$

Из интеграла Бернулли и граничного условия (2.2) следует

$$(4.10) \quad \int_S \left(\frac{\rho_+}{2} v_+^2 - \frac{\rho_-}{2} v_-^2 - 2H\sigma \right) \delta n dS = \int_S \operatorname{const} \delta n dS$$

Из (4.8) — (4.10) нетрудно получить вариационное уравнение (4.6) с точностью до $c\delta V$.

При определении формы капли из вариационного уравнения (4.6) следует считать, что $\delta V = 0$ и поэтому постоянная c не существенна.

5. Эллипсоидальная капля. Для полного исследования динамики капли необходимо ввести бесконечное число обобщенных координат. Однако вариационные уравнения (3.13), (4.6) дают возможность находить приближенные решения этой проблемы. Для этого достаточно ограничиться некоторым классом поверхностей S с конечным числом степеней свободы.

Пусть поверхность капли имеет форму эллипсоида вращения

$$(5.1) \quad \frac{(x - x_0)^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_y^2} - 1 = 0, \quad l_x l_y^2 = l^3$$

Положение поверхности S (5.1) можно задать при помощи двух обобщенных координат: x_0 — координата центра и $\chi = l_y / l_x$ — отношение осей эллипсоида.

Для вычисления функции Лагранжа (3.19) необходимо: 1) определить кинетическую энергию внешнего потенциального движения, 2) определить кинетическую энергию движения жидкости с постоянной завихренностью внутри капли, 3) определить функцию тока для движения среды, скрепленной с телом, и функцию тока для течения жидкости внутри капли.

Решение первой задачи известно [9]. Перейдем к решению второй и третьей задач.

Движение среды, скрепленной с телом, можно задать суперпозицией двух преобразований

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x'; & x' &= l\chi^{-1/2}x^* \\ y &= y'; & y' &= l\chi^{1/2}y^* \end{aligned}$$

Поле скорости v^* находится при помощи (3.9) и равно

$$(5.2) \quad \begin{aligned} v_x^* &= u - \frac{2}{3} \frac{\chi'}{\chi} x', & u &= x_0 \\ v_y^* &= \frac{1}{3} \frac{\chi'}{\chi} y' \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что поле скоростей (5.2) соленоидально и, кроме того, потенциально. Функция тока ψ^* для поля скорости (5.2) равна

$$(5.3) \quad \psi^* = \frac{1}{2} uy^2 - \frac{1}{3} \frac{\chi'}{\chi} x' y^2$$

Функцию ψ можно представить в виде суммы

$$(5.4) \quad \psi = \psi^* + \omega\psi_\omega$$

где ψ_ω находится из решения краевой задачи (4.4).

Для эллипсоида (5.1) решение этой задачи имеет вид

$$(5.5) \quad \psi_\omega = \frac{l^2}{2} \frac{\chi'^2}{\chi^2 + 4} y^2 \left(1 - \frac{x^2}{l_x^2} - \frac{y^2}{l_y^2} \right)$$

При $\chi = 1$ формула (5.5) дает известную функцию тока для сферического вихря Хилла [11].

Для определения кинетической энергии капли удобно воспользоваться равенствами

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_* + \mathbf{v}_\omega, \quad v^2 = v_*^2 + v_\omega^2 + 2 \operatorname{div} (\Phi_* \mathbf{v}_\omega)$$

где \mathbf{v}_ω — поле скорости течения жидкости, функция тока которого равна $\omega\psi_\omega$, Φ_* — потенциал поля скорости \mathbf{v}_* .

Интегрируя последнее равенство по объему капли и пользуясь тем, что вектор \mathbf{v}_* перпендикулярен нормали к поверхности S , можно определить кинетическую энергию капли

$$T_- = \frac{\rho_-}{2} \int_V (v_*^2 + v_\omega^2) d\tau$$

Наконец, при помощи тождества

$$v_\omega^2 = \omega \left(\omega\psi_\omega + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{k}}{y} \psi_\omega \times \mathbf{v}_\omega \right) \right)$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии капли

$$(5.6) \quad T_- = T_-^* + \frac{1}{2} \omega^2 I, \quad T_-^* = \frac{\rho_-}{2} \int_V v_*^2 d\tau, \quad I = \rho_- \int_V \psi_\omega d\tau$$

где T_-^* — кинетическая энергия жидкости внутри капли при отсутствии завихренности, равная сумме кинетической энергии капли, движущейся

как твердой со скоростью u , и кинетической энергии капли за счет деформации границы.

Подставляя (5.6) в (3.19), нетрудно получить функцию Лагранжа

$$(5.7) \quad L = T_+ + T_- - \frac{1}{2}\omega^2 I - \sigma S, \quad T_+ = \frac{1}{2}Mu^2$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_+ l^3 m(\chi), \quad I = \frac{4\pi}{3}\rho_- l^3 i(\chi), \quad S = \frac{2\pi}{3}l^2 s(\chi)$$

$$m = \frac{1-a}{a-1/\chi^2}, \quad i = \frac{2\chi^{4/3}}{35(\chi^2+4)}, \quad s = 3(\chi^{2/3} + \chi^{-1/3}b)$$

$$a = \int_0^1 \frac{dx}{1+(\chi^2-1)x^2}, \quad b = \int_0^1 \frac{dx}{1+(\chi^{-2}-1)x^2}$$

Здесь функции $a(\chi)$ и $b(\chi)$ выражаются на отрезках $0 < \chi < 1$ или $1 < \chi < \infty$ через обратные тригонометрические либо обратные гиперболические функции.

Подставляя функций (5.7) в (4.6), получим условия устойчивого стационарного движения эллипсоидальной капли

$$(5.8) \quad \begin{aligned} -m' + \Omega\lambda i' + (1/W)s' &= 0 \\ -m'' + \frac{2m'^2}{m+\lambda} + \Omega\lambda i'' + \left(\frac{1}{W}\right)s'' &> 0 \\ \Omega = \frac{\omega^2 l^4}{u^2}, \quad \lambda = \frac{\rho_-}{\rho_+}, \quad W = \frac{u^2 \rho_+ l}{\sigma} \end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены производные по χ .

Как видно из системы (5.8), положение устойчивого «равновесия» капли зависит от значений трех безразмерных чисел, а не от одного числа Вебера W , как обычно предполагается [4].

Следует отметить, что неравенство (5.8) является необходимым условием устойчивости, но не достаточным, так как здесь рассматривается устойчивость относительно возмущения специального вида, когда капля остается эллипсоидальной. Если поменять знак неравенства, то получим достаточное условие неустойчивости капли.

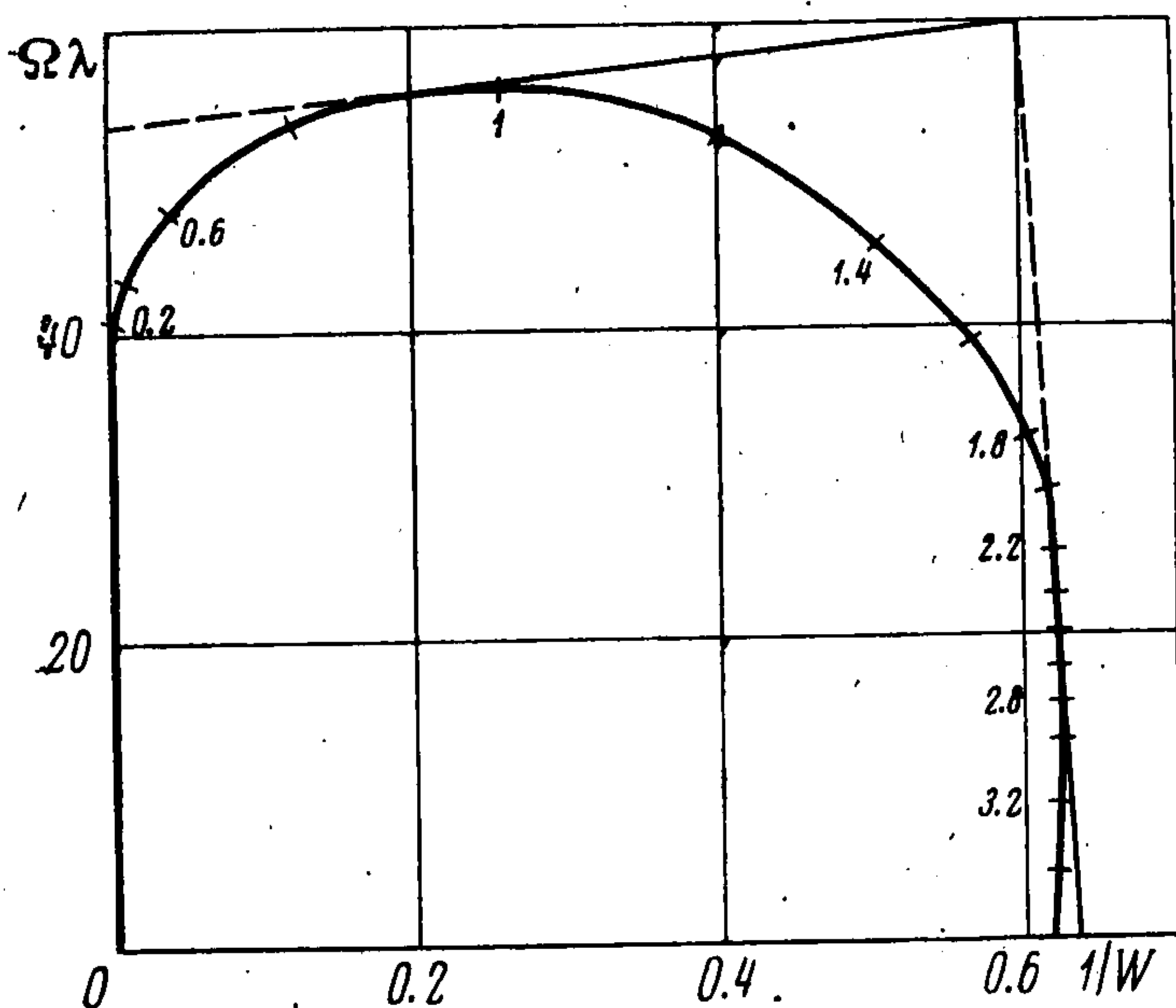
В системе координат $1/W, \Omega\lambda$ (фиг. 1) первое уравнение (5.8) определяет однопараметрическое семейство прямых, которые дают все состояния равновесия капли. Каждая прямая семейства касается огибающей семейства, изображенной на фиг. 1 жирной сплошной линией

$$(5.9) \quad \begin{aligned} f &= 0, \quad \partial f / \partial \chi = 0 \\ f(\chi, \Omega\lambda, 1/W) &= -m' + \Omega\lambda i' + (1/W)s' \end{aligned}$$

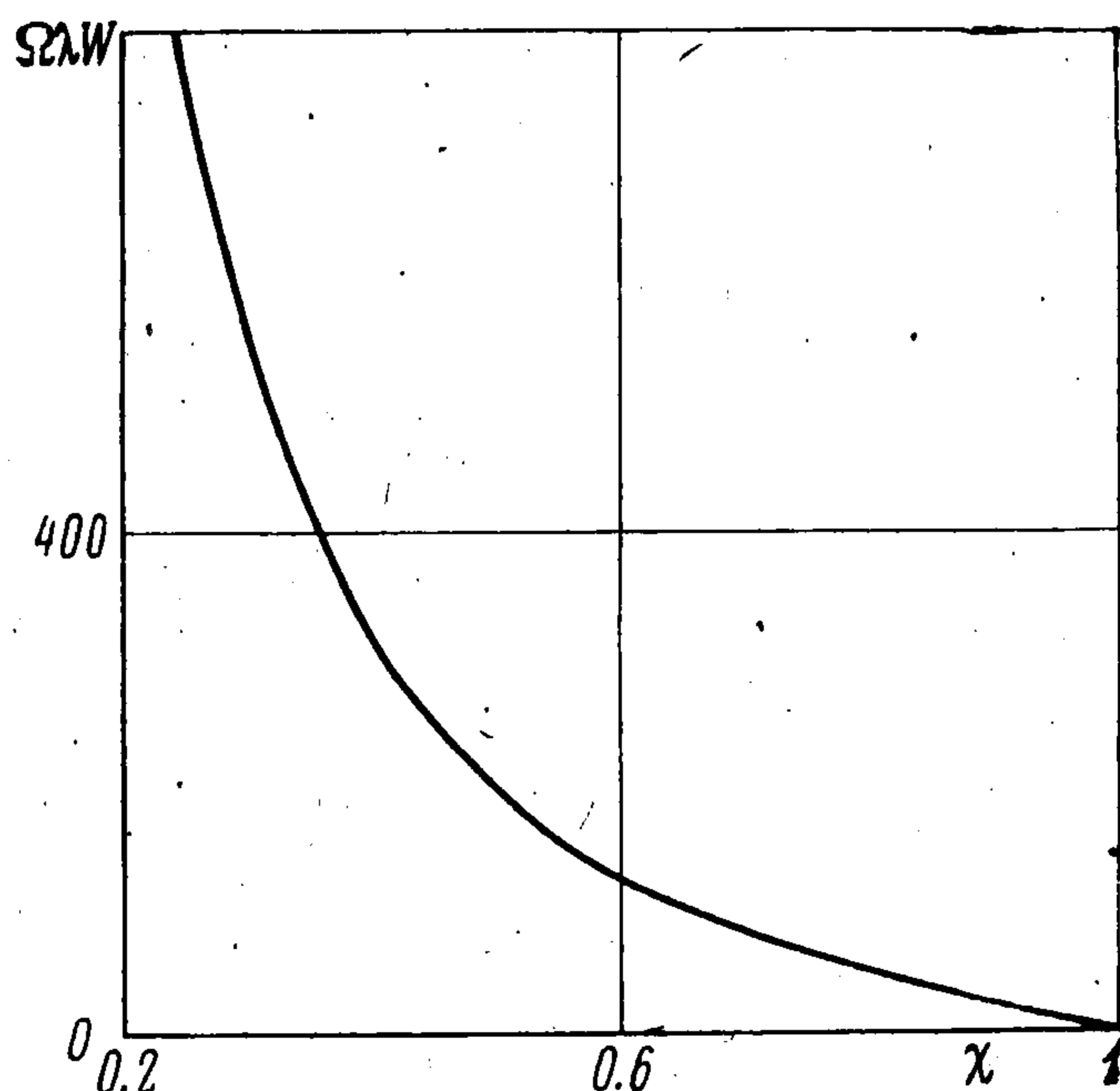
Каждой точке огибающей соответствует одно вполне определенное значение параметра χ , такое, что касательная, проведенная к огибающей в этой точке, дает прямую состояний равновесия капли с этим же значением параметра χ . На фиг. 1 нанесены точки на огибающей со значениями $\chi = 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 3.6$.

Зависимость углового коэффициента касательной к огибающей от χ выражается функцией $-s'/i'$ и изображена на фиг. 2. Эта функция монотонно убывает и поэтому огибающая является выпуклой.

Таким образом, огибающая делит координатную плоскость на фиг. 1 на две области. В первой области, ограниченной снаружи огибающей и осью абсцисс, состояния равновесия невозможны. Если точка с координатами $1/W, \Omega\lambda$ лежит во второй области, то для определения степени деформации капли в состоянии равновесия достаточно провести касательную к огибающей, и тогда точка касания будет соответствовать значению



Фиг. 1



Фиг. 2

параметра χ . Причем каждой паре чисел $1/W, \Omega\lambda$ соответствует два состояния равновесия с различными отношениями осей χ . Например, при значениях $1/W = 0.6$ и $\Omega\lambda = 60$ у капли два положения равновесия при $\chi \approx 0.9$ и $\chi \approx 2.3$.

Устойчивость равновесной формы капли определяется из неравенства (5.8) и зависит от трех безразмерных чисел $1/W, \Omega\lambda, \lambda$. На каждой прямой равновесных состояний с постоянным χ существует точка, отделяющая устойчивые состояния от неустойчивых. Положение этой точки на прямой зависит от λ .

6. Случай $\lambda \gg 1$. К этому случаю относится движение капли жидкости в газе. Для устойчивых состояний капли в этом случае можно дать достаточно простую геометрическую интерпретацию.

Из системы (5.8) в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ при $\Omega\lambda = \text{const}$ получим

$$(6.1) \quad f(\chi, \Omega\lambda, 1/W) = 0, \quad \partial f / \partial \chi > 0$$

На каждой прямой семейства состояний равновесия в точке касания огибающей происходит смена знака функции $\partial f / \partial \chi$, а значит, в соответствии с (6.1) смена устойчивости. Причем состояние капли устойчиво, если вектор, проведенный из точки касания до точки $1/W, \Omega\lambda$, направлен в сторону возрастания параметра χ , и неустойчиво, если этот вектор направлен в противоположную сторону.

На фиг. 1 устойчивые состояния изображены сплошной прямой линией, а неустойчивые — штриховой. Например, при $1/W = 0.6, \Omega\lambda = 60$

значению $\chi \approx 0.9$ соответствует устойчивое состояние, а $\chi \approx 2.3$ — неустойчивое.

Из фиг. 1 видно, что при $\Omega\lambda \geq 56$ степень деформации устойчивого состояния капли $\chi \leq 1$, т. е. капля вытягивается в направлении скорости потока. В противоположном случае $\Omega\lambda \leq 56$, $\chi \geq 1$ и капли сжимаются в направлении скорости.

При выполнении условия (1.4) значение параметра $\Omega\lambda$ по порядку величины можно найти из оценки (1.5)

$$\Omega\lambda \sim \frac{m}{i} \frac{\rho_+ v_+^2}{\rho_- v_-^2} R_+$$

Отношение m/i меняется от 40 при $\chi \approx 0.2$ до 120 при $\chi \approx 3.5$. При $\chi = 1$ $m/i \approx 44$. Для оценки будем считать, что $m/i \approx 50$, тогда

$$(6.2) \quad \Omega\lambda \sim 50 \frac{\rho_+ v_+^2}{\rho_- v_-^2} R_+$$

Для капли воды в воздухе $\Omega\lambda \sim 15 R_+$; таким образом, при больших числах Рейнольдса водяные капли вытянуты в направлении скорости воздушного потока.

Представляет интерес рассмотрение трех частных случаев движения капель:

1) кинетическая энергия жидкости вне капли много меньше суммы кинетической энергии капли и потенциальной энергии поверхностного натяжения $T_+ \ll T_- + \sigma S$;

2) кинетическая энергия капли много меньше суммы кинетической энергии жидкости вне капли и потенциальной энергии поверхностного натяжения $T_- \ll T_+ + \sigma S$;

3) потенциальная энергия поверхностного натяжения капли много меньше суммы кинетических энергий жидкости вне и внутри капли $\sigma S \ll \ll T_- + T_+$.

Состояние равновесия в этих трех случаях вполне определяется одним безразмерным числом. Зависимость этих безразмерных чисел от χ нетрудно получить из уравнения равновесия (6.1), пренебрегая соответственно первым, вторым или третьим слагаемыми

$$(6.3) \quad 1) \Omega\lambda W = -\frac{s'}{i'}, \quad 2) W = \frac{s'}{m'}, \quad 3) \Omega\lambda = \frac{m'}{i'}$$

График первой зависимости (6.3), изображенный на фиг. 2, показывает, что все капли имеют вытянутую равновесную форму ($\chi \leq 1$).

Условие устойчивости в этом случае можно получить, подставляя в неравенство (6.1) первое соотношение (6.3) и пренебрегая слагаемым m''

$$\frac{d}{d\chi} \frac{s'}{i'} > 0$$

Поскольку функция s'/i' монотонно возрастает (фиг. 2), то все состояния равновесия капли оказываются устойчивыми.

Эти же результаты можно получить также геометрически при помощи фиг. 1. Действительно, в пределе, когда один из параметров $\Omega\lambda$, $1/W$

стремится к бесконечности, прямые состояний равновесия касаются огибающей в точках $\chi \leq 1$. Причем все состояния устойчивы.

Второй предельный случай (6.3), отсутствия течения внутри капли, изучен в работе [6]. Функция $W(\chi)$ монотонно возрастает до $\chi \approx 3.7$ и после достижения максимума $W \approx 1.63$ монотонно убывает. Аналогичный, но, по-видимому, менее точный вид зависимости $W(\chi)$ найден в [6] при помощи иного подхода.

Замечание 6.1. Согласно приведенным рассуждениям равновесное состояние капли оказывается устойчивым даже при $\chi \rightarrow 0$, что противоречит физическому смыслу. Происходит это потому, что состояние капли, устойчивое относительно возмущений, при которых ее форма остается эллипсоидом, может потерять устойчивость относительно какого-либо другого возмущения. Очевидно, достаточно вытянутые капли будут неустойчивыми относительно возмущений в виде радиальных расширений и сжатий капли в плоскости экватора аналогично тому, как в теории Релея оказываются неустойчивыми капиллярные струи [12].

Таким образом, к условию устойчивости необходимо добавить еще условие, что $\chi > \chi_*$, где χ_* — некоторое критическое значение степени деформации капли.

Замечание 6.2. Вторым случаем (6.3) может реализоваться, если капля из состояния покоя попадает в поток газа. Характерное время установления стационарного вихревого течения внутри капли $t \sim l^2 / \nu_-$. За это время капля проходит расстояние $ut \sim lR_+ \nu_+ / \nu_-$. Для капли воды в воздухе это расстояние, в тысячу раз превосходящее размер капли, может существенно превышать расстояние, пройденное каплей за время наблюдения. Вихрь внутри капли не успеет развиться и им можно будет пренебречь.

Замечание 6.3. Независимо функция $W(\chi)$ при $\Omega\lambda = 0$ была определена в работах [15, 16] при решении задачи о движении эллипсоидального пузыря, причем к решению задачи применяются те же подходы, что и соответственно в работах [5, 6]. В работах [4-6] задача устойчивости не рассматривалась. Утверждение о неустойчивости стационарной формы капли на убывающем участке зависимости $W(\chi)$ не является очевидным и справедливо в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. Так, для пузыря, как показано в [16], все равновесные формы оказываются устойчивыми.

Из фиг. 1 видно, что устойчивые состояния капли в пределе $\Omega\lambda = 0$ будут при $W < 1.63$, $\chi < 3.7$. Этот же результат можно получить из условия устойчивости (6.1), подставляя в неравенство второе соотношение (6.3)

$$\frac{d}{d\chi} W(\chi) > 0$$

Таким образом, устойчивым состоянием капли соответствует возрастающий участок зависимости $W(\chi)$.

Исследование устойчивости капли в третьем случае (6.3), соответствующем пределу $1/W \rightarrow 0$, показывает, что все состояния капли неустойчивы. Этот случай относится к достаточно крупным каплям, когда стабили-

вирующее влияние поверхностного натяжения на устойчивость капли ничтожно мало. Естественно, что такие капли не могут находиться в устойчивом состоянии.

Автор благодарит Л. И. Седова за обсуждение результатов работы, а также П. А. Петросяна и О. В. Воинова за полезные замечания.

Поступила 24 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Физматгиз, 1973.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
4. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М., «Машиностроение», 1967.
5. Клячко Л. А. К теории дробления капли потоком газа. Инж. ж., 1963, вып. 3.
6. Гордин К. А., Истратов А. Г., Либрович В. Б. К кинетике деформации и дробления жидкой капли в газовом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
7. Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений, т. 3. Гидродинамика. Движение твердого тела, заключающего внутри себя жидкие массы. Метод Неймана, стр. 52. ОНТИ, 1936.
8. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
9. Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973.
11. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
12. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
13. Седов Л. И. Механика сплошных сред, т. 1. М., «Наука», 1970.
14. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
15. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid. Mech., 1965, vol. 23, p. 4.
16. Головин А. М., Воинов О. В., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря. ПМТФ, 1970, № 3.