**Прикладная математика и механика. Том 41, 1977**

УДК 533.6.011

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**В. Г. Бутов, И. М. Васенин, А. И. Шелуха**

(Томск)

Излагается метод решения вариационных задач газовой динамики, основанный на сведении их к задачам нелинейного программирования. Основными компонентами вычислительного алгоритма являются прямые расчеты поля течения газа и метод поиска экстремума функции многих переменных. Особенности применения метода рассматриваются на примерах решения вариационных задач о построении сверхзвуковых контуров сопел максимальной тяги и на задаче о построении контура сопла с плоской переходной поверхностью.

В настоящее время наиболее универсальным методом исследования вариационных задач двумерной газовой динамики является общий метод множителей Лагранжа в форме, впервые введенной в работах [1,2]. Ввиду того, что зависимость оптимального решения от системы необходимых условий экстремума, полученных этим методом, как правило, неявная, при численном построении его требуется итерационная процедура. Шаг такой процедуры предполагает расчет поля течения для заданных границ области, расчет по этому полю множителей Лагранжа, учитывающих уравнения течения в функционале вариационной задачи, и после этого уточнение формы контура. При создании таких процедур возникают значительные трудности, связанные с необходимостью решать систему уравнений с частными производными для определения множителей Лагранжа. В основном поэтому все решенные к настоящему времени вариационные задачи относятся только к сверхзвуковым течениям, для которых упомянутые уравнения с частными производными имеют гиперболический тип.

1. Пусть $x$, $y$ — прямоугольные координаты. Рассмотрим произвольное стационарное плоское или осесимметричное газодинамическое течение. Пусть требуется построить контур аэродинамического тела $y = \zeta(x)$, находящегося в поле этого течения и доставляющего экстремум функционалу

$$J = \int\limits_A^B \Phi(x, \zeta, \zeta', u_1, \ldots, u_n)\, dx \tag{1.1}$$

где $\Phi$ — известная функция, $\{u_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — система функций, удовлетворяющих уравнениям течения, $A$ и $B$ — начальная и конечная точки. Штрихом здесь и ниже обозначены производные по $x$ вдоль контура. Рассматриваются следующие изопериметрические условия:

$$K_j = \int\limits_A^B G_j(x, \zeta, \zeta')\, dx, \quad j = 1, \ldots, m \tag{1.2}$$

где $G_j(x, \zeta, \zeta')$ и $K_j$ — известные функции и константы. В виде (1.1) записываются, например, осевая составляющая тяги сопла, волновое сопротивление и т. д.

Определим искомый оптимальный контур следующим образом:

(1.3) $$y'(x) = \zeta_0(x) + \Delta\zeta(x), \quad y(x_0) = y_0$$

где $\zeta_0(x)$ — известная функция, $x_0$ — начальная точка контура, а $\Delta\zeta(x)$ аппроксимируем отрезком ряда

(1.4) $$\Delta\zeta(x) = \sum_{k=0}^{l} c_k \varphi_k(x) .$$

Здесь $\{\varphi_k\}$ — система линейно-независимых базисных функций, $c_k$ — коэффициенты. Тогда для контура, заданного в виде (1.3), (1.4), будем иметь

$$J = J(c_1, \ldots, c_r) \quad r < l$$

а $r$ выбирается так, чтобы $l - r$ коэффициентами в (1.4) можно было удовлетворить изопериметрическим условиям (1.2).

Таким образом, вариационная задача поиска оптимальной формы контура при заданных условиях сводится к задаче поиска точки $(c_1, \ldots, c_r)$, в которой значение функции экстремально. Поиск экстремума функции многих переменных проводится методами нелинейного программирования. Компоненты градиента функции $J$ рассчитываются по формулам

(1.5) $$\partial J/\partial c_k \approx [J(c_1, \ldots, c_k + \Delta c_k, \ldots, c_r) - J(c_1, \ldots, c_r)] / \Delta c_k$$

(1.6) $$\partial J/\partial c_k \approx [J(c_1, \ldots, c_k + \Delta c_k, \ldots, c_r) - J(c_1, \ldots, c_k - \Delta c_k, \ldots, c_r)] / (2\Delta c_k)$$

в которых функция $J$ вычисляется по формуле (1.1) после расчета поля течения для контура, заданного в виде (1.3), (1.4).

Если оптимальная конфигурация контура должна содержать внутренние угловые точки, положение которых заранее неизвестно, то каждый гладкий участок аппроксимируется аналогично (1.3), (1.4). В этом случае аргументами функции $J$ будут коэффициенты аппроксимирующих выражений гладких участков с учетом условий стыковки.

2. Исследование вопросов, связанных с выбором базисных функций $\{\varphi_k\}$ и метода поиска экстремума, проводилось на вариационной задаче построения сверхзвуковой части сопла максимальной тяги в случае безвихревого течения идеального газа. В качестве систем базисных функций использовались различные типы полиномов. Наиболее эффективные результаты были получены, когда в качестве функций $\varphi_k$ выбирались полиномы Чебышева. Преимущества этих полиномов с точки зрения применения методов нелинейного программирования наглядно проявляются на следующем примере.

Пусть

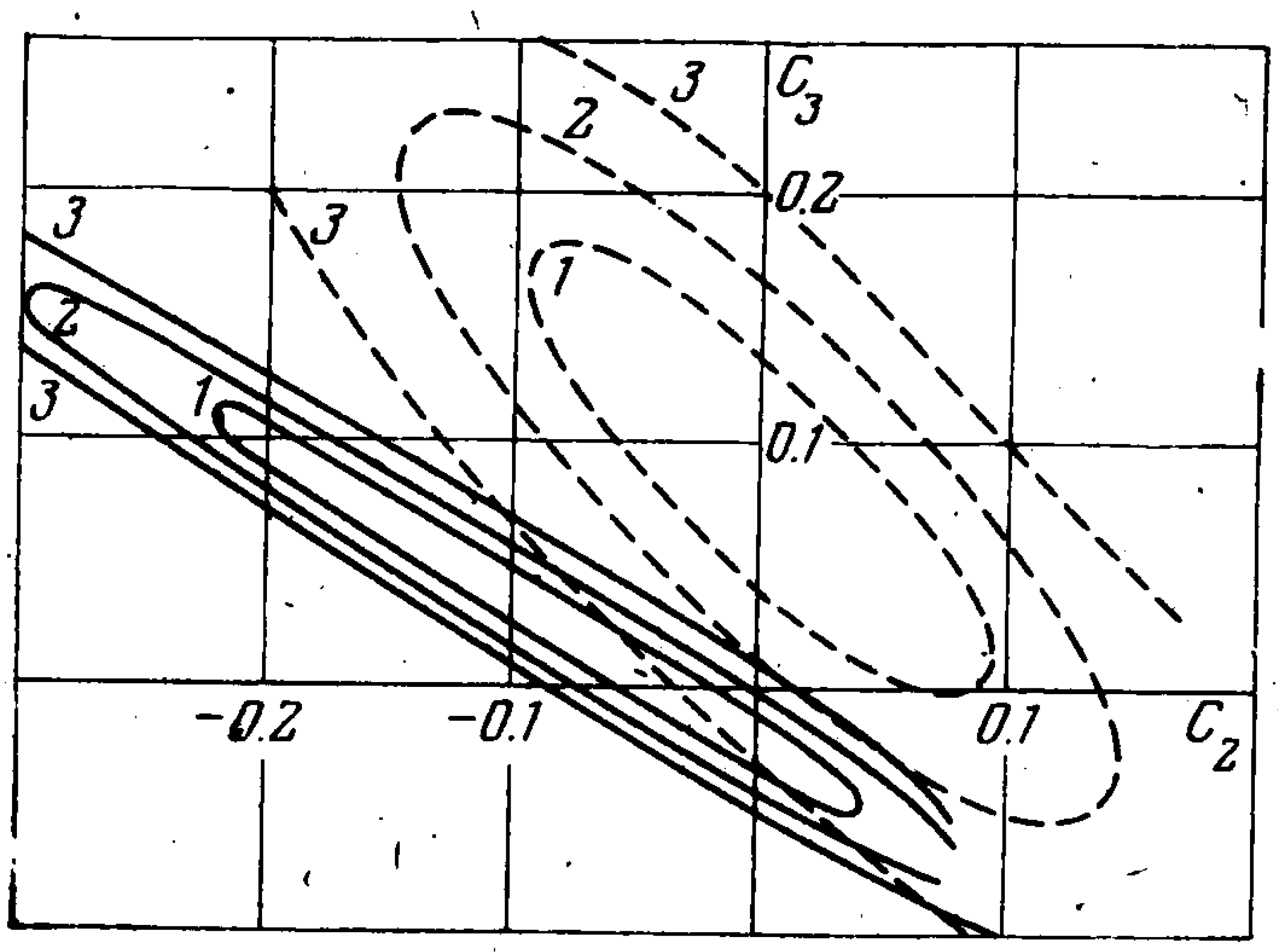
(2.1) $$y' = 0.2 + \sum_{k=2}^{3} c_k \left(\frac{x}{2}\right)^k, \quad y(0) = 1$$

(2.2) $$y' = 0.2 + \sum_{k=2}^{3} c_k T_k\left(\frac{x}{2}\right), \quad y(0) = 1 .$$

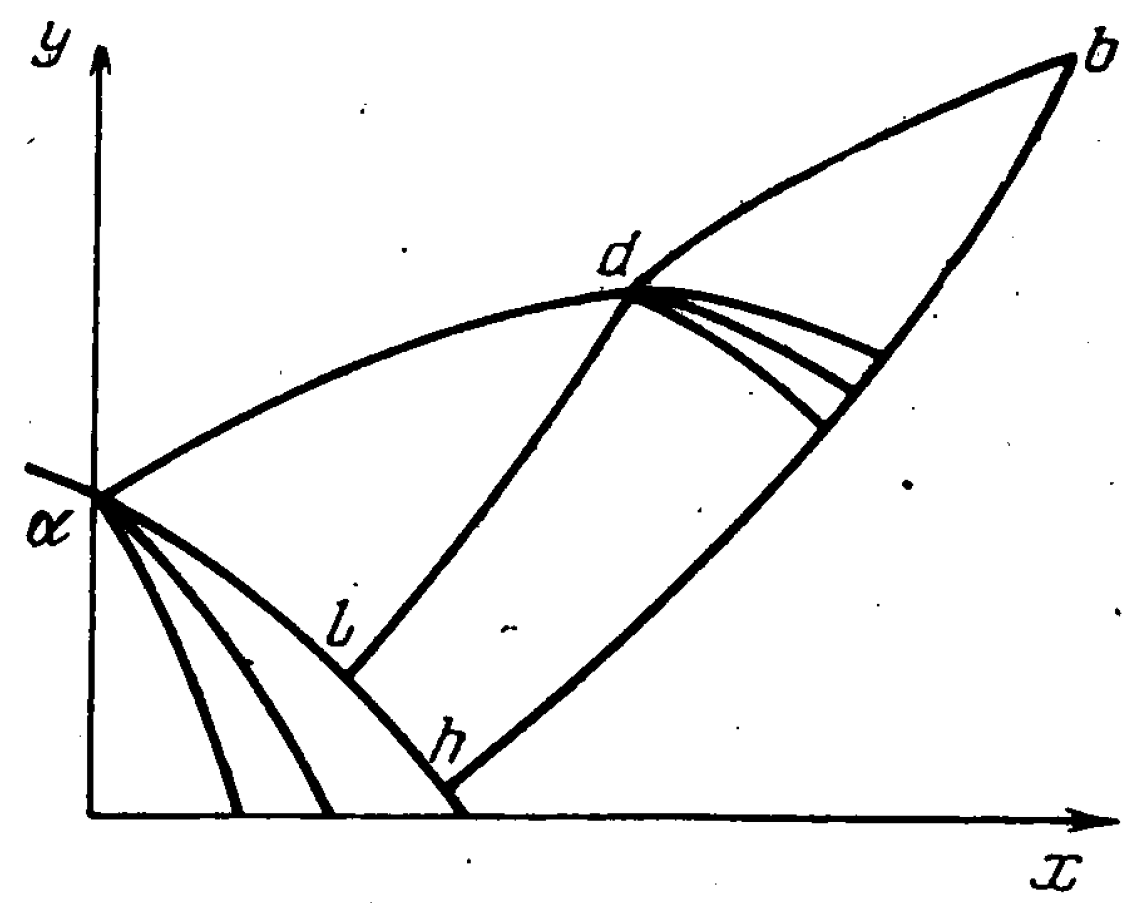
— две аппроксимации контура сверхзвуковой части осесимметричного сопла, где в (2.1) использованы степенные полиномы, в (2.2) — полиномы Чебышева $T_k(x/2)$ и $0 \leqslant x \leqslant 2$. На фиг. 1 нанесены сплошными и пунктирными линиями линии уровня функции

$$J(c_2, c_3) = \int_A^B (p - p_+) yy' \, dx$$

определяющей с точностью до постоянного множителя тягу сверхзвуковых частей сопел с контурами (2.1) и (2.2) соответственно (кривые *1*, *2*, *3* отвечают значениям 0.55, 0.5, 0.4). Здесь $p$ — давление на контуре сопла, $p_+$ — наружное давление. При этом тяга рассчитывалась для безвихревого осесимметричного течения идеального газа с плоской переходной поверхностью, проходящей через точку $x = 0$.




Фиг. 1




Фиг. 2

Успех применения методов поиска экстремума функций многих переменных, использующих приближенные выражения (1.5) и (1.6) для расчета проекций градиента, существенно зависит от формы области поиска. В узких областях с крутыми склонами ошибки аппроксимации компонент градиента по формулам (1.5), (1.6) значительны, что приводит к нарушению сходимости этих методов [3]. Этот факт совместно с опытом решения вариационных задач, изложенных ниже, подтверждает целесообразность выбора в качестве базисных функций полиномов Чебышева.

Большое количество расчетов было проведено с целью выбора подходящего метода поиска экстремума функции многих переменных. На вариационных задачах построения осесимметричных сопел максимальной тяги для идеального газа были опробованы метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона [4], метод наискорейшего спуска и модифицированный метод Дэвидона [5]. Наиболее эффективные результаты были достигнуты при применении метода [5]. Ниже дано сравнение результатов расчета тяги сверхзвуковой части осесимметричного сопла для безвихревого течения идеального газа, полученных путем применения метода наискорейшего спуска и метода [5] в зависимости от числа обращений к расчету поля течения.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Градиентный метод | $n$ | 9 | 22 | 38 | 54 | 65 | 75 | 121 | 160 |
| | $J \cdot 10^4$ | 753 | 764 | 771 | 780 | 788 | 790 | 0.0791 | 0.0792 |
| Метод [5] | $n$ | 9 | 24 | 37 | 52 | 62 | | | |
| | $J \cdot 10^4$ | 753 | 790 | 798 | 802 | 802 | | | |

Оптимальный контур сопла разыскивался в виде

$$y' = 0.12 + \sum_{k=1}^{3} c_k T_k\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y(0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

для течения с плоской переходной поверхностью, проходящей через точку $x = 0$, показателем адиабаты $\gamma = 1.14$ и отношением $p_+ / p_0 = 0.25$, где $p_0$ — давление торможения. Расчеты поля течения проводились методом характеристик. При этом интегральные законы сохранения массы и количества движения выполнялись с точностью до 0.05%. Контур, полученный методом [5] после $n = 52$ обращений к расчету поля течения, и оптимальный контур, полученный общим методом множителей Лагранжа, практически совпадают. Совпадают и значения функционалов тяги $J = 0.0802$. Время решения задачи на БЭСМ-6 методом работы [5] составляет около 20 *мин*. Как видно из приведенных результатов, метод наискорейшего спуска в окрестности максимума сходится медленно, и поэтому его применение для решения вариационных задач газовой динамики нецелесообразно.

Заметим, что использование формулы (1.5) требует меньше обращений к расчету поля течения, чем использование аппроксимации (1.6). Однако требование определенной точности расчета компонент градиента по формуле (1.5) (имеющей первый порядок аппроксимации) можно выполнить только за счет существенного уменьшения шага $\Delta C_k$. Это в свою очередь приводит к ошибкам расчета компонент градиента, связанных с приближенным вычислением значений $J(c_1, \ldots, c_r)$. Другими словами, значения $J(c_1, \ldots, c_k + \Delta c, \ldots, c_r)$ и $J(c_1, \ldots, c_r)$ при малых $\Delta c_k$ различаются на величину, соизмеримую с ошибкой расчета функции $J(c_1, \ldots, c_r)$.

3. Примером оптимальной конфигурации, содержащей внутренние угловые точки, является сверхзвуковая часть осесимметричного контура составного сопла, предназначенного для работы на двух существенно различных режимах. При этом полное сопло работает в условиях меньшего наружного давления $p^+$. В условиях большего наружного давления $p^{+0}$ концевой участок сопла убирается (или отстреливается). Задаются максимально допустимая длина полного сопла, противодавления $p^+$, $p^{+0}$ и вероятности $n$, $1 - n$ использования полного сопла и его части. Оптимизация осесимметричного составного сопла (фиг. 2) производится по средней тяге сверхзвуковой части, которая с точностью до несущественного множителя равна

$$\chi_\Sigma = \int_a^d pyy'dx + n\int_d^b pyy'dx - \frac{n}{2} y_b^2 p^+ - \frac{1-n}{2} y_d^2 p^{+0}$$

где $ad$ — участок укороченного сопла и $db$ — концевой участок сопла. Соответствующая постановка вариационной задачи и ее численное решение на основе общего метода множителей Лагранжа рассмотрены в [6].

С целью сведения этой задачи к задаче нелинейного программирования искомый контур представляется в виде

$$y'(x) = \begin{cases} 0.2 + \sum\limits_{k=0}^{2} a_k T_k\left(\dfrac{x}{X}\right), & 0 \leqslant x \leqslant x_d \\ 0.3 + \sum\limits_{k=0}^{2} c_k T_k\left(\dfrac{x - x_d}{X}\right), & x_d \leqslant x \leqslant X \end{cases}$$

где $x_d$ — абсцисса точки $d$. Ордината точки $d$ выбирается из условия стыковки начального и концевого участков контура. Поиск экстремума функционала тяги проводился в пространстве переменных $\{a_0, a_1, a_2, x_d, c_0, c_1, c_2\}$.

Были выполнены расчеты значений координат и тангенсов углов наклона в характерных точках контура оптимального составного сопла, полученного в случае безвихревого течения идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$, для допустимой длины сопла $X = 2.91$ и значений параметров $p^{+0} = 0.0048$, $p^+ = 0.116$, $n = 0.35$ (длина сопла отнесена к радиусу критического сечения, наружные давления — к комплексу $\rho_* \omega_*^2$, где $\omega_*$ и $\rho_*$ — критические скорость и плотность потока). Результаты совпадают с результатами расчета, полученными в работе [6] общим методом множителей Лагранжа.

Следует отметить, что в [6] решалась более простая «обратная задача», в которой считались заданными значения $y_a'$, угол излома контура в точке $d\ \Delta y' \leqq y'(x_d + 0) - y'(x_d - 0)$ и координаты $x_l$ и $x_h$, определяющие положение точек $l$ и $h$ на замыкающей характеристике первого пучка волны разрежения (фиг. 2).

4. В качестве иллюстрации возможности применения методов нелинейного программирования к решению вариационных задач для дозвуковых и трансзвуковых течений ниже рассматривается пример построения контура дозвуковой части сопла, обеспечивающего в минимальном сечении параллельное течение со звуковой скоростью. Обычно эта задача решается как обратная задача теории сопла Лаваля [7]. Однако она может быть поставлена и как вариационная задача.

Пусть, например, необходимо построить контур дозвуковой части осесимметричного сопла, проходящий с нулевым наклоном через заданную точку $(x_0, y_0) = (0,2)$ в начальном сечении и реализующий в заданном минимальном сечении $x = 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ течение с плоской переходной поверхностью. Для решения этой задачи искомый контур аппроксимировался полиномом

$$y' = -1.5x + 0.75x^2 + \sum_{k=0}^{6} c_k T_k\left(x - 1\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Коэффициенты $c_k$ вычислялись из условий в концевых точках контура

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 0$$

и условия минимума функционала

$$J = \int_0^1 [(u - a)^2 + v^2]\, dy$$

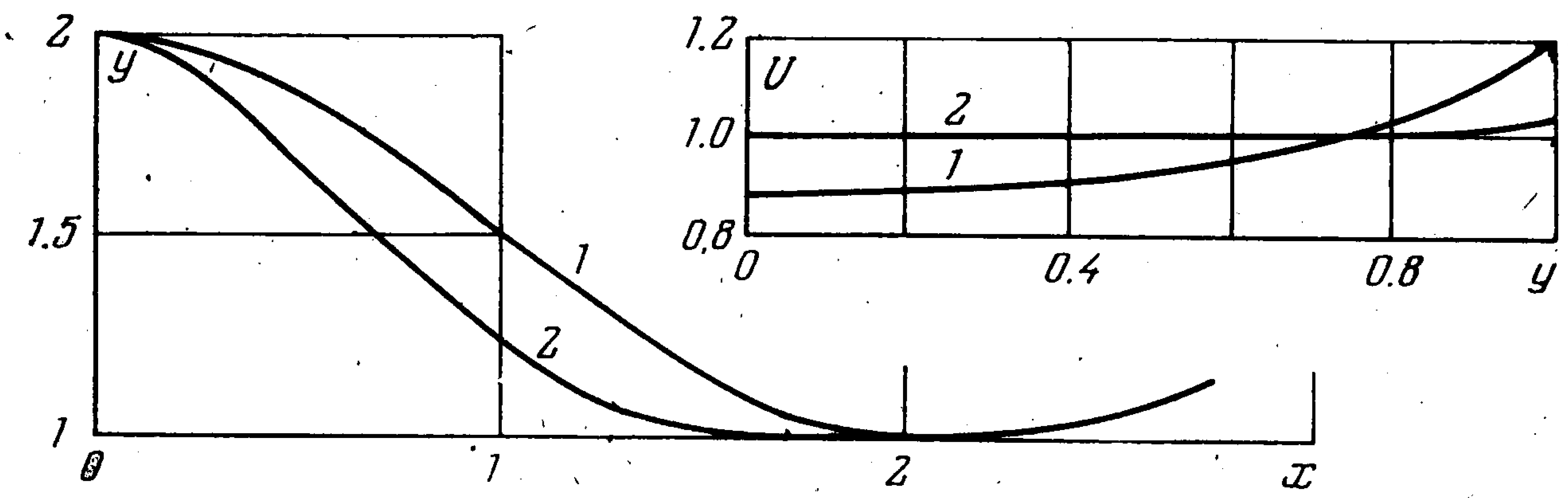
где $u$, $v$ — проекции скорости газа на оси $x$ и $y$ соответственно, $a$ — местная скорость звука, вычисленные в наименьшем сечении.

Поле течения рассчитывалось методом установления, описанным в [8]. Разностная сетка в плоскости $x$, $y$ имела размер $45 \times 20$. Интегральные законы сохранения массы, количества движения и энергии выполнялись с точностью 0.5%.

На фиг. 3 показаны контур *1* начального приближения и контур *2*, построенный в результате решения задачи, а также значения проекции скорости газа $u$, рассчитанные в наименьшем сечении сопел, ограниченных этими контурами. Для решения задачи потребовалось 78 обращений к расчету поля течения и около 20 часов машинного времени на БЭСМ-6. В целях уменьшения времени установления при расчете компонент градиента в качестве начального поля выбирались параметры течения, соответствующие контуру предыдущего приближения.

В заключение отметим, что для успешного применения изложенного метода необходимо знать особенности оптимального решения. Это видно на примере задачи об оптимальном составном сопле. В связи с этим, чтобы выяснить, в каком классе функции следует искать решение, необходимо проводить предварительный анализ вариационной задачи, например, с помощью общего метода множителей Лагранжа.

Основными компонентами предлагаемого вычислительного алгоритма являются расчет поля течения и поиск экстремума функции многих пере-




Фиг. 3

менных хорошо разработанными методами нелинейного программирования. Это определяет главные достоинства метода: простоту реализации и универсальность в применении к вариационным задачам дозвуковых и сверхзвуковых, равновесных и неравновесных течений, для которых способы расчеты поля течения известны.

Авторы благодарят А. Н. Крайко за внимание к работе и А. Д. Рычкова, предоставившего программу расчета дозвуковых течений.

Поступила 6 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guderley K. G., Armitage J. V.* A general method for the determination of best superconic nozzles. Boeing Sci. Res. Laboratories, Flight Sci. Laboratory, Seattle, Washington, 1962. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1963, № 6.)
2. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимальные задачи газодинамики. Изв. вузов. Авиационная техника, 1963, № 2.
3. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. М., «Наука», 1975.
4. *Polak E.* Computational methods in optimization. New-York—London, Acad. Press, 1971. (Рус. перев.: М., «Мир», 1974.)
5. *Powers W. F.* A crude-search Davidon-type technique with application to shuttle optimization. AIAA Paper, 1972, No. 72—907. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1973, № 5.)
6. *Крайко А. Н., Тилляева Н. И.* Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
7. *Пирумов У. Г.* Расчет течения в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
8. *Васенин И. М., Рычков А. Д.* Численное решение задачи о смешанном осесимметричном течении газа в некоторых криволинейных областях методом установления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.