

**О ГИПЕРЗВУКОВОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ
С ПОСТОЯННЫМ МОМЕНТОМ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ**

Е. Д. Терентьев

(Москва)

Рассматривается осесимметричное гиперзвуковое течение на больших расстояниях от обтекаемого тела. Поток за телом разбивается на три области: область структуры ударной волны, внешнее идеальное течение и ламинарный вязкий и теплопроводный след. Изучаются возмущения, связанные с постоянным моментом количества движения, направленным вдоль оси симметрии. Построенные возмущения локализуются в следе и при переходе во внешнюю область затухают по экспоненциальному закону.

Будем рассматривать осесимметричное стационарное движение газа. Обозначим через ρ_∞ плотность газа в набегающем потоке, скорость которого v_∞ направлена вдоль оси x цилиндрической системы координат x, r, θ . Пренебрегая давлением газа в набегающем потоке, положим $p_\infty = 0$, в связи с чем число Маха $M_\infty = \infty$. Будем считать газ совершенным, обе удельные теплоемкости c_p и c_v положим постоянными. Через N_{Pr} обозначим число Прандтля. Зависимости коэффициентов вязкости λ_1, λ_2 и теплопроводности k от удельной энтальпии w для простоты возьмем линейными: $\lambda_1 = \lambda_{10}w, \lambda_2 = \lambda_{20}w, k = k_0w$. В дальнейшем значения как независимых переменных, так и искомых функций удобно задавать безразмерными, используя для основных единиц отсчета ρ_∞, v_∞ и λ_{10} .

В качестве основной возьмем систему уравнений Навье — Стокса, записанную в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} = 0, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho w \quad \left(\kappa = \frac{c_p}{c_v} \right) \\
 & \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ w \left[\frac{4}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) + \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[w \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{w}{r} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \\
 & \rho v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \rho \frac{v_\theta^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[w \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ w \left[\frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] \right\} + \frac{2w}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \\
 & \rho v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \rho \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[w \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \frac{2w}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho v_x \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial w}{\partial r} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{N_{Pr}} w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{N_{Pr}} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial w}{\partial r} + 2w \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \right] + \\ + \left(-\frac{2}{3} + \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right) w \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Как было установлено в работе [1], для течений с неограниченно большим числом Маха равномерный набегающий поток отделен от неравномерного линией разрыва производных газодинамических функций. Эта линия является границей области структуры ударной волны. В формировании течения в этой области определяющую роль играют нормальные вязкие напряжения и нормальная компонента вектора потока тепла. С помощью метода срачивания внешних и внутренних асимптотических разложений из области структуры ударной волны удастся перейти во внешнюю область [2], в которой влияние вязкости и теплопроводности в первом приближении несущественно. Для течения во внешней области справедлива аналогия [3-6], ставящая в соответствие гиперзвуковому потоку неустановившееся движение в пространстве с меньшим на единицу числом измерений. В рамках этой аналогии параметры течения за конечным телом находятся из решения задачи о сильном взрыве [7-9]. В свою очередь, решение задачи о сильном взрыве при приближении к оси потока может быть продолжено в область ламинарного следа [10], где в формировании течения определяющую роль уже играют касательная компонента вектора потока тепла и касательные вязкие напряжения.

В этой работе рассмотрим гиперзвуковое течение, соответствующее обтеканию конечного тела, в котором сохраняется момент количества движения M_x , направленный вдоль оси симметрии. В первом приближении не являются существенными причины, вызвавшие появление постоянного момента количества движения. Его источником могут быть, например, закрученная струя или равномерно вращающееся тело, поскольку газ считается вязким. Для подсчета M_x проведем две контрольные плоскости перпендикулярно оси потока. Пусть одна из них расположена впереди тела, а другая — Σ — позади него на расстоянии x . Принимая во внимание, что набегающий поток равномерный, для безразмерного момента M_x имеем

$$(2) \quad M_x = - \iint_{\Sigma} \left(\rho v_x v_\theta - w \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right) r^2 d\theta dr$$

Ясно, что величина M_x не должна зависеть от того, на каком расстоянии x выбрана контрольная плоскость Σ .

В работе [11] был предложен общий подход к построению нестационарных течений идеального газа, в которых на основное автомодельное движение накладываются возмущения, связанные с какой-либо физической величиной, сохраняющейся во времени. Распространению результатов работы [11] на стационарные гиперзвуковые течения были посвящены работы [12, 13], где построены течения за телами, на которые помимо силы сопротивления действует подъемная сила. Основная идея этого подхода заключается в том, что при поиске возмущений сразу ставится условие, обеспечивающее

сохранение некоторой физической величины, а именно: для нестационарных течений независимость от времени t , для стационарных гиперзвуковых — независимость от координаты x . Конечно, такое требование, если течение сложное и разделено на области, связано с гипотезой о том, что интегрирование по одной из областей дает конечный вклад в изучаемую физическую величину. При этом еще необходимо показать, что продолжение возмущений в остальные области не связано с появлением в них каких-либо особенностей.

В изучаемом течении имеются три области: область структуры ударной волны, внешняя область и ламинарный след. Проведем оценки для момента количества движения M_x для каждой из них. В формулу (2), определяющую M_x , входит тангенциальная скорость v_θ , поэтому проверим возможность введения v_θ в каждой из областей.

Область структуры ударной волны отделена от равномерного потока линией разрыва производных газодинамических функций, которая предполагается симметричной и при $x \rightarrow \infty$ имеет вид $r_s = (bx)^{1/2} + \dots$. Воспользуемся оценками [2] для функций в этой области. Проинтегрировав проекцию уравнения движения на ось θ из системы (1), получим

$$(3) \quad \rho v_\theta v_r r^2 = r^2 w \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + f_1(x)$$

где $f_1(x)$ — произвольная функция. Граничные условия при $r = r_s$, где искомые функции имеют значения $v_\theta = 0$, $v_r = 0$, $w = 0$, заставляют положить $f_1(x) = 0$. Интегрирование (3) окончательно дает

$$v_\theta = f_2(x) \exp \left[\int_{r_s}^r \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\rho v_r}{w} \right) dr_1 \right]$$

Используя асимптотики функций ρ , v_r и w при $r \rightarrow r_s$, приведенные в [2], можно показать, что член $\rho v_r / w$ дает интегрируемую особенность, тогда $v_\theta = 0$ при $r = r_s$ заставляет положить $f_2(x) = 0$. Из этого следует, что в области структуры ударной волны нельзя ввести возмущения, связанные с моментом количества движения, и при переходе во внешнюю область в качестве граничного условия следует взять $v_\theta = 0$, что соответствует условию Рэнкина — Гюгонно о сохранении касательной составляющей скорости при переходе через ударную волну.

Рассмотрим течение во внешней области. В первом приближении его можно построить, исходя из решения задачи о сильном взрыве [7, 8], который возьмем в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 - \frac{1}{2(\kappa+1)} \frac{b}{x} U_1(\xi), & v_r &= \frac{1}{\kappa+1} \left(\frac{b}{x} \right)^{1/2} V_1(\xi) \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \rho_1(\xi), & P &= \frac{1}{2(\kappa+1)} \frac{b}{x} P_1(\xi) \\ w &= \frac{\kappa}{2(\kappa+1)^2} \frac{b}{x} W_1(\xi), & \xi &= \frac{r}{(bx)^{1/2}} \end{aligned}$$

Дополним систему функций (4) тангенциальной составляющей скорости

$$(5) \quad v_\theta = \frac{b^{1/2}}{\kappa+1} x^{-\alpha} Z_1(\xi)$$

Определим α из условия независимости M_x от x , в результате $\alpha = 3/2$. Подставим (4) и (5) в систему уравнений (1) и выпишем следствия из уравнения неразрывности и проекции уравнения движения на ось θ

$$(6) \quad \begin{aligned} \left(V_1 - \frac{\kappa+1}{2}\xi\right) \frac{d\rho_1}{d\xi} + \left(\frac{dV_1}{d\xi} + \frac{V_1}{\xi}\right) \rho_1 &= 0 \\ \left(V_1 - \frac{\kappa+1}{2}\xi\right) \rho_1 \frac{dZ_1}{d\xi} + \left(\frac{V_1}{\xi} - \frac{\kappa^3(\kappa+1)}{2}\right) \rho_1 Z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение системы (6) на Z_1 и прибавляя ко второму, получим соотношение

$$\rho_1 Z_1 \xi^2 \left(V_1 - \frac{\kappa+1}{2}\xi\right) = C_1$$

где C_1 — постоянная. Воспользуемся условием на границе внешнего течения при $\xi = 1$, где $v_\theta = 0$, и, следовательно, $Z_1(1) = 0$. Отсюда сразу получаем, что $C_1 = 0$. Отсюда заключаем, что во внешнем течении $Z_1 \equiv 0$ и поэтому конечного вклада в M_x получить нельзя.

Остается рассмотреть область следа. В первом приближении течение в области следа имеет вид [10]

$$(7) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 - \frac{1}{2(\kappa+1)} b x^{-\kappa/(\kappa+1)} U_2(\zeta) + \dots \\ v_r &= \frac{1}{\kappa+1} b^{1/2} x^{-\kappa/(\kappa+1)} V_2(\zeta) + \dots \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} x^{-1/(\kappa+1)} \rho_2(\zeta) + \dots \\ p &= \frac{1}{2(\kappa+1)} \frac{b}{x} P_2(\zeta) + \dots \\ w &= \frac{\kappa}{2(\kappa+1)^2} b x^{-\kappa/(\kappa+1)} W_2(\zeta) + \dots, \quad \zeta = \frac{r}{b^{1/2}} x^{-1/(\kappa+1)} \end{aligned}$$

При приближении к оси потока ($\zeta \rightarrow 0$) функции (7) имеют следующие разложения:

$$(8) \quad \begin{aligned} U_2(\zeta) &= U_{20} + \dots, \quad V_2 = 1/2 \zeta + \dots \\ \rho_2(\zeta) &= \rho_{20} + \dots, \quad P_2 = P_{10}, \quad W_2(\zeta) = W_{20} + \dots \end{aligned}$$

где $U_{20}, \rho_{20}, P_{10}, W_{20}$ — некоторые положительные постоянные. Функции (7) монотонны, при $\zeta \rightarrow \infty$ они имеют асимптотики, переходящие в асимптотики решения задачи о сильном взрыве [14] в окрестности его центра

$$(9) \quad \begin{aligned} U_2(\zeta) &= U_{10} \zeta^{-2/(\kappa-1)} + \dots, \quad V_2 = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \zeta + \dots \\ \rho_2(\zeta) &= \rho_{10} \zeta^{2/(\kappa-1)} + \dots, \quad P_2(\zeta) = P_{10}, \quad W_2(\zeta) = W_{10} \zeta^{-2/(\kappa-1)} + \dots \end{aligned}$$

Здесь $U_{10}, \rho_{10}, P_{10}, W_{10}$ — некоторые положительные постоянные.

Добавим к функциям (7) тангенциальную составляющую скорости

$$(10) \quad v_\theta = \frac{1}{\kappa+1} b^{1/2} x^{-\beta} Z_2(\zeta) + \dots$$

Подставим функции (7), (10) в формулу (2) и получим выражение для момента количества движения

$$(11) \quad M_x = -\frac{b^2}{\kappa-1} x^{2/(\kappa-1)-\beta} I_0, I_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_0^\zeta \rho_2 Z_2 \zeta_1^2 d\zeta_1$$

Выберем β по-прежнему из условия независимости M_x от координаты x , это дает $\beta = 2 / (\kappa + 1)$. Ясно, что вместо проекции уравнения движения на ось θ в системе (1) можно было бы взять проекцию уравнения сохранения момента количества движения на ось x

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho v_\theta v_r - r^2 w \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[r^2 \rho v_x v_\theta - r^2 w \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right] = 0$$

Заметим, что под знаком интеграла в (2) стоит та же величина, что и под знаком производной по x в уравнении (12). Поскольку изучаемое движение связано с постоянной величиной M_x , для функций (7), (10) будет иметь место первый интеграл [15]. Проводя выкладки, аналогичные выкладкам работы [15], получим

$$(13) \quad \frac{\kappa(\kappa-1)}{2(\kappa+1)^2} \zeta^2 W_2 \left(\frac{dZ_2}{d\zeta} - \frac{Z_2}{\zeta} \right) - \zeta^2 Z_2 \rho_2 (V_2 - \zeta) = C_2$$

Изучим сходимость интеграла I_0 при $\zeta \rightarrow 0$ и $\zeta \rightarrow \infty$. Вычислим асимптотику Z_2 при $\zeta \rightarrow 0$ с помощью (8), в результате

$$Z_2 = - \frac{(\kappa+1)^2}{\kappa(\kappa-1)} \frac{C_2}{W_{20}} \frac{1}{\zeta} + \dots$$

Отсюда следует, что хотя сама функция $Z_2 \rightarrow \infty$, тем не менее интеграл I_0 при $\zeta \rightarrow 0$ сходится для любых C_2 .

Определим поведение функции Z_2 при $\zeta \rightarrow \infty$. Используя асимптотики (9), получим

$$(14) \quad Z_2 = C_2 \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{\rho_{10}} \zeta^{-2(\kappa-1)-3} + \dots$$

Конечно, асимптотика решения уравнения (13) при $\zeta \rightarrow \infty$ должна обеспечить сходимость интеграла I_0 в равенстве (11). Подставим (14) в интеграл, определяющий I_0 . В результате

$$\int_0^\zeta \rho_2 Z_2 \zeta_1^2 d\zeta_1 \sim C_2 \ln \zeta$$

Отсюда сразу приходим к выводу, что конечность M_x эквивалентна требованию $C_2 = 0$. Проводя интегрирование уравнения (13), получим

$$Z_2 = C_3 \zeta \exp \left[\frac{2(\kappa+1)^2}{\kappa(\kappa-1)} I_1(\zeta) \right]$$

$$I_1(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\rho_2}{W_2} (V_2 - \zeta_1) d\zeta_1$$

При $\zeta \rightarrow 0$ интеграл $I_1(\zeta) \rightarrow 0$ и поэтому $Z_2 \rightarrow C_3 \zeta$. Поведение функции Z_2 при $\zeta \rightarrow \infty$ определяется с помощью асимптотик (9)

$$(15) \quad Z_2 = C_3 \zeta \exp \left[- \frac{(\kappa-1)(\kappa+1)}{2\kappa^2} \frac{\rho_{10}}{W_{10}} \zeta^{2(\kappa+1)/(\kappa-1)} \right]$$

Поскольку под знаком экспоненты в формуле (15) стоит отрицательная величина ($\rho_{10} > 0, W_{10} > 0$), стремящаяся к бесконечности при $\zeta \rightarrow \infty$, функция Z_2 экспоненциально затухает. Из этого следует сходимость инте-

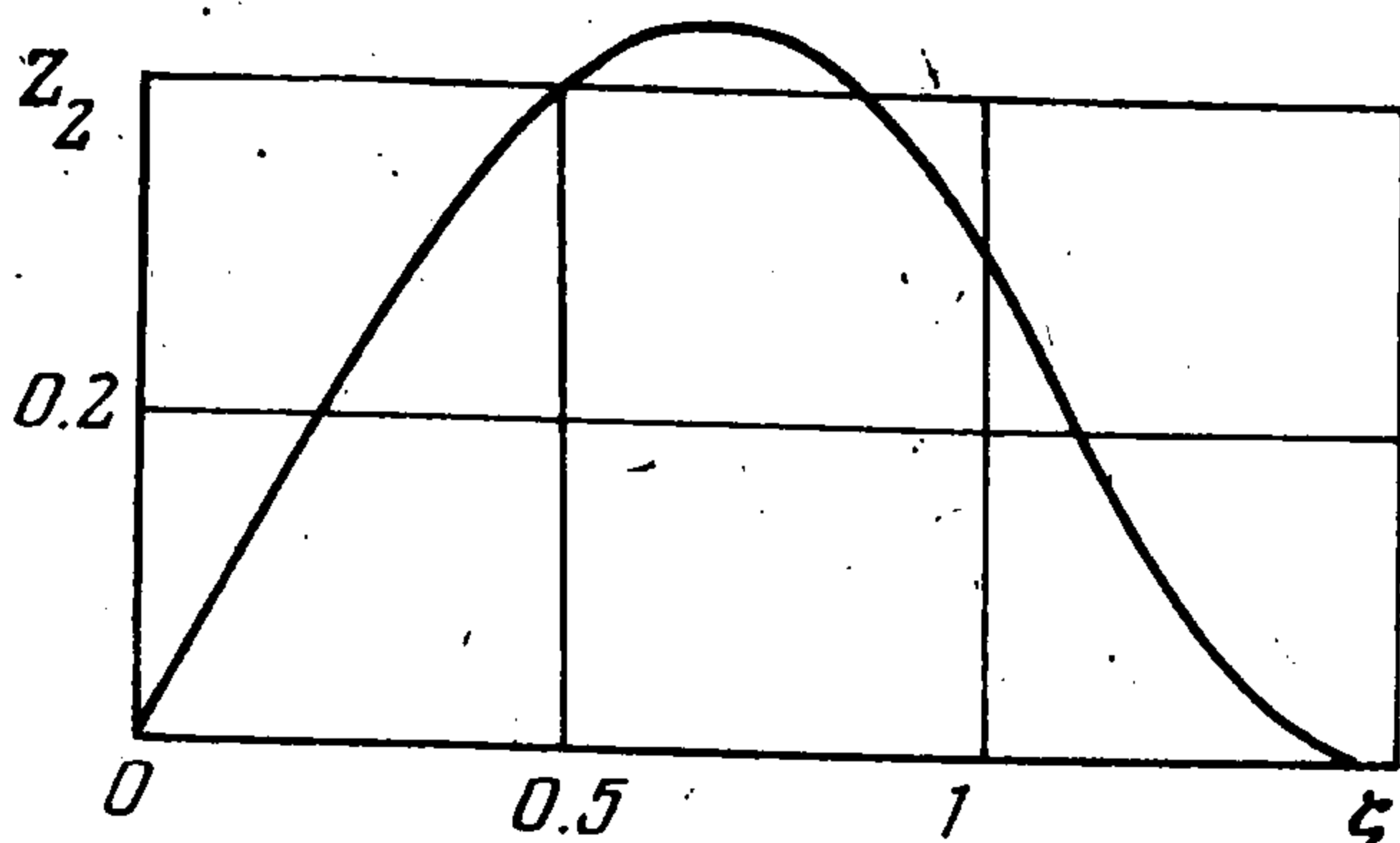
графа I_0 . Из формулы (11) легко устанавливается связь между постоянной C_3 и M_x

$$M_x = -\frac{b^2}{\kappa-1} C_3 I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \rho_2 \exp \left[\frac{2(\kappa+1)}{\kappa(\kappa-1)} I_1(\zeta) \right] \zeta^3 d\zeta$$

Вид функции Z_2 при $C_3 = 1$, $\kappa = 1,4$, $N_{Pr} = 3/4$ показан на фигуре, постоянная $I_2 = 0.0833$.

Таким образом, возмущения, которые связаны постоянным моментом количества движения, направленным вдоль оси x , локализованы в следе



и экспоненциально быстро затухают при переходе из следа во внешнее течение. Из этого заключаем, что в рассматриваемом приближении продолжением v_0 во внешнюю область будет функция, тождественно равная нулю.

Построенное течение всегда является вихревым, но при $M_x = 0$

составляющая ω_x вихря скорости вдоль оси потока тождественно равна нулю. С появлением M_x возникает

$$\omega_x = \frac{1}{\kappa+1} x^{-3/(\kappa+1)} \left(\frac{dZ_2}{d\zeta} + \frac{Z_2}{\zeta} \right)$$

Согласно асимптотическому поведению Z_2 составляющая вихря ω_x не имеет особенностей на оси и при $\zeta \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает. Однако в то время как момент количества движения M_x при $x \rightarrow \infty$ сохраняется, ω_x стремится к нулю, что объясняется диссипативными процессами, происходящими в газе.

При проведении вычислений нигде не учитывалось отличие продольной скорости v_x от единицы, поэтому для рассматриваемой задачи имеет место аналогия между гиперзвуковыми и нестационарными движениями газа. Полученные решения описывают движение первоначально холодного газа, в котором в начальный момент вдоль некоторой оси выделяется энергия и сообщается угловая скорость, обеспечивающая конечный момент количества движения, направленный вдоль этой оси.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого и теплопроводного газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. Терентьев Е. Д. Структура ударных волн в гиперзвуковых течениях. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
3. Tsien H. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. and Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
4. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.

5. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
6. *Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П.* Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 1.
7. *Седов Л. И.* Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
8. *Седов Л. И.* Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
9. *Taylor G. I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion II. The atomic explosion, 1945. Proc. Roy. Soc. A, 1950, vol. 201, No. 1065.
10. *Сычев В. В.* О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом. In: Fluid Dynamics Transactions, vol. 3. Warsaw, PWN, 1966.
11. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* К общей теории нестационарных течений, близких к автомодельным. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
12. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О гиперзвуковом обтекании несущего профиля. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
13. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О пространственных гиперзвуковых течениях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
14. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
15. *Терентьев Е. Д.* Об интегралах уравнений нестационарных течений, близких к автомодельным. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.