Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 538.4

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ

А. Г. Цыпкин

(Москва)

В рамках специальной теории относительности с помощью вариационного уравнения получена система уравнений механики и электродинамики, описывающая поведение поляризующейся и намагничивающейся сплошной среды. Для ряда конкретных моделей сплошных сред из общих динамических уравнений получены и обсуждаются релятивистские уравнения импульсов для сплошной среды.

Пусть x^1, x^2, x^3, $x^4 = ct$ — координаты в инерциальной, произвольно выбранной системе отсчета наблюдателя с сигнатурой метрики $(- - - +)$, c — скорость света в вакууме; ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4 = c\tau$ — координаты точек среды в подвижной сопутствующей системе координат, вмороженной в среду; $x^i = x^i(\xi^k)$ — закон движения среды. Обозначим через g_{ij}, $\hat{g}_{ij}$ компоненты метрического тензора в системе наблюдателя, и в сопутствующей системе координат соответственно $g_{ij}dx^idx^j = \hat{g}_{ij}d\xi^id\xi^j = ds^2$; через $\rho = \rho_0(\xi^\mu)\,[\det\|\hat{g}_{ij} - \widehat{u_iu_i}\|]^{-1/2}$ — массовую плотность среды, $u^i = \partial x^i / \partial\xi^4$ — контравариантные компоненты четырехмерного вектора скорости, а через x_j^i — производную $\partial x^i / \partial\xi^j$. (Здесь и далее полагается, что малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, а греческие — 1, 2, 3.) Для описания эффектов взаимодействия электромагнитного поля с поляризующейся и намагничивающейся средой введем антисимметричные тензоры электромагнитного поля с компонентами F_{ij} и H^{ij}

$$F_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D^1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3 \\ D^1 & D^2 & D^3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Для получения определяющих уравнений электродинамики и механики сплошных сред воспользуемся вариационным уравнением в форме [1]

$$\delta\int_{V_4}\Lambda\,d\tau_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \qquad (1)$$

Здесь $d\tau_4$ — четырехмерный элемент произвольного объема пространства событий V_4, ограниченного трехмерной поверхностью Σ_3. Внутри объема V_4 могут содержаться поверхности сильного разрыва S характеристик электромагнитного поля и среды, Λ — функция Лагранжа, δW^* — задаваемый функционал, вводимый для учета как внешних воздействий на систему среда — электромагнитное поле, так и необратимых процессов, происходящих в среде. Функционал δW определяется заданием Λ и δW^*. В вариационном уравнении (1) варьированию подвергаются искомые функции от ξ^k, через которые выражаются Λ и δW^*. Искомые функции от ξ^k могут быть разрывными, а их вариации по определению считаются непрерывными.

Зададим лагранжиан Λ, в частности, в виде

$$\Lambda = \frac{1}{8\pi} F_{ik} H^{ik} + \frac{1}{4\pi} A_k \nabla_i H^{ik} - \frac{1}{4\pi} \nabla_i (A_k H^{ik}) + + \Lambda_0 (x_j^i, F_{ik}, s, g_{ij}, K^{\text{в}}) \tag{2}$$

Здесь Λ_0 — часть лагранжиана, которая может зависеть от указанных аргументов различным образом в зависимости от свойств среды, $K^{\text{в}}$ — заданные неварьируемые компоненты тензоров, характеризующие геометрические и физические свойства среды, s — удельная плотность энтропии, A_k — компоненты некоторого вектора, смысл которого будет выяснен ниже. Функционал δW^* в рамках рассматриваемых явлений можно определить формулой вида (выбор знака перед членом $Q_i \delta x^i$ обусловлен выбором сигнатуры метрики псевдоевклидова пространства $(- - - +)$, в то время как сигнатура метрики трехмерного евклидова подпространства $(+ + +)$)

$$\delta W^* = \int_{V_4} [\delta Q^{(e)} - Q_i \delta x^i]\, d\tau_4 + \int_S [F_i \delta x^i + \gamma^i \delta_L A_i]\, d\sigma_3 \tag{3}$$

Здесь $\delta Q^{(e)}$ представляет собой виртуальное обобщение процесса притока тепла, $Q_i \delta x^i$ для действительных процессов определяет элементарную работу внешних сил и внешний приток нетепловой энергии к системе среда — электромагнитное поле, F_i — компоненты вектора четырехмерной концентрированной поверхностной силы; γ^i — компоненты четырехмерного вектора поверхностного электрического тока, $\delta_L A_i = \delta A_i + A_k \nabla_i \delta x^k$ — абсолютная вариация компонент вектора A_i, которая для действительных приращений дает приращения компонент вектора относительно собственной системы координат (т. е. в инерциальной системе координат, связанной с частицей среды и движущейся поступательно относительно системы отсчета наблюдателя с мгновенной скоростью частицы среды).

В случае равновесных процессов, для которых определена абсолютная температура T, воспользуемся виртуальной аналогией второго закона термодинамики

$$\rho T \delta s = \delta Q^{(e)} + \delta Q' \tag{4}$$

где $\delta Q'$ — обобщенная вариация — аналог некомпенсированного тепла. Будем полагать, что возможное приращение некомпенсированного тепла для действительных процессов определяется лишь тремя механизмами: наличием свойств вязкости у среды, процессом теплопроводимости и выделением джоулева тепла. Как следствие этих допущений для соответствующего обобщенного выражения $\delta Q'$ можно написать

$$\delta Q' = \tau_i^{\,j} \nabla_j \delta x^i - j^k \delta_L A_k \tag{5}$$

Здесь j^k — компоненты четырехмерного вектора электрического тока, а компоненты четырехмерного тензора $\tau_i^{\,j}$ определяют вязкие и теплопроводные свойства среды.

Полагая вариации $\delta A_k = \partial A_k + \delta x^i \nabla_i A_k$, $\delta H^{ik} = \partial H^{ik} + \delta x^j \nabla_j H^{ik}$, δs, $\delta F_{ik} = \partial F_{ik} + \delta x^j \nabla_j F_{ik}$ и δx^i непрерывными и линейно-независимыми и используя соотношения (2) — (5), из вариационного уравнения (1) для непрерывных процессов получим систему уравнений электродинамики и механики, а также выражение для функционала δW (здесь вариации функций определены согласно работам [2,3])

Уравнения Максвелла

(6) $$\nabla_k H^{ik} = 4\pi j^i \quad \text{при } \partial A_i$$

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i \quad \text{при } \partial H^{ik}$$

Уравнения состояния

(7) $$\rho T + \partial \Lambda_0 / \partial s = 0 \quad \text{при } \delta s$$

$$\frac{1}{8\pi} H^{ik} + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial F_{ik}} = 0 \quad \text{при } \partial F_{ik}$$

Уравнения импульсов

(8) $$\nabla_k P_i^{\,k} = Q_i \quad \text{при } \delta x^i$$

(9) $$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3 + S_\pm} \left[P_i^{\,k} \delta x^i + \frac{1}{4\pi} H^{ki} \delta_L A_i \right] n_k d\sigma_3$$

Здесь n_k — компоненты четырехмерного вектора внешней нормали к поверхности $\Sigma_3 + S_\pm$ (индекс $\pm$ означает, что интегрирование проводится по обеим сторонам поверхности разрыва S), а компоненты тензора энергии — импульса $P_i^{\,k}$ в формулах (8) и (9) определяются соотношениями, представляющими собой наряду с уравнениями (7) уравнения состояния

(10) $$P_i^{\,k} = -\Lambda_0 \delta_i^{\,k} - \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x_s^{\,i}} x_s^{\,k} - \frac{1}{4\pi} H^{kj} F_{ij} + \tau_i^{\,k}$$

Из уравнений (6) следует, что вектор **A** с компонентами A_k представляет собой векторный потенциал электромагнитного поля.

Из системы уравнений (6) — (8), соотношения (10) с учетом уравнения неразрывности для среды $\nabla_i (\rho u^i) = 0$ и определения производной по собственному времени $u^i \nabla_i = c^{-1} (d / d\tau)$ следует скалярное уравнение баланса энтропии

(11) $$\rho T \frac{ds}{d\tau} = c j^k F_{ki} u^i - c u^i \nabla_j \tau_i^{\,j} + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial K^B} \frac{dK^B}{d\tau} + c \nabla_j \left(x_4^{\,i} x_s^{\,j} \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x_s^{\,i}} \right)$$

Если положить $i^k = j^k - \rho_e u^k$, где ρ_e — плотность электрического заряда, то i^k представляют собой компоненты вектора электрического тока проводимости.

Четырехмерный инвариант $c i^k F_{ki} u^i = c j^k F_{ki} u^i$ представляет собой джоулево тепло.

Заметим, что в рамках рассматриваемой модели уравнения моментов для системы среда — электромагнитное поле являются следствием уравнений импульсов и уравнений Максвелла. Можно видеть, что для действительных процессов $\Lambda = \Lambda_0$.

Из вариационного уравнения в предположении непрерывности на S вариаций δx^i, $\delta_L A_i$ также следуют соотношения на поверхностях разрывов

(12) $$[P_i^k n_k]_{S_\pm} + F_i = 0, \quad [H^{ki} n_k]_{S_\pm} + 4\pi\gamma^i = 0$$

Такова общая теория при любых Λ_0, задание которого связано с термодинамическими постулатами о виде энергии среды и поля.

В частности, Λ_0 можно задать в виде

(13) $$\Lambda_0 = -\frac{1}{16\pi} C_{ijkl} F^{ij} F^{kl} - U(x_j^i, s, g_{ij}, K^B)$$

причем для компонент тензора C_{ijkl} справедливы равенства

$$C_{ijkl} = C_{klij} = -C_{jikl} = -C_{ijlk}$$

а U — скалярная функция термомеханических параметров среды, смысл которой в некоторых частных случаях будет выяснен ниже. При выборе функция Λ_0 в виде (13) в предположении, что $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_q^p, s, K^B)$, уравнения состояния для электромагнитного поля и уравнения импульсов для системы среда — электромагнитное поле запишутся в виде

(14) $$H_{ij} = C_{ijkl} F^{kl}$$

(15) $$\nabla_j \left[\frac{\partial U}{\partial x_s^i} x_s^j + U\delta_i^j + \tau_i^j + \frac{1}{16\pi} F^{mn} F^{pq} x_s^j \frac{\partial}{\partial x_s^i} C_{mnpq}\right] = Q_i + R_i$$

$$R_i = -\nabla_j S_i^j, \qquad S_i^j = -\frac{1}{4\pi}\left[H^{jk} F_{ik} - \frac{1}{4} F_{mn} H^{mn} \delta_i^j\right]$$

Случай нелинейной зависимости между компонентами тензоров H_{ik} и F_{jl} также может быть описан в рамках предлагаемой модели, если положить, что среди аргументов тензорной функции C_{ijkl} присутствуют компоненты тензора F_{mn}.

Для среды с изотропными электромагнитными свойствами компоненты тензора C_{ijkl} имеют вид [2]

(16) $$C_{ijkl} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) + \varepsilon(g_{ik}u_j u_l - g_{jk}u_i u_l + g_{jl}u_i u_k - g_{il}u_j u_k)\right], \quad \gamma_{ij} = g_{ij} - u_i u_j$$

где ε и μ — коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости среды, которые в предлагаемой модели могут, вообще говоря, зависеть от энтропии s и инвариантов тензоров x_j^i, K^B.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда компоненты тензора C_{ijkl} задаются формулами (16), а $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$ и $\mu = \mu(\rho, s)$. Тогда уравнения (15), верные в любой инерциальной системе отсчета, можно преобразовать к виду

$$\nabla_j\left[\frac{\partial U}{\partial x_s^{\,i}}x_s^{\,j}+U\delta_i^{\,j}+\tau_i^{\,j}\right]=-\frac{1}{8\pi}\nabla_j\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{\rho}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}F_{mn}F^{mn}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)F^{mn}F^{pq}g_{mp}u_nu_q\right]\gamma_i^{\,j}\right\}+$$
$$+Q_i+R_i-\frac{\rho}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu\rho}F^{mn}F^{lq}g_{nq}u_m\gamma_{li}\right]\tag{17}$$

Приведенная система уравнений (6), (7), (14), (17), в частности, задает модель упругого, возможно анизотропного по механическим характеристикам тела. Дальнейшая конкретизация модели связана с заданием вида скаляров U, ε, μ, а также компонент тензоров $\tau_i^{\,j}$, $i_=^k$ как функций определяющих параметров модели.

В качестве частного случая рассмотрим релятивистскую модель изотропной идеальной сжимаемой жидкости, полагая, что отсутствует внешний приток энергии к системе среда — электромагнитное поле. Если, кроме того, положить, что скалярная функция U зависит от аргументов ρ, u^i, s, g_{ij} и имеет смысл энергии среды, рассчитанной на единицу объема, то по определению можно написать

$$U=\rho c^2+\rho U_0\,(\rho,\ s)$$

где U_0 — функция массовой плотности дополнительной внутренней энергии среды.

После преобразований уравнения импульсов (17) преобразуются к виду (через p по определению обозначено полное давление в жидкости)

$$\rho\frac{d}{d\tau}\left[cu_i+\frac{1}{c}U_0u_i\right]=-\nabla_j(p\gamma_i^{\,j})+Q_i+R_i+N_i\tag{18}$$
$$p=\frac{1}{16\pi}\frac{\rho}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}F^{mn}F_{mn}-\frac{\rho}{8\pi}\left[\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right]F^{mn}F^{pq}g_{mp}u_nu_q+\rho^2\frac{\partial U_0}{\partial\rho}$$
$$N_i=-\frac{\rho}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu\rho}F^{kj}F^{sl}g_{jl}u_k\gamma_{si}\right]$$

Полученные уравнения импульсов (18) в случае отсутствия электромагнитного поля совпадают с известными уравнениями в специальной теории относительности.

Рассмотрим более подробно правую часть четырехмерных уравнений импульсов (18).

В собственной системе координат полное давление в жидкости можно записать в виде

$$p=-\frac{\rho}{8\pi}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2\right)+\rho^2\frac{\partial U_0}{\partial\rho}$$

что часто истолковывается как сумма гидродинамического давления, электрострикционного давления и магнитострикционного давления.

Используя представление электромагнитного поля в среде через трехмерные векторные характеристики в собственной системе координат, первые три компоненты четырехмерного вектора N_i, стоящие в правой части формулы (18), для случая покоящейся жидкости можно записать в виде

$$N_\alpha=\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}E^\beta H^\gamma\right]$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — компоненты полностью антисимметричного трехмерного тензора Леви-Чивита.

Учитывая, что для покоящейся жидкости $d / d\tau = \partial / \partial\tau$, а также используя уже отмеченное выше различие в сигнатурах метрики четырехмерного псевдоевклидова пространства и трехмерного евклидова подпространства, можно показать, что сумма $R_\alpha + N_\alpha$ в нерелятивистском приближении совпадает с соответствующим выражением [4] для компонент вектора объемной пондеромоторной силы, действующей со стороны электромагнитного поля на среду.

Следует указать, что четвертая компонента вектора N_i, стоящего в правой части уравнения (18), для случая релятивистской жидкости, вообще говоря, отлична от нуля.

Заметим, что компоненты четырехмерного вектора N_i, существенно зависящие от частных свойств жидкости через параметры ε и μ, можно объединить с левой частью соотношения (18), которую после такого объединения можно толковать как изменение в единицу собственного времени, усложненного за счет поляризации и намагничивания четырехмерного вектора импульса среды. В этом случае вектор с компонентами R_i имеет смысл четырехмерного вектора объемной пондеромоторной силы, вычисленной в согласии с видом тензора энергии — импульса электромагнитного поля по Минковскому. Очевидно, что вид уравнения (18) не зависит от указанного различия в толкованиях импульса среды.

Из уравнения (18) предельным переходом получаются нерелятивистские уравнения движения и уравнение энергии для поляризующейся и намагничивающейся жидкости.

Отметим, что полученные выше простые формулы и выводы связаны с существенными предположениями о виде лагранжиана Λ_0, а также предположением о механической и электромагнитной изотропии среды.

Для анизотропных сред обобщение формулы (16) нетрудно получить общими приемами [5], после чего, используя четырехмерные уравнения импульсов в форме (15) для сред с анизотропными электродинамическими свойствами, можно получить точные релятивистские уравнения импульсов, описывающие движения анизотропных сред в рамках специальной теории относительности.

Приведенная система уравнений равносильна уравнениям, полученным в работах [3,6]; однако предлагаемый подход имеет ряд преимуществ: если среда не поляризуется и не намагничивается, происходит естественное расщепление полученной системы уравнений на подсистемы уравнений механики и электродинамики (для этого достаточно в полученных соотношениях положить $\varepsilon = \mu = 1$, в то время как в ранее получаемых уравнениях [3] при подобном переходе возникают некоторые усложнения); полагая $\varepsilon = 1$, $\mu \neq 1$, получим модель только намагничивающейся среды; при $\varepsilon \neq 1$, $\mu = 1$ полученная система уравнений описывает только поляризующиеся среды.

Отметим, что если зависимость между компонентами тензоров электромагнитного поля F_{ij} и H_{ij} линейная и задается соотношениями типа (14), то в силу определения тензора поляризации — намагниченности $M_{ij} = (^1/_4\pi)(F_{ij} - H_{ij})$ зависимость между компонентами тензоров F_{ij} и M_{ij} также будет линейная.

Используемый подход легко распространить на случай, когда Λ_0 зависит от градиентов тензора F_{ij}. В этом случае в системе (6) — (9) меняется только второе уравнение (7), которое примет вид

$$\frac{1}{8\pi} H^{ik} + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial F_{ik}} - \nabla_s \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \nabla_s F_{ik}} \right) = 0$$

а также несколько усложняются выражения для компонент тензора P_i^k и функционала δW и при этом получаются дополнительные к системе (12) соотношения на поверхности разрыва S [2].

В заключение автор приносит глубокую благодарность Л. И. Седову за детальное обсуждение работы.

Поступила 15 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
3. *Цыпкин А. Г.* Изучение поляризующихся и намагничивающихся сплошных сред с помощью вариационного уравнения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
5. *Бердичевский В. Л.* О нелинейных тензорных функциях в теории относительности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ. 1965, т. 29, вып. 1.