Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 538.4

КОНТИНУАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПРОВОДЯЩИХ СУСПЕНЗИЙ, ДВИЖУЩИХСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. М. Руткевич

(Москва)

Формулируется континуальная модель электродинамики слабоконцентрированной проводящей суспензии, движущейся в магнитном поле. Выводятся осредненные уравнения при наличии разрывов локальных параметров на поверхностях частиц. На основании анализа распределения тока в окрестности отдельной частицы проводится осреднение закона Ома. Установлены выражения для макроскопических плотностей электрической мощности и джоулевой диссипации. Рассмотрены свойства континуальных уравнений при больших и малых магнитных числах Рейнольдса.

Наряду с формулированием уравнений механики суспензий как сред с внутренними степенями свободы [1] или микроструктурой [2] возникает задача построения континуальных электродинамических моделей. Такое построение предполагает переход к уравнениям поля, осредненным по физически малым объемам с большим числом диспергированных частиц.

Замкнутое макроконтинуальное описание становится возможным, если осредненные материальные уравнения, в частности закон Ома, представлены в форме связей между величинами, непосредственно входящими в осредненные законы сохранения. В неподвижных изотропных средах осредненный закон Ома имеет вид: $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle$, где σ_e — эффективная проводимость. Для разбавленной суспензии сферических частиц величина σ_e была рассчитана Максвеллом [3]. Имеются работы по моделированию эффективной проводимости при конечной концентрации и различной структуре включений (см., например, [4,5]).

При магнитогидродинамическом взаимодействии осредненный закон Ома должен формулироваться с учетом возмущений, вносимых движением диспергированных частиц в поле скоростей и, следовательно, в плотность электрического тока. Поэтому от локального закона Ома нельзя перейти к макроскопическому формальной заменой электропроводности ее эффективным значением, а остальных величин — их средними значениями. Взаимное движение фаз приводит к появлению «тока скольжения», который можно рассматривать как внутреннюю степень свободы.

1. Осреднение уравнений Максвелла. Рассмотрим суспензию макрочастиц с проводимостью σ_s в жидкости или плазме с проводимостью σ_f. Индекс s всюду относится к частицам, индекс f — к жидкости. Минимальный макрообъем, в котором справедливо приближение сплошной среды, имеет порядок l^3. Величина l, характерный размер частиц a и характерная длина изменения осредненных параметров L удовлетворяют неравенству $a \ll l \ll L$.

Система предполагается неполяризующейся, неферромагнитной и квазинейтральной, так что к обеим фазам применимы обычные магнитогидродинамические уравнения [6]. Будем считать выполненным следующее условие:

$$\min(\sigma_s, \sigma_f) = \sigma_0 \gg \varepsilon_0\omega \tag{1.1}$$

Здесь ω — характерная частота изменения локальных параметров, ε_0 — электрическая постоянная. (Все соотношения записаны в системе единиц СИ). В частности, при отсутствии нестационарных внешних воздействий будет $\omega \sim V_s / d$, где V_s — характерная скорость частиц, d — среднее расстояние между ними. Неравенство (1.1) позволяет пренебречь током смещения и считать электрическое поле квазистационарным. Тогда уравнения Максвелла для микрополей можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_e / \varepsilon_0$$

Под «микрополем» имеется в виду осредненное по масштабу, много меньшему размера диспергированных частиц, поле элементарных носителей заряда, т.е. макроскопическое с точки зрения классической электродинамики. Под макрополем подразумевается результат осреднения микрополя по объему D_l.

Поскольку электропроводность разрывна на поверхностях частиц, микрополе также будет претерпевать разрывы. На этих поверхностях, внешняя нормаль к которым обозначена через $\mathbf{n}$, должны выполняться условия [6, 7]

$$\mathbf{n}\{\mathbf{B}\} = 0, \quad \mathbf{n}\times\{\mathbf{B}\} = \mu_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{n}\{\mathbf{E}\} = \vartheta / \varepsilon_0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{n}\times\{\mathbf{E}\} = -\mu_0(\mathbf{n}\mathbf{V})\,\mathbf{n}\times\mathbf{i} + \mathbf{n}\times\nabla_\tau(q\mathbf{n}\mathbf{j})$$

$$\mathbf{n}\{\mathbf{V}\} = 0, \quad \mathbf{n}\{\mathbf{j}\} = -\nabla_\tau\cdot\mathbf{i}$$

Здесь $\mathbf{i}$ и ϑ — плотность поверхностных токов и зарядов соответственно, q — контактное сопротивление, ∇_τ — поверхностный оператор Гамильтона. В правой части четвертого уравнения (1.3) отлично от нуля только одно из слагаемых, так как условия образования токовых и двойных электрических слоев обычно несовместимы.

Ниже вводится обычная операция осреднения по физически малому макрообъему D_l

$$\langle g \rangle = D_l^{-1} \int\limits_{D_l} g(\mathbf{X} + \mathbf{x}')\, dD_l \tag{1.4}$$

Будем считать, что $\mathbf{X}$ — радиус-вектор центра масс объема D_l. Вектор $\mathbf{X} + \mathbf{x}'$ пробегает все точки в D_l, так что интегрирование ведется по переменной $\mathbf{x}'$. Оператор (1.4) является сглаживающим: функция $\langle g \rangle$ непрерывна на поверхностях разрыва g. Пространственные интервалы $|d\mathbf{X}|$ и $|d\mathbf{x}|$, на которых можно считать малыми изменения функций $\langle g \rangle$ и g соответственно, удовлетворяют условию $|d\mathbf{X}| \gg a \gg |d\mathbf{x}|$. Поэтому $\mathbf{X}$ может рассматриваться как макроконтинуальный радиус-вектор. Инвариантные дифференциальные операторы, применяемые ниже к макроскопическим функциям, предполагают дифференцирование по X_i.

Для непрерывных полей имеет место перестановочность операций дифференцирования и осреднения, используемая при выводе уравнений Максвелла из уравнений микроскопической электродинамики [8]. В суспензии поля могут претерпевать разрывы на границах раздела фаз, что необходимо учесть при осреднении уравнений (1.2). Для функции g, имеющей разрывы на движущихся поверхностях S_k, расположенных внутри D_l, можно установить следующие соотношения:

$$(1.5)\qquad \frac{\partial\langle g\rangle}{\partial t}=\left\langle\frac{\partial g}{\partial t}\right\rangle-\frac{1}{D_l}\sum_k\int\limits_{S_k}V_n\{g\}\,dS_k,\quad V_n=\mathbf{n}\mathbf{V}_s=\mathbf{n}\mathbf{V}_f$$

$$\frac{\partial\langle g\rangle}{\partial X_i}=\left\langle\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle+\frac{1}{D_l}\sum_k\int\limits_{S_k}n_i\{g\}\,dS_k,\quad \{g\}=g_f-g_s$$

В рассматриваемом случае S_k — поверхности частиц, n_i — проекция $\mathbf{n}$ на базисный вектор $\mathbf{e}_i$, V_n — нормальная скорость перемещения разрыва. Используя (1.3) — (1.5), после осреднения уравнений (1.2) получим

$$(1.6)\qquad \operatorname{rot}\langle\mathbf{E}\rangle=-\frac{\partial\langle\mathbf{B}\rangle}{\partial t}+\frac{1}{D_l}\sum_k\int\limits_{S_k}\mathbf{n}\times\nabla_\tau(q\mathbf{n}\mathbf{j})\,dS_k$$

$$\operatorname{rot}\langle\mathbf{B}\rangle=\mu_0\Big(\langle\mathbf{j}\rangle+\frac{1}{D_l}\sum_k\int\limits_{S_k}\mathbf{i}\,dS_k\Big)$$

$$\operatorname{div}\langle\mathbf{B}\rangle=0,\quad \operatorname{div}\langle\mathbf{E}\rangle=\varepsilon_0^{-1}\Big(\langle\rho_e\rangle+\frac{1}{D_l}\sum_k\int\limits_{S_k}\vartheta\,dS_k\Big)$$

Поверхностные интегралы в (1.6) определяют вклад микроразрывов в создание вихрей и источников макроскопического поля.

Вид уравнений (1.6) не зависит от объемной концентрации и формы движущихся включений.

Ниже исключаются из рассмотрения эффект контактного сопротивления и случай бесконечной электропроводности, требующие специального анализа. Тогда, полагая в (1.6) $q=0$, $\mathbf{i}=0$, придем к системе

$$(1.7)\qquad \operatorname{rot}\langle\mathbf{E}\rangle=-\partial\langle\mathbf{B}\rangle/\partial t,\quad \operatorname{rot}\langle\mathbf{B}\rangle=\mu_0\langle\mathbf{j}\rangle,\quad \operatorname{div}\langle\mathbf{B}\rangle=0$$

Последнее уравнение (1.6) служит для отыскания плотности источников макроскопического поля $\langle\mathbf{E}\rangle$ после его независимого определения.

В дальнейшем будет рассматриваться монодисперсная суспензия недеформируемых сферических частиц радиуса a при малой объемной концентрации

$$(1.8)\qquad c={}^4/_3\pi a^3 n\ll 1$$

Здесь c — объемная, n — числовая концентрация частиц. Для микроскопической плотности тока принята изотропная форма закона Ома

$$(1.9)\qquad \mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$

Если результат осреднения правой части (1.9) сводится к известной функции от $\langle\mathbf{E}\rangle$, $\langle\mathbf{B}\rangle$, средних скоростей и проводимостей фаз, то из системы (1.7) можно исключить $\langle\mathbf{j}\rangle$, $\langle\mathbf{E}\rangle$ и получить уравнение индукции, связывающее вектор $\langle\mathbf{B}\rangle$ с гидродинамическими характеристиками. В осредненных уравнениях движения фаз присутствуют объемные лоренцевы силы; в уравнениях энергии — члены, характеризующие обмен энергией между каждой из фаз и электромагнитным полем. Для определения вклада электрического тока в производство энтропии фаз необходимо знать среднефазовые плотности джоулевой диссипации. Возникает задача представления этих величин с помощью $\langle \mathbf{j} \rangle$, $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{B} \rangle$ и гидродинамических характеристик. Для слабоконцентрированной суспензии искомые связи устанавливаются из рассмотрения задачи об электрическом поле, возмущаемом движением частицы в безграничной среде.

Указанный путь позволяет получить уравнения для расчета осредненных полей и токов по заданным средним скоростям компонент и объемной концентрации частиц. Построение же полной системы магнитогидродинамических уравнений выходит за рамки данной работы. Оно предполагает нахождение зависимостей тензора макронапряжений и других динамических характеристик фаз от электромагнитных величин. В частности, силы взаимодействия между фазами, определяемые механическими микронапряжениями на поверхностях частиц, в проводящей среде зависят от магнитного поля. Как следует из рассмотрения задач об обтекании [9-11], влияние магнитного поля на гидродинамическое сопротивление сравнимо с действием лоренцевой силы, а в некоторых случаях превышает ее.

Осреднение по фазам проводится в соответствии с правилом

$$\langle g \rangle_\alpha = D_\alpha^{-1} \int\limits_{D_\alpha} g(\mathbf{X} + \mathbf{x}')\, dD_\alpha \quad (\alpha = s, f)$$

Здесь D_s и D_f — объемы, занятые частицами и жидкостью соответственно; $D_s + D_f = D_l$. В дальнейшем используется соотношение

$$\langle g \rangle = c\,\langle g \rangle_s + (1 - c)\langle g \rangle_f \tag{1.10}$$

и формула для среднего от произведения двух величин

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle + \langle \delta g_1 \delta g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle + c\,\langle \delta g_1 \delta g_2 \rangle_s + (1 - c)\,\langle \delta g_1 \delta g_2 \rangle_f, \quad \delta g_i = g_i - \langle g_i \rangle \tag{1.11}$$

Соотношения (1.10), (1.11) будут применяться также к средним по элементарным ячейкам D_k. Последние представляют собой области, занятые k-й частицей и окружающей ее жидкостью, рассматриваемые обычно в реологии суспензий [12]. Объемные доли частицы и жидкости в ячейке равны c и $1 - c$ соответственно. Между средними значениями параметров ячеек, обозначенными величинами в квадратных скобках, и средними по объему D_l имеет место связь

$$n\,\langle g \rangle = \sum_k [g_k], \quad n\,\langle g \rangle_\alpha = \sum_k [g_k]_\alpha \quad (\alpha = s, f)$$
$$[g_k] = c\,[g_k]_s + (1 - c)[g_k]_f \tag{1.12}$$

2. Распределение электрического тока в ячейках и осреднение закона Ома. При описании микротечения в ячейке предположим выполнение неравенств

$$\sigma^\circ = \max(\sigma_s, \sigma_f) \ll (\mu_0 \omega l^2)^{-1}$$
$$\mathrm{Re}_m^{(l)} = \sigma^\circ \mu_0 V^\circ l \ll 1, \quad V^\circ = \max(V_s, V_f) \tag{2.1}$$

Первое неравенство (2.1) позволяет пренебречь производной по времени в первом уравнении (1.2) и считать $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \approx 0$ в пределах объема D_l. Второе условие (2.1) позволяет принять $\mathbf{B} \approx \langle \mathbf{B} \rangle$ на длине порядка l.

Исследуем распределение тока при поступательном движении сферической частицы со скоростью $\mathbf{V}_s$ в потоке, имеющем на бесконечности скорость $\mathbf{V}_\infty$ и плотность тока $\mathbf{j}_\infty$. Для достаточно мелких частиц число Стюарта можно считать малым

$$\mathrm{St} = \sigma_f \langle B \rangle^2 a \,/\, (\rho_f W_\infty) \ll 1 \tag{2.2}$$

(При очень малой скорости обтекания W_∞ возможно нарушение неравенства (2.2). В таком случае следует предположить малость квадрата числа Гартмана: $\mathrm{Ha}^2 = \mathrm{St}\cdot\mathrm{Re} \ll 1$, где $\mathrm{Re} = W_\infty a \,/\, \nu_f$ — обычное число Рейнольдса.) Поэтому при нахождении электрического тока в первом приближении по St поле W относительной скорости жидкости можно принять таким, как в отсутствие магнитогидродинамического взаимодействия Плотность тока определяется из закона Ома

$$\mathbf{j}_s = \sigma_s \mathbf{E}', \quad \mathbf{j}_f = \sigma_f (\mathbf{E}' + \mathbf{W} \times \langle \mathbf{B} \rangle), \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V}_s \times \langle \mathbf{B} \rangle = -\nabla\Phi' \tag{2.3}$$

где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле в системе, движущейся с частицей, определяемое из решения краевой задачи для потенциала Φ'

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_-' = 0 \quad (r < a), \quad \Delta\Phi_+' = \langle \mathbf{B} \rangle\, \mathrm{rot}\,\mathbf{W} \quad (r > a) \\ \Phi_-' = \Phi_+', \quad \partial\Phi_-' / \partial r = \sigma_* (\partial\Phi_+' / \partial r - \mathbf{n}(\mathbf{W} \times \langle \mathbf{B} \rangle)) \quad (r = a) \\ \nabla\Phi_+' \to -\mathbf{E}_\infty \quad (r \to \infty), \quad |\Phi_-'(0)| < \infty, \quad \sigma_* = \sigma_f / \sigma_s, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r} / r \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра частицы, Φ_-' и Φ_+' — потенциал внутри и вне сферы соответственно. Предполагается, что распределение $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ в отсутствие магнитного поля осесимметрично

$$\mathbf{W} = W_r (r, \theta) \mathbf{e}_r + W_\theta (r, \theta) \mathbf{e}_\theta \tag{2.5}$$

Угол θ отсчитывается от направления $\mathbf{W}_\infty$. Будем считать поле $\mathbf{W}$ несжимаемым, что допустимо при $M^2 = W_\infty^2 \,/\, C_f^2 \ll 1$, где C_f — скорость звука в жидкости

$$\mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0 \tag{2.6}$$

Распределение тока внутри частицы не зависит от выбранного поля скоростей, если последнее удовлетворяет условиям (2.5), (2.6), и кроме того

$$\mathbf{n}\mathbf{W} = 0 \quad (r = a), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_\infty + O(r^{-1}) \quad (r \to \infty) \tag{2.7}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что разность двух решений задачи (2.4), отвечающих полям скорости $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$, постоянна внутри шара. Обозначив эту разность через χ, придем к следующей задаче:

$$\begin{gathered} \Delta\chi_- = 0 \ (r < a), \quad \Delta\chi_+ = \langle \mathbf{B} \rangle \ \mathrm{rot}\ \mathbf{u} \ (r > a) \\ \chi_- = \chi_+, \quad \partial\chi_- \,/\, \partial r = \sigma_* \left[\partial\chi_+ / \partial r - \mathbf{n}\,(\mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle)\right] \ (r = a) \\ \nabla\chi_+ \underset{r\to\infty}{=} O(r^{-1}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из (2.5), (2.6) следует, что $\mathbf{u}$ можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,\Psi, \quad \Psi = \Psi (r, \theta) \mathbf{e}_\varphi \tag{2.9}$$

В соответствии с требованием непротекания Ψ обращается в нуль при $r = a$. Рассмотрим вспомогательную внешнюю задачу

(2.10) $$\Delta\chi_+^* = \langle\mathbf{B}\rangle \operatorname{rot}\mathbf{u} \quad (r > a)$$
$$\partial\chi_+^* / \partial r = \mathbf{n}(\mathbf{u}\times\langle\mathbf{B}\rangle) \quad (r = a), \quad \nabla\chi_+^*{}_{r\to\infty} = O(r^{-1})$$

Используя соотношения

$$\langle\mathbf{B}\rangle \operatorname{rot}\mathbf{u} = -\Delta(\langle\mathbf{B}\rangle\Psi)$$
$$\mathbf{n}(\mathbf{u}\times\langle\mathbf{B}\rangle) = -\frac{\partial}{\partial n}(\langle\mathbf{B}\rangle\Psi) + \mathbf{n}(\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)\Psi$$

заключаем, что задача (2.10) эквивалентна следующей:

(2.11) $$\Delta\Lambda = O \quad (r > a), \quad \partial\Lambda/\partial r = \mathbf{n}(\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)\Psi \quad (r = a)$$
$$\nabla\Lambda_{r\to\infty} = O(r^{-1}), \quad \Lambda = \chi_+^* + \langle\mathbf{B}\rangle\Psi$$

Так как справедливо тождество

$$\mathbf{n}(\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)\Psi = (\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)(\mathbf{n}\Psi) - \Psi(\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)\mathbf{n}$$

и $\mathbf{n}\Psi \equiv 0$ во всем течении вследствие осевой симметрии, а на поверхности шара $\Psi = 0$, то условие Неймана в задаче (2.11) оказывается нулевым. Следовательно, она имеет решение $\Lambda \equiv C = \mathrm{const}$. Теперь видно, что пара функций

(2.12) $$\chi_- = C, \quad \chi_+ = \chi_+^* = -\langle\mathbf{B}\rangle\Psi + C$$

удовлетворяет всем условиям (2.8). Поскольку решение задачи (2.8) единственно с точностью до аддитивной постоянной, распределение (2.12) будет искомым.

Утверждение (2.7) позволяет рассчитать плотность тока в частице (но не в жидкости) по простейшему полю $\mathbf{W}$, отвечающему невязкому потенциальному обтеканию

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 = \nabla\{(1 + {}^1/_2 a^3 r^{-3})\mathbf{W}_\infty\mathbf{r}\}$$

Решение для такого поля скоростей в частном случае $\mathbf{j}_\infty = 0$ получено в [10]. Можно обобщить его на случай $\mathbf{j}_\infty \neq 0$ и, кроме того, учесть вихревую составляющую поля $\mathbf{W}$ с помощью формулы (2.12). Соответствующие выражения для тока и электрического поля в лабораторной системе координат примут вид

(2.13) $$\mathbf{j}_s = \frac{3\sigma_f}{1 + 2\sigma_*}\left(\mathbf{E}_\infty + \mathbf{V}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle - \frac{1}{2}\mathbf{W}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)$$
$$\mathbf{j}_f = \sigma_f\left(\mathbf{E}_\infty + \mathbf{V}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle + \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{a^3}{r^3}\mathbf{W}_\infty\mathbf{r}\right)\times\langle\mathbf{B}\rangle + \right.$$
$$\left. + \nabla\left\{\frac{a^3}{r^3}(\mathbf{E}_s - \mathbf{E}_\infty)\mathbf{r}\right\} + (\langle\mathbf{B}\rangle\nabla)\Psi\right)$$
$$\mathbf{E}_s = (1 + 2\sigma_*)^{-1}(3\sigma_*\mathbf{E}_\infty - (1 - \sigma_*)\mathbf{V}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle + (1 + {}^1/_2\sigma_*)\mathbf{W}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle)$$
$$\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_\infty + \nabla\left(\frac{a^3}{r^3}(\mathbf{E}_s - \mathbf{E}_\infty)\mathbf{r} + \langle\mathbf{B}\rangle\Psi\right)$$

В слабоконцентрированной суспензии распределения (2.13) можно отождествить с микропеременными внутри элементарных ячеек. Средние по ячейке вычисляются в соответствии с формулой

(2.14) $$[g] = D_R^{-1}\int_{D_R} g\, dD_R$$

Здесь D_R — шар радиуса $R = ac^{-1/3}$, имеющий с частицей общий центр. Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\text{(2.15)}\qquad [\mathbf{E}] = -D_R^{-1}\int\limits_{D_R}\nabla\Phi\, dD_R = -D_R^{-1}\int\limits_{S_R}\Phi\mathbf{n}\, dS_R$$

$$[\mathbf{j}] = D_R^{-1}\int\limits_{D_R}\operatorname{div}\mathbf{T}\, dD_R = D_R^{-1}\int\limits_{S_R}(\mathbf{nj})\,\mathbf{r}\, dS_R$$

Здесь Φ — электрический потенциал, $\mathbf{T}$ — тензор с компонентами $T_{ik} = r_i j_k$. Формула Гаусса — Остроградского в (2.15) применена с учетом непрерывности Φ и $\mathbf{nj}$ на внутренней сфере S_a. Из (2.13), (2.14) следует, что на сфере S_R

$$\text{(2.16)}\qquad \begin{aligned}&\Phi = \Phi_f = -\{(1-c)\mathbf{E}_\infty + c\mathbf{E}_s\}\,\mathbf{r} - \langle\mathbf{B}\rangle\,\mathbf{\Psi}\\ &\mathbf{nj} = \mathbf{nj}_f = \mathbf{n}\{(1-c)\,\mathbf{j}_\infty + c\mathbf{j}_s + \sigma_f(\langle\mathbf{B}\rangle\,\nabla)\,\mathbf{\Psi}\}\end{aligned}$$

После подстановки (2.16) в (2.15) получим

$$\text{(2.17)}\qquad \begin{aligned}&[\mathbf{E}] = (1-c)\,\mathbf{E}_\infty + c\mathbf{E}_s + [\mathbf{E}_\Psi],\quad [\mathbf{j}] = (1-c)\,\mathbf{j}_\infty + c\mathbf{j}_s + [\mathbf{j}_\Psi]\\ &[\mathbf{E}_\Psi] = -{}^1/_2\,[\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}]\times\langle\mathbf{B}\rangle = \beta\mathbf{W}_\infty\times\langle\mathbf{B}\rangle,\quad [\mathbf{j}_\Psi] = -\sigma_f\,[\mathbf{E}_\Psi]\end{aligned}$$

Представления средних характеристик в форме потоков (2.15) отражают суммарные эффекты возмущений, вносимых частицей. Параметр β в общем случае зависит от числа Рейнольдса. Для невязкого потенциального обтекания $\beta = 0$, в то время как для стоксовского режима будет

$$\text{(2.18)}\qquad \Psi = -\frac{3}{4}W_\infty a\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta,\quad \beta = \frac{3}{4}c^{1/3}(1-c^{2/3})$$

Учитывая однородность величин $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{j}_s$ внутри частицы, из (2.17) и второй формулы (1.12), найдем

$$\text{(2.19)}\qquad [\mathbf{E}]_s = \mathbf{E}_s,\quad [\mathbf{j}]_s = \mathbf{j}_s,\quad [\mathbf{E}]_f = \mathbf{E}_\infty + \frac{[\mathbf{E}_\Psi]}{1-c},\quad [\mathbf{j}]_f = \mathbf{j}_\infty + \frac{[\mathbf{j}_\Psi]}{1-c}$$

С помощью формул (1.12), (2.13), (2.19) и соотношений

$$[\mathbf{V}]_s = \mathbf{V}_s,\quad [\mathbf{V}]_f = \mathbf{V}_\infty - 2\beta\,(1-c)^{-1}(\mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_s)$$

устанавливается макроскопический закон Ома

$$\text{(2.20)}\qquad \begin{aligned}&\langle\mathbf{j}\rangle = \sigma_e(\langle\mathbf{E}\rangle + \mathbf{U}_e\times\langle\mathbf{B}\rangle)\\ &\sigma_e = \sigma_f\frac{1+2\varkappa c}{1-\varkappa c},\quad \varkappa = \frac{1-\sigma_*}{1+2\sigma_*},\quad \sigma_* = \frac{\sigma_f}{\sigma_s}\\ &\mathbf{U}_e = \langle\mathbf{V}\rangle - \frac{3}{2}\,\frac{c\,(1-c)}{1+2\varkappa c}\,\varkappa\mathbf{W}_*,\quad \mathbf{W}_* = \langle\mathbf{V}\rangle_f - \langle\mathbf{V}\rangle_s\end{aligned}$$

Величина σ_e совпадает с эффективной проводимостью суспензии по Максвеллу [3]. Вектор $\mathbf{U}_e\times\langle\mathbf{B}\rangle$ определяет эффективную электродвижущую силу, возникающую при движении двухфазной среды в магнитном поле. При отличной от нуля средней скорости скольжения $\mathbf{W}_*$ равенство $\mathbf{U}_e = \langle\mathbf{V}\rangle$ выполняется при совпадении проводимостей фаз. Отметим, что параметр β, зависящий от детальной картины обтекания частиц, не входит явно в осредненный закон Ома. Выражения для среднефазовых плотностей тока имеют вид

$$\langle \mathbf{j} \rangle_s = \frac{3}{(1+2\sigma_*)(1+2\varkappa c)} \{\langle \mathbf{j} \rangle - (1-c)\langle \mathbf{j}_* \rangle\} \tag{2.21}$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle_f = (1+2\varkappa c)^{-1} \left\{\langle \mathbf{j} \rangle + \frac{3c}{1+2\sigma_*}\langle \mathbf{j}_* \rangle\right\}, \quad \langle \mathbf{j}_* \rangle = {}^1/_2 \sigma_f \mathbf{W}_* \times \langle \mathbf{B} \rangle$$

Отсюда видно, что при пропускании среднего тока $\langle \mathbf{j} \rangle$ через двухскоростную суспензию средние токи в фазах не могут быть определены по их проводимостям и величине c, если не задан «ток скольжения» $\langle \mathbf{j}_* \rangle$.

Данный выше вывод закона Ома опирался на распределения тока в ячейках при трансляционном движении частиц. Наряду с распределениями (2.13) возможны составляющие микрополя $\mathbf{E}_\omega$ и тока $\mathbf{j}_\omega$, обусловленные вращением частицы с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_s$ и окружающей жидкости, имеющей при $r \to \infty$ невозмущенную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_f$. Электрический потенциал Φ_ω, индуцируемый медленным относительным вращением сферы, определяется из решения задачи

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_\omega^- = 2\langle \mathbf{B} \rangle \boldsymbol{\omega}_s \quad (r < a), \quad \Delta\Phi_\omega^+ = \langle \mathbf{B} \rangle \operatorname{rot} \mathbf{V}_\omega \quad (r > a) \\ \Phi_\omega^- = \Phi_\omega^+, \quad \partial\Phi_\omega^- / \partial r + a\{(\mathbf{n}\langle \mathbf{B} \rangle)(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_s) - \langle \mathbf{B} \rangle \boldsymbol{\omega}_s\} = \\ = \sigma_* \{\partial\Phi_\omega^+ / \partial r - \mathbf{n}(\mathbf{V}_\omega \times \langle \mathbf{B} \rangle)\} \quad (r = a) \\ \nabla\Phi_\omega^+|_{r\to\infty} = \frac{2}{3}(\langle \mathbf{B} \rangle \boldsymbol{\omega}_f)\mathbf{r} + o(1), \quad \mathbf{V}_\omega = \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r} + \frac{a^3}{r^3}(\boldsymbol{\omega}_s - \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \end{gathered} \tag{2.22}$$

Здесь $\mathbf{V}_\omega$ — безынерционное приближение для поля скоростей в вязкой жидкости при вращении сферы и жидкого потока. Условие при $r \to \infty$ сформулировано с учетом требования $\operatorname{div} \mathbf{j}_\omega = 0$. Решение задачи (2.22) имеет вид

$$\begin{gathered} \Phi_\omega^- = \frac{1}{3}\langle \mathbf{B} \rangle \{\boldsymbol{\omega}_s (r^2 - a^2) + 2(\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_s) a^2\} + \lambda_s Z_s - \lambda_f Z_f \\ \Phi_\omega^+ = \frac{1}{3}\langle \mathbf{B} \rangle \left\{\boldsymbol{\omega}_f (r^2 - a^2) + 2(\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_s)\frac{a^3}{r}\right\} + \\ + \left\{\frac{a^3}{2r^3} + \left(\lambda_s - \frac{1}{2}\right)\frac{a^5}{r^5}\right\} Z_s - \\ - \left\{\frac{a^3}{2r^3} + \left(\lambda_f - \frac{1}{2}\right)\frac{a^5}{r^5}\right\} Z_f, \quad Z_\alpha = \frac{1}{3} r^2 \boldsymbol{\omega}_\alpha \langle \mathbf{B} \rangle - (\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_\alpha)(\mathbf{r}\langle \mathbf{B} \rangle) \\ \lambda_s = (2 + 3\sigma_*)^{-1}, \quad \lambda_f = (2 + 3\sigma_*^{-1})^{-1} \end{gathered} \tag{2.23}$$

Несущественная аддитивная постоянная в выражении для Φ_ω опущена. Используя соотношения (2.15), (2.23), можно убедиться, что $[\mathbf{E}_\omega] = -[\nabla\Phi_\omega] = 0$, $[\mathbf{j}_\omega] = 0$. (Этот вывод не претерпевает изменений при квазитвердом вращении идеальной жидкости, когда $\mathbf{V}_\omega \equiv \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}$. Индуцированное электрическое поле при вращении сферы в безвихревом идеальном потоке было изучено в [10].) При выполнении неравенств

$$\mathrm{Re} = W_\infty a / \nu_f \ll 1, \quad \mathrm{Re}_\omega = |\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_s| a^2 / \nu_f \ll 1$$

возмущение поля скоростей в жидкости будет линейной суперпозицией полей, отвечающих трансляционному и вращательному движениям частицы. Поэтому $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{j}_\omega$ аддитивным образом войдут в локальные распределения, оставляя средние значения $[\mathbf{E}]$, $[\mathbf{j}]$ и вид макроскопического закона Ома неизменными.

3. Макроскопические плотности мощности и диссипации. Решение, приведенное в п.2, можно использовать для определения средних по ячейке плотностей электрической мощности — $[\mathbf{jE}]$ и диссипации $[\mathbf{j}^2 / \sigma]$ и последующего расчета макроплотностей этих величин. В соответствии с (1.11) будет

$$[\mathbf{jE}] = [\mathbf{j}][\mathbf{E}] + [\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E}] \tag{3.1}$$

Корреляционный член можно представить в потоковой форме

$$(3.2)\qquad [\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E}] = -D_R^{-1}\int\limits_{D_R}(\mathbf{j}-[\mathbf{j}])\nabla(\Phi+[\mathbf{E}]\,\mathbf{r})\,dD_R =$$

$$= -D_R^{-1}\int\limits_{S_R}(\Phi+[\mathbf{E}]\,\mathbf{r})\,\mathbf{n}(\mathbf{j}-[\mathbf{j}])\,dS_R$$

Для распределения (2.13), отвечающего поступательному движению частицы, поверхностный интеграл в (3.2) с учетом (2.13), (2.16) приводится к виду

$$(3.3)\qquad [\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E}] = -\sigma_f(D_R R)^{-1}\int\limits_{S_R}\Big\{\langle\mathbf{B}\rangle\,\Psi(r,\theta) -$$

$$-\frac{3}{4}\sin\theta\int\limits_0^{\pi}\langle\mathbf{B}\rangle\,\Psi(r,\theta')\sin^2\theta'\,d\theta'\Big\}^2\,dS_R$$

Неположительность корреляционного члена означает дополнительную к $-[\mathbf{j}][\mathbf{E}]$ генерацию электрической мощности элементарной ячейкой. Такая генерация заведомо отсутствует, если обтекание частицы потенциально или происходит вдоль магнитного поля. В случае, когда справедливо представление $\Psi = f(r)\sin\theta$, что, например, имеет место при стоксовском режиме обтекания (см. формулу (2.18)), также будет $[\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E}] = 0$.

При учете вращательных эффектов в случае малых чисел Рейнольдса к корреляционному члену (3.3) добавляется слагаемое $[\mathbf{j}_\omega\mathbf{E}_\omega]$. Перекрестные члены вида $[\mathbf{j}_t\mathbf{E}_\omega]$, $[\mathbf{j}_\omega\mathbf{E}_t]$, где $\mathbf{j}_t$, $\mathbf{E}_t$ — распределения, отвечающие трансляционному движению и определяемые из (2.13), оказываются равными нулю. Для величины $[\mathbf{j}_\omega\mathbf{E}_\omega]$, рассчитанной по решению (2.23), получим

$$(3.4)\qquad [\mathbf{j}_\omega\mathbf{E}_\omega] = {}^1/_{30}\sigma_f R^2(\omega_f-\omega_s)\{3\langle B\rangle^2\omega_f + (\langle\mathbf{B}\rangle\,\omega_f)\langle\mathbf{B}\rangle\}\,c\,(1+O(c^{2/3}))$$

Здесь $R = ac^{-1/3}$ — радиус ячейки. Если $|\omega_f-\omega_s| \lesssim \omega_f$, то отношение правой части (3.4) к величине $[\mathbf{j}]\,[\mathbf{E}]$ имеет порядок $cR^2\omega_f^2/(10\,V_\infty^2)$. При выполнении неравенства $R^2/L^2 \ll 10$ (L — характерная длина изменения средней скорости) этим отношением можно пренебречь в рамках теории, линейной по концентрации частиц.

Таким образом, при малых числах Рейнольдса можно принять

$$(3.5)\qquad [\mathbf{jE}] = [\mathbf{j}]\,[\mathbf{E}]$$

Суммируя соотношения (3.5) по ячейкам, считая величины $\mathbf{V}_\infty$, $\mathbf{E}_\infty$ неизменными в D_l и используя (1.12), (2.17), получим

$$(3.6)\qquad \langle\mathbf{jE}\rangle = \langle\mathbf{j}\rangle\langle\mathbf{E}\rangle - \left\{\frac{(1+\sigma_*/2)\,c}{1+2\sigma_*}-\beta\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{3c/2}{1+2\sigma_*}-\beta\right\}\sigma_f n^{-1}\sum_k\{(\langle\mathbf{V}\rangle_s-\mathbf{V}_k)\times\langle\mathbf{B}\rangle\}^2$$

Здесь $\mathbf{V}_k$ — скорость центра масс k-й частицы. Корреляционная поправка к $\langle\mathbf{j}\rangle\langle\mathbf{E}\rangle$ описывает генерацию электрической мощности в макрообъеме вследствие распределения частиц по скоростям. При малых числах Рейнольдса эта поправка пропорциональна $c^{2/3}$, однако при достаточно малой дисперсии ξ распределения ($\xi \ll \langle V\rangle_s^2 c^{1/3}$) отношение корреляционного члена к $\langle \mathbf{j} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle$ будет много меньше c. Тогда в линейном по c приближении получим

$$\langle \mathbf{jE} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \langle \mathbf{E} \rangle \tag{3.7}$$

Для модели безвихревого обтекания частиц тем более можно принять соотношение (3.7), так как при $\beta = 0$ корреляционный член будет порядка c^2.

Средняя по ячейке плотность джоулевой диссипации существенно зависит от функции Ψ. При стоксовском режиме обтекания из (2.13), (2.17) найдем

$$\left[\frac{j^2}{\sigma}\right] = \frac{[\mathbf{j}]^2}{\sigma_e} + \frac{9}{40}\sigma_f \{7(\mathbf{W}_\infty \times \langle \mathbf{B} \rangle)^2 + (\mathbf{W}_\infty \langle \mathbf{B} \rangle)^2\} c^{4/3} + O(c) \tag{3.8}$$

Учет вращательного движения в соответствии с (2.23) приводит к диссипативному члену вида

$$[j_\omega^2/\sigma] = {}^1/_5\sigma_f R^2 \{\langle B \rangle^2 \omega_f^2 - {}^1/_3 (\langle \mathbf{B} \rangle \boldsymbol{\omega}_f)^2\} (1 + O(c))$$

Отношение этого члена к первому слагаемому в (3.8) будет мало по сравнению с c при условии $R^2/L^2 \ll c$. В этом случае вкладом вращательных эффектов в диссипацию можно пренебречь.

При потенциальном обтекании частицы будет

$$\left[\frac{j^2}{\sigma}\right] = \frac{[\mathbf{j}]^2}{\sigma_e} + \frac{c(1-c)}{\sigma_f(1+2\sigma_* + 2(1-\sigma_*)c)} \{3(3+\sigma_* + (1-\sigma_*)c)[\mathbf{j}_*]^2 - \tag{3.9}$$
$$- 2(1-\sigma_*)[\mathbf{j}_*][\mathbf{j}]\}, \quad [\mathbf{j}_*] = {}^1/_2\sigma_f \mathbf{W}_\infty \times \langle \mathbf{B} \rangle$$

Просуммируем соотношения (3.9) по ячейкам с учетом формул (1.12), (2.17), пренебрегая диссипативным членом порядка c^2, аналогичным приведенному в (3.6) и связанным с распределением частиц по скоростям. Тогда в линейном по c приближении найдем макроплотность $\langle j^2/\sigma \rangle$ для случая безвихревого обтекания

$$\left\langle \frac{j^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{\langle \mathbf{j} \rangle^2}{\sigma_e} + \frac{c}{\sigma_f(1+2\sigma_*)} \{3(3+\sigma_*)\langle \mathbf{j}_* \rangle^2 - 2(1-\sigma_*)\langle \mathbf{j}_* \rangle \langle \mathbf{j} \rangle\} \tag{3.10}$$

Из формулы (3.10) следует, что осредненная диссипация не исчезает при нулевой средней плотности тока. Это объясняется тепловым действием микротоков, неизбежно возникающих при наклонном к магнитному полю обтекании частиц.

4. Континуальные уравнения при больших и малых магнитных числах Рейнольдса. Исключение из (2.20) и первых двух уравнений (1.7) величин $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{j} \rangle$ позволяет получить уравнение индукции, описывающее распределение магнитного поля в двухфазной среде

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{U}_e \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}(\nabla \ln \sigma_e \times \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle + \Delta \langle \mathbf{B} \rangle) \tag{4.1}$$

В случае больших магнитных чисел Рейнольдса: $\mathrm{Re}_m^{(L)} = \mu_0 \sigma_e U_e L \gg 1$ первое слагаемое в правой части (4.1) является главным. Если отбросить диффузионные члены, можно получить аналог условия вмороженности магнитного поля [6,7] для двухфазной среды. Однако в отличие от случая гомогенной среды магнитное поле не переносится вместе с материальным объемом, а будет связано с фиктивным континуумом, движущимся со скоростью $\langle \mathbf{V} \rangle + {}^3/_4 c \mathbf{W}_*$.

Другая особенность, присущая суспензии с постоянными проводимостями фаз,— влияние градиента концентрации макрочастиц на распространение магнитных возмущений. Преобразуем градиент в (4.1), ограничиваясь линейным по c приближением для σ_e во второй формуле (2.20)

$$\nabla \ln \sigma_e \approx 3\varkappa \nabla c \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и предполагая коэффициенты получившегося уравнения постоянными, для плоских волн вида

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{b} \exp \{ i (\mathbf{KX} - \omega t) \}, \quad \operatorname{Im} \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{Kb} = 0, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i$$

придем к дисперсионным соотношениям

$$\omega_r = (\mathbf{U}_e + 3\mu_0^{-1}\sigma_e^{-1}\varkappa\nabla c)\,\mathbf{K}, \quad \omega_i = -\mu_0^{-1}\sigma_e^{-1}K^2 \tag{4.3}$$

Отсюда видно, что при наличии градиента концентрации появляется дополнительная скорость переноса возмущений в направлении $\varkappa\nabla c$, отвечающем росту эффективной проводимости.

В связи с различными приложениями в магнитной гидродинамике детально изучаются распределения электрического тока в каналах при малых магнитных числах Рейнольдса (см., например, [13]). Аналогичные стационарные задачи при $\mathrm{Re}_m^{(L)} \ll 1$ могут быть рассмотрены для двухфазных проводящих сред. В этом случае $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i$, где $\mathbf{B}_0$ — внешнее, $\mathbf{B}_i$ — индуцированное магнитное поле, которым можно пренебречь в законе Ома (2.20). Тогда распределения $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{j} \rangle$ определяются из решения системы

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{j} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e (\langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}_0) \tag{4.4}$$

Обращение к макроконтинуальным уравнениям предполагает их использование для расчета интегральных электрических характеристик двухфазных потоков. Такое использование правомерно, если оно приводит к адекватным результатам при интегрировании истинных и осредненных распределений по макроскопическим многообразиям. Исходя из определения (1.4), можно показать, что интегралы по конечному объему $D \sim L^3$ от микро- и макрораспределений совпадают с точностью до члена порядка l / L. Ввиду того, что осреднение в (1.4), строго говоря, предполагает предельный переход $l / L \to 0$ при фиксированном отношении a / l [12], интегральную электрическую мощность N и диссипацию Q можно рассчитывать по формулам

$$N = -\int\limits_D \langle \mathbf{jE} \rangle \, dD, \quad Q = \int\limits_D \left\langle \frac{j^2}{\sigma} \right\rangle dD$$

На основании соотношения (3.7) заключаем, что величина N может быть рассчитана по решениям системы (4.4). Однако знания этих решений недостаточно для нахождения Q, так как макроплотность диссипации не определяется заданием векторов $\langle \mathbf{j} \rangle$ и $\mathbf{U}_e \times \mathbf{B}_0$.

Полный ток через макроповерхность и разность потенциалов между двумя точками на расстоянии порядка L в стационарном случае можно вычислять с помощью интегралов от осредненных функций. Этот вывод следует из интегральных законов сохранения для микроскопических величин

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{j}\nu \, d\Sigma = 0, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E}\tau \, d\Gamma = 0 \tag{4.5}$$

Здесь ν и τ — единичные векторы нормали к поверхности Σ и касательной к кривой Γ соответственно. Используя (1.4), (4.5), можно получить формулы

$$\begin{gathered}\int_F \langle \mathbf{j} \rangle \nu \, dF = \left\{1 + O\left(\frac{l}{L}\right)\right\} \int_F \mathbf{j}\nu \, dF \\ \int_C \langle \mathbf{E} \rangle \tau \, dC = \left\{1 + O\left(\frac{l}{L}\right)\right\} \int_C \mathbf{E}\tau \, dC\end{gathered} \tag{4.6}$$

В (4.6) F — незамкнутая поверхность $\sim L^2$, соответственно C — кривая с расстоянием между концами $\sim L$.

Если макродифференциал длины δC имеет порядок l_*, то переход к макроконтинуальному описанию требует, чтобы $l \ll l_* \ll L$. Считая осредненные функции неизменными на масштабах порядка l_* и применяя (4.6) к макроскопически малой площадке δF и дуге δC, получим

$$\langle \mathbf{j} \rangle \nu_* \delta F = \left\{1 + O\left(\frac{l}{l_*}\right)\right\} \int_{\delta F} \mathbf{j}\nu \, dF, \quad \langle \mathbf{E} \rangle \tau_* \delta C = \left\{1 + O\left(\frac{l}{l_*}\right)\right\} \int_{\delta C} \mathbf{E}\tau \, dC$$

Здесь ν_* и τ_* — макроскопические векторы нормали и касательной, введенные в [12]. Пренебрегая членами порядка $l \,/\, l_*$, из последних соотношений можно сделать вывод об отсутствии нормальной составляющей вектора $\langle \mathbf{j} \rangle$ на непроводящей стенке и тангенциальной составляющей $\langle \mathbf{E} \rangle$ на идеальном электроде. Это позволяет принять обычную формулировку краевых задач для системы (4.4). Применение закона Ома в форме (4.4) вблизи стенки допустимо, если в пристеночной области не нарушается условие малости объемной концентрации частиц.

Поступила 20 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of force-free particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 3.
3. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism, vol. 1—2. Oxford, Clarendon Press, 1873. Dover publ. Inc., 1954.
4. *Kerner E. H.* The electrical conductivity of composite media. Proc. Phys. Soc., sect. B, 1956, vol. 69, No. 8.
5. *Дыхне А. М.* Проводимость двумерной двухфазной системы. ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 1.
6. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
7. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
8. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
9. *Imai I.* On flows of conducting fluids past bodies. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, No. 4, p. 992—999.
10. *Reitz J. R., Foldy L. L.* The force on a sphere moving through a conducting fluid in the presence of a magnetic field. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt 1, p. 133—142.
11. *Gourdine M. C.* Magnetohydrodynamic flow construction with fundamental solutions. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, pt 3, p. 439—448.
12. *Brenner H.* Rheology of two-phase systems. Annual rev. Fluid Mech., vol. 2. Palo Alto, Annual Rev. Inc., 1970.
13. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.