Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 533.6.011.7

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАКРОПАРАМЕТРОВ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ПРИ РАСШИРЕНИИ В ВАКУУМ

В. И. Жук

(Москва)

Рассматривается задача о разлете плоского слоя максвелловского газа в вакуум. Разложение по числам Кнудсена содержит логарифмическую особенность на больших временах, которая исключается с помощью малого растяжения временной координаты. Построено асимптотическое решение, описывающее дальнее поле течения в плоской стационарной струе для чисел Кнудсена, стремящихся к нулю.

Исследование плоского разлета конечной массы разреженного газа в вакуум при малых начальных числах Кнудсена [1] показывает, что нарушение режима сплошной среды происходит на временах порядка $\mathrm{Kn}^{-\sigma}$, $\sigma = {}^3/_2\,(1 - \nu)^{-1}$ в предположении степенной зависимости вязкости от температуры $\mu = T^\nu$. Ниже изучается особый случай $\nu = 1$, при котором равномерно пригодное решение может быть получено с помощью метода деформированных координат Лайтхилла. Данный метод в применении к стационарному истечению разреженного газа в вакуум впервые рассматривался в [2].

1. Прежде чем обратиться к исследованию разлета максвелловского газа, приведем асимптотическое решение, описывающее дальнее поле течения в плоской стационарной струе, поскольку вид уравнений во внешней области не меняется при переходе к одномерной нестационарной задаче.

Установившееся расширение газа с цилиндрической симметрией анализировалось в работах [2–4]. Рассмотрим более общее течение, когда макропараметры зависят не только от радиуса, но и от азимутального угла φ. Данная постановка задачи моделирует условия при истечении разреженного газа через плоскую щель.

Запишем обобщенное кинетическое уравнение Крука [5] в цилиндрических координатах

$$\xi_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\xi_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\varphi^{\,2}}{r}\frac{\partial f}{\partial \xi_r} - \frac{\xi_r \xi_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \xi_\varphi} = AnT^{1-\nu}(f^+ - f) \tag{1.1}$$

$$A \sim \mathrm{Kn}^{-1}, \quad \mu = T^\nu$$

Все величины приведены к безразмерному виду, где в качестве масштабов служат параметры газа вблизи щели; число Кнудсена, определенное по ширине щели, предполагается малым. При $\mathrm{Kn} \to 0$ справедливы уравнения невязкого течения. Радиальный характер потока на больших расстояниях позволяет представить газодинамическое решение в виде

$$u = w_0 + \frac{w_1(\varphi)}{r^{2/3}} + \ldots, \quad n = \frac{\rho_0(\varphi)}{r} + \frac{\rho_1(\varphi)}{r^{5/3}} + \ldots \tag{1.2}$$

$$v = \frac{v_1(\varphi)}{r^{2/3}} + \ldots, \quad T = \frac{[\rho_0(\varphi)]^{2/3}}{r^{2/3}} + \frac{q_1(\varphi)}{r^{4/3}} + \ldots, \quad r \to \infty$$

Здесь u и v — радиальная и трансверсальная компоненты макроскопической скорости, w_0 — предельная скорость при изэнтропическом истечении в вакуум, r — координата расстояния до оси z, вдоль которой параметры газа неизменны. Задание $\rho_0(\varphi)$ определяет остальные функции w_1, v_1, ρ_1, q_1. Вид функции $\rho_0(\varphi)$ следует из точного решения при $r = O(1)$.

Подставляя выражения (1.2) в уравнение (1.1) и сравнивая конвективный и столкновительный члены, получаем, что внутреннее газодинамическое решение непригодно на расстояниях

$$r = O(A^\sigma), \quad \sigma = {}^3/_2(1-\nu)^{-1}$$

В соответствии с методом, ранее применявшимся для исследования осесимметричной струи [6], перейдем к переменным

$$r_1 = rA^{-\sigma}, \quad n_1 = nA^\sigma, \quad T_1 = TA^{2\sigma/3}$$

$$\alpha = (\xi_r - u)A^{\sigma/3}, \quad \beta = (\xi_\varphi - v)A^{\sigma/3}, \quad \gamma = \xi_z A^{\sigma/3}$$

Уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$(1.3) \quad ur_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - \alpha r_1\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial r_1} - \alpha r_1\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial r_1} + v\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \beta\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} +$$
$$+ 2\beta v\frac{\partial f}{\partial \alpha} - (\beta u + \alpha v)\frac{\partial f}{\partial \beta} - A^{\sigma/3}\Big(ur_1\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial r_1} + ur_1\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial r_1} + v\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \varphi} +$$
$$+ v\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - v^2\frac{\partial f}{\partial \alpha} + uv\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) + A^{-\sigma/3}\Big(r_1\alpha\frac{\partial f}{\partial r_1} + \beta\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \beta^2\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \alpha\beta\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) =$$
$$= r_1 n_1 T_1^{1-\nu}(f^+ - f)$$

Интегрируя (1.3) по пространству скоростей с весами α и β, получим уравнения для макроскопической скорости

$$(1.4) \quad ur_1\frac{\partial u}{\partial r_1} + v\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 = O(A^{-2\sigma/3})$$
$$ur_1\frac{\partial v}{\partial r_1} + v\frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv = O(A^{-2\sigma/3})$$

Внешнее решение допускает представление

$$u = U_0 + U_1A^{-2\sigma/3} + \ldots, \quad n_1 = N_0 + N_1A^{-2\sigma/3} + \ldots$$
$$v = V_0 + V_1A^{-2\sigma/3} + \ldots, \quad f = F_0 + F_1A^{-\sigma/3} + \ldots$$

Из уравнений (1.4) и уравнения неразрывности, используя условия сращивания с внутренним решением (1.2), находим

$$U_0 = w_0, \quad V_0 = 0, \quad N_0 = \rho_0(\varphi)/r_1$$

С учетом полученных результатов кинетическое уравнение для функции F_0 запишем в виде

$$(1.5) \quad r_1U_0\frac{\partial F_0}{\partial r_1} - \beta U_0\frac{\partial F_0}{\partial \beta} = \rho_0(\varphi)\tau^{1-\nu}(F^+ - F)$$

Введем величины

$$\overline{\alpha^2} = \frac{1}{N_0 r_1}\int \alpha^2 F_0\, d\alpha\, dB\, d\gamma, \quad \overline{B^2} = \frac{1}{N_0 r_1^3}\int B^2 F_0\, d\alpha\, dB\, d\gamma$$
$$(1.6) \quad \overline{\gamma^2} = \frac{1}{N_0 r_1}\int \gamma^2 F_0\, d\alpha\, dB\, d\gamma, \quad B = \beta r_1, \quad \frac{3}{2}\tau = \overline{\alpha^2} + \overline{B^2} + \overline{\gamma^2}$$

Из (1.5) следуют моментные уравнения

$$(1.7)\qquad \frac{\partial}{\partial r_1}\overline{\alpha^2} = \frac{N_0}{U_0}\tau^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{2} - \overline{\alpha^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r_1}\overline{\gamma^2} = \frac{N_0}{U_0}\tau^{1-\nu}\left(\frac{\tau}{2} - \overline{\gamma^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1} r_1^2\overline{B^2} = \frac{N_0}{U_0}\tau^{1-\nu} r_1^2\left(\frac{\tau}{2} - \overline{B^2}\right)$$

Складывая уравнения (1.7) и используя (1.6), получим соотношение

$$(1.8)\qquad \frac{3}{4}\frac{\partial\tau}{\partial r_1} = -\frac{\overline{B^2}}{r_1}$$

После подстановки (1.8) в последнее уравнение системы (1.7) находим уравнение для температуры

$$(1.9)\qquad r_1^2\frac{\partial^2\tau}{\partial r_1^2} + r_1\frac{\partial\tau}{\partial r_1}(3 + \rho(\varphi)\tau^{1-\nu}) + \frac{2}{3}\rho(\varphi)\tau^{2-\nu} = 0$$

$$\rho(\varphi) = \rho_0(\varphi) / U_0$$

С помощью преобразования

$$\theta = \ln t, \quad \partial\tau / \partial\theta = -2\tau\Psi$$

уравнение (1.9) сводится к уравнению первого порядка

$$(1.10)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{1}{\tau}(1 - \Psi) + \frac{\rho}{2\tau^\nu}\left(1 - \frac{1}{3\Psi}\right)$$

Особая точка $\tau = 0$, $\Psi = 0$ является узлом, точка $\tau = 0$, $\Psi = 1$ — седлом. Возможность сращивания с внутренним решением определяется поведением интегральных кривых в бесконечно удаленной точке. Существует единственная интегральная кривая, выходящая из особой точки типа седла $\tau = \infty$, $\Psi = 1/3$, которой в физической плоскости соответствует решение

$$\tau = G(\varphi) / r_1^{4/3}, \quad r_1 \to 0$$

Сравнивая с (1.2), находим множитель $G(\varphi) = [\rho_0(\varphi)]^{2/3}$. Интегральная кривая, выходящая из особой точки $\tau = \infty$, $\Psi = 1/3$, не может попасть в седло $\tau = 0$, $\Psi = 1$, так как согласно уравнению (1.10) $\partial\Psi / \partial\tau > 0$ при $1/3 < \Psi < 1$. Таким образом, асимптотика при $r_1 \to \infty$ описывается решением, входящим в узел $\tau = 0$, $\Psi = 0$

$$(1.11)\qquad \Psi = \frac{\rho}{6}\tau^{1-\nu} + O(\tau^{2-2\nu})$$

откуда следует выражение для температуры

$$(1.12)\qquad \tau = \left[\left(\frac{1}{3}\frac{\rho_0(\varphi)}{U_0}\ln r_1\right)(1-\nu)\right]^{-1/(1-\nu)}, \quad r_1 \to \infty$$

Указанные свойства решения качественно подтверждаются результатами численного исследования [7] истечения из плоской щели, согласно которым при уменьшении числа Кнудсена плотность и скорость меняются незначительно, а температура вдали от щели обнаруживает тенденцию к уменьшению практически до нуля. Кроме того, отмечаемое в [2] возрастание температуры с увеличением азимутального угла φ вытекает из формулы (1.12), поскольку функция $\rho_0(\varphi)$ уменьшается по мере отхода от центральной линии тока.

2. Переходя к рассмотрению одномерного неустановившегося разлета газа в вакуум, воспользуемся уравнениями сохранения

$$(2.1)\qquad \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial nu}{\partial x}=0$$

$$n\frac{\partial u}{\partial t}+nu\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\partial nT}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}P_{xx}^{(2)}$$

$$\frac{3}{2}n\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}\right)=-nT\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{8}{3}\bar{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial T}{\partial x}-$$

$$-2P_{xx}^{(2)}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}q_x^{(2)}$$

$$\bar{\mu}=\frac{1}{2}\mu A^{-1},\quad k=\frac{15}{8}\mu A^{-1},\quad \mu=T^{\nu},\quad A=\frac{8}{5\sqrt{\pi}}\frac{1}{\mathrm{Kn}}\to\infty$$

Здесь использованы безразмерные переменные работы [1]. Через $P_{xx}^{(2)}$, $q_x^{(2)}$ обозначены барнеттовские составляющие напряжения и потока тепла, которые для обобщенного уравнения Крука записываются в виде

$$P_{xx}^{(2)}=A^{-2}\frac{\mu^2}{nT}\left[\frac{8}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right)\right],\quad q_x^{(2)}=A^{-2}\frac{\mu^2}{nT}\left[\frac{63}{8}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{T}{n}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{8}T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{7}{8}\frac{T}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{d\mu}{dT}\right]$$

Подстановка в уравнения (2.1) разложений

$$(2.2)\qquad q=q_0+A^{-1}q_1+A^{-2}q_2+\ldots\quad (q=n,u,T)$$

приводит в нулевом приближении к уравнениям Эйлера. Для больших времен представим решение уравнений Эйлера в форме

$$(2.3)\qquad n_0=\frac{g_0(\lambda)}{t}+\frac{g_1(\lambda)}{t^{5/3}}+\ldots,\quad u_0=\lambda+\frac{\omega(\lambda)}{t^{2/3}}+\ldots$$

$$T_0=\frac{c_0(\lambda)}{t^{2/3}}+\frac{c_1(\lambda)}{t^{4/3}}+\ldots,\quad \lambda=\frac{x}{t}$$

Функции g_0, g_1, ω, c_0, c_1 связаны соотношениями

$$g_1=-\frac{15}{4}g_0^{4/3}\left(\frac{g_0'}{g_0^{5/3}}\right)',\quad \omega=-\frac{5}{2}\frac{g_0'}{g_0^{1/3}}$$

$$c_0=g_0^{2/3},\quad c_1=\frac{2}{3}\frac{g_1}{g_0^{1/3}}$$

(штрихи означают дифференцирование по λ). Точный вид функции $g_0(\lambda)$ зависит от начальных условий.

В следующем приближении имеем

$$(2.4)\qquad \frac{\partial n_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}n_1u_0+\frac{\partial}{\partial x}n_0u_1=0$$

$$n_1\frac{\partial u_0}{\partial t}+n_0\frac{\partial u_1}{\partial t}+n_0u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}+n_1u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+n_0u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}n_1T_0-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}n_0T_1+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0^{\nu}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$$

$$\frac{3}{2}\left(n_1\frac{\partial T_0}{\partial t}+n_0\frac{\partial T_1}{\partial t}+n_1u_0\frac{\partial T_0}{\partial x}+n_0u_1\frac{\partial T_0}{\partial x}+n_0u_0\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)=$$

$$=-n_1T_0\frac{\partial u_0}{\partial x}-n_0T_1\frac{\partial u_0}{\partial x}-n_0T_0\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{4}{3}T_0^{\nu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2+\frac{15}{8}\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0^{\nu}\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)$$

При $\nu \neq 1$ уравнения (2.4) и аналогичная система относительно n_2, u_2, T_2 допускают асимптотику

$$T_1 \sim t^{-2/3+\varepsilon}, \quad u_1 \sim t^{-2/3+\varepsilon}, \quad n_1 \sim t^{-5/3+\varepsilon}$$
$$T_2 \sim t^{-2/3+2\varepsilon}, \quad u_2 \sim t^{-4/3+2\varepsilon}, \quad n_2 \sim t^{-7/3+2\varepsilon}, \quad \varepsilon = {}^2/_3\,(1-\nu)$$

Следовательно, если $\nu > 1$, то T_1 и T_2 при $t \to \infty$ убывают быстрее, чем T_0, и внутреннее газодинамическое решение равномерно пригодно. Если $\nu < 1$, то разложение (2.2) при $t \to \infty$ расходится за счет роста высших приближений, этот случай исследован в [1]. Температура в области $t_1 = A^{-\sigma}t = 0\,(1)$ удовлетворяет уравнению вида (1.9)

$$t_1^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t_1^2} + t_1 \frac{\partial \tau}{\partial t_1}(3 + g_0(\lambda)\,\tau^{1-\nu}) + \frac{2}{3}\, g_0(\lambda)\,\tau^{2-\nu} = 0, \quad \tau = TA^{1/(1-\nu)} \tag{2.5}$$

Для $\nu = 1$ уравнение (2.5) переходит в линейное с решением

$$\tau = G_1 / t_1^{\delta_1} + G_2 / t_2^{\delta_2}\,\delta_{1,2} = 1 + \frac{g_0}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{g_0}{3} + \frac{g_0^2}{4}} \tag{2.6}$$

Как видно из (2.6), условие сращивания с внутренним решением $T = c_0 / t^{2/3}$ нарушается. Поскольку при $\nu = 1$ введение переменной t_1 теряет смысл, заметим, что уравнение типа (2.5) непосредственно следует из кинетического уравнения в предположении $u = \lambda$, $t \to \infty$, при этом функция $g_0\,(\lambda)$ должна быть заменена на $Ag_0\,(\lambda)$, $A \to \infty$. Тогда, полагая $T = T_0 + A^{-1}T_1 + A^{-2}T_2 + \ldots$, получим

$$T_0 = \frac{c_0(\lambda)}{t^{2/3}}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{2}{3}\frac{T_1}{t} = \frac{8}{9}\frac{c_0}{g_0 t^{5/3}}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{2}{3}\frac{T_2}{t} = \frac{8}{9}\frac{T_1}{g_0 t} - \frac{8}{27}\frac{c_0}{g_0^2 t^{2/3}}$$

т. е. приближения Навье — Стокса и Барнетта содержат логарифмическую особенность на бесконечности

$$T_1 = \frac{c_1}{t^{2/3}} + \frac{8}{9}\frac{c_0}{g_0}\frac{\ln t}{t^{2/3}}, \quad T_2 = \frac{c_2}{t^{2/3}} + \frac{8}{9}\frac{1}{g_0}\left(c_1 - \frac{c_0}{3g_0}\right)\frac{\ln t}{t^{2/3}} + \frac{64}{72}\frac{c_0}{g_0^2}\frac{\ln^2 t}{t^{2/3}}$$

Те же результаты следуют, конечно, и из уравнений сохранения, причем появление неравномерности связано с членом $4/3\,I_0\,(\partial u_0/\partial x)^2$ в уравнении для T_1 системы (2.4) и членами

$$\frac{4}{3}T_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2, \quad \frac{8}{9}\frac{T_0}{n_0}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^3\left[1 - \frac{1}{2}\frac{T_0}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dT_0}\right]$$

в уравнении для T_2.

Для устранения логарифмической особенности наложим малое возмущение на независимые координаты

$$\begin{aligned} t &= \zeta + A^{-1}\Theta_1(\zeta, \eta) + A^{-2}\Theta_2(\zeta, \eta) + \ldots \\ x &= \eta + A^{-1}X_1(\zeta, \eta) + A^{-2}X_2(\zeta, \eta) + \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Макроскопические величины разлагаются в ряд

$$\begin{aligned} n\,(t, x, A) &= N_0(\zeta, \eta) + A^{-1}N_1(\zeta, \eta) + \ldots \\ u\,(t, x, A) &= V_0(\zeta, \eta) + A^{-1}V_1(\zeta, \eta) + \ldots \\ T\,(t, x, A) &= \tau_0(\zeta, \eta) + A^{-1}\tau_1(\zeta, \eta) + \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Функции Θ_i и X_i определяются требованием, чтобы в каждом последующем приближении особенность не нарастала. Преобразование (2.7), (2.8) для уравнений (2.1) в нулевом порядке дает

(2.9)
$$\frac{\partial N_0}{\partial \zeta}+\frac{\partial V_0N_0}{\partial \eta}=0$$
$$\frac{\partial V_0}{\partial \zeta}+V_0\frac{\partial V_0}{\partial \eta}=-\frac{1}{2}\frac{\tau_0}{N_0}\frac{\partial N_0}{\partial \eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}+V_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}=-\frac{2}{3}\tau_0\frac{\partial V_0}{\partial \eta}$$

Из последнего уравнения системы (2.1) в следующем порядке получаем

$$\frac{3}{2}\left(N_1\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}+N_0\frac{\partial \tau_1}{\partial \zeta}+V_1N_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}+V_0N_1\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}+N_0V_0\frac{\partial \tau_1}{\partial \eta}\right)=$$
$$=-N_1\tau_0\frac{\partial V_0}{\partial \eta}-N_0\tau_1\frac{\partial V_0}{\partial \eta}-N_0\tau_0\frac{\partial V_1}{\partial \eta}+\left[\frac{3}{2}N_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta}+\right.$$
$$+\frac{3}{2}N_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}\frac{\partial X_1}{\partial \zeta}+\frac{3}{2}V_0N_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}\frac{\partial X_1}{\partial \eta}+\frac{3}{2}V_0N_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}+$$
$$\left.+N_0\tau_0\frac{\partial V_0}{\partial \eta}\frac{\partial X_1}{\partial \eta}+N_0\tau_0\frac{\partial V_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}\right]+\frac{4}{3}\tau_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta}\right)^2+\frac{15}{8}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\tau_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}\right)$$

Особенность на бесконечности обусловлена членом $4/3\tau_0\,(\partial V_0\,/\,\partial \eta)^2$. Положим $X_1 = 0$. Выбор функции Θ_1 из соотношения

(2.10)
$$\frac{3}{2}N_0\frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta}\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}+\frac{3}{2}N_0V_0\frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}+N_0\tau_0\frac{\partial V_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}+$$
$$+\frac{4}{3}\tau_0\left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta}\right)^2=0$$

исключает неоднородный член.

Решение уравнения в частных производных (2.10) будем искать для случая, когда в качестве N_0, V_0, τ_0, удовлетворяющих уравнениям Эйлера (2.9) в переменных ζ, η, выбрано точное газодинамическое решение [8], для которого на больших ζ справедливы формулы

$$N_0=\frac{[1-s^2]^{3/2}}{k\zeta},\quad V_0=\frac{\eta}{\zeta},\quad \tau_0=\frac{1-s^2}{k^{2/3}\zeta^{2/3}},\quad k=3\sqrt{\frac{5}{6}},\quad s=\frac{\eta}{k\zeta}$$

Характеристическое уравнение в этом случае записывается в виде

(2.11)
$$\frac{d\eta}{d\zeta}=V_0+\frac{{}^2/_3\tau_0\partial V_0/\partial \zeta}{\partial \tau_0/\partial \zeta}=\frac{\eta}{\zeta}\,\frac{2-5s^2}{1-4s^2}$$

Интегрирование (2.11) дает

(2.12) $\zeta = cs\,(1-s^2)^{3/2},\quad c=\mathrm{const}$

Вдоль направления (2.12) уравнение (2.10) переписывается следующим образом:

(2.13)
$$\frac{d\Theta_1}{d\zeta}=\frac{4k}{3\,[1-s^2]^{1/2}\,[1-4s^2]}$$

В результате интегрирования (2.13) при условии $\Theta_1\to 0$, $\zeta\to 0$ находим

(2.14)
$$\Theta_1=\frac{4k}{3}\zeta\left[1-\left(\frac{\eta}{k\zeta}\right)^2\right]^{-3/2}$$

Газодинамическое решение, в котором временная координата t заменена на ζ согласно (2.7), (2.14), является равномерно пригодным в том смысле, что особенность в членах порядка A^{-1} не появляется. Особенности в высших приближениях устраняются надлежащим выбором Θ_i, X_i.

Поступила 6 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жук В. И., Шахов Е. М.* Разлет плоского слоя разреженного газа в вакуум. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4.
2. *Grundy R. E.* Steady cylindrical expansion of a monoatomic gas into vacuum. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 12.
3. *Edwards R. H., Cheng H. K.* Steady expansion of gas into vacuum. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 3.
4. *Hamel B. B., Willis D. R.* Kinetic theory of source flow expansion with application to the free jet. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 5.
5. *Шахов Е. М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, вып. 5.
6. *Grundy R. E.* Axially symmetric expansion of a monoatomic gas from a orifice into a vacuum. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 10.
7. *Лимар Е. Ф., Светцов В. В., Шидловский В. П.* Плоская задача об истечении газа в вакуум при произвольных числах Кнудсена. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 1.
8. *Mirels H., Mullen J. F.* Expansion of gas clouds and hypersonic jets bounded by a vacuum. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 3.