Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ УКЛОНЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

С. А. Читирь

(Москва)

Рассматривается игровая конфликтная ситуация, складывающаяся из задач уклонения от замкнутого целевого множества и сближения с этим множеством. Предполагается, что игрок, решающий задачу уклонения, располагает неполной информацией о фазовых координатах системы. Показывается, что в указанной игровой ситуации всегда разрешима либо задача об уклонении, либо задача о сближении. В основе рассуждений лежит экстремальная конструкция из работ [1,2], модифицированная подобно [3–5] с учетом специфики задач управления при неполной информации [1].

1. Пусть движение управляемой системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dx / dt = A(t) x + f_*(t, u, v), \quad u \in P(t), \quad v \in Q(t) \tag{1.1}$$

Здесь x — вектор n-мерного евклидова пространства R^n, а u и v — векторы управляющих воздействий; $P(t)$, $Q(t)$ — компактные множества в конечномерных нормированных пространствах, ограниченные на всяком конечном отрезке и измеримым образом зависящие от t. Матрицу $A(t)$ будем предполагать суммируемой по Лебегу на всяком конечном отрезке, а функцию $f(t, u, v)$ непрерывной по совокупности переменных.

В пространстве $R^1 \times R^n$ переменных t, x выделено замкнутое множество M_*. Трактуя вектор v как управляющий, а u как некоторую плохо предсказуемую помеху, рассмотрим задачу об уклонении фазового состояния $x[t]$ системы (1.1) от множества M_* вплоть до некоторого заданного момента ϑ. При этом будем предполагать, что вектор $x \in R^n$ подвергнут неособому линейному преобразованию (см., например, [5], стр. 161), в результате которого уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$dx / dt = f(t, u, v), \quad u \in P(t), \quad v \in Q(t) \tag{1.2}$$

причем функция $f(t, u, v)$ остается непрерывной по совокупности переменных, а множество M_* преобразуется в новое множество M, также остающееся замкнутым.

Процесс управления осложнен отсутствием полной информации о реализующихся фазовых состояниях системы и происходит по следующей дискретной аппроксимационной схеме. В момент τ_i управитель узнает не-

[1] *Кряжимский А. В.* Линейная игра наведения с неполной информацией. Препринт. Свердловск, 1975, УНЦ АН СССР.

которое компактное множество $G[\tau_i] \subset R^n$, содержащее реализованное к этому моменту времени состояние $x[\tau_i]$ системы (1.2). На основании этой информации он в момент τ_i выбирает свое, измеримое по Лебегу управление $v[t]$ на будущий интервал времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$. В момент τ_{i+1} ему становится известно новое информационное множество $G[\tau_{i+1}]$ и процесс повторяется. При этом в процессе управления можно столкнуться с любой измеримой по Лебегу и удовлетворяющей включению $u[t] \in P(t)$ реализацией $u[t]$ помехи u и с любыми реализациями информационных множеств $G[\tau_i]$, содержащих текущие состояния $x[\tau_i]$ системы (1.2) и удовлетворяющих условиям

$$G[\tau_i] \subset G\{G[\tau_{i-1}],\ \tau_{i-1},\ \tau_i\}, \quad G[\tau_i] \in \Gamma(\tau_i) \tag{1.3}$$

Здесь через $G\{G[\tau_{i-1}],\ \tau_{i-1},\ t_i\}$ обозначено множество таких состояний, в которые можно перевести вектор $x[t]$ к моменту τ_i согласно закону (1.2), начиная движение в момент τ_{i-1} из точек множества $G[\tau_{i-1}]$ под действием реализованных на интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ управляющих и возмущающих воздействий $v[t]$ и $u[t]$, а через $\Gamma(t)$ — некоторое, зависящее от t семейство компактных множеств из R^n, свойства которого уточним ниже.

Условие (1.3) предполагает, что в момент τ_i управитель получает информацию о реализовавшихся управлении $v[t]$ и возмущении $u[t]$, $(t \in [\tau_{i-1}\tau_i))$, причем эту информацию он может использовать лишь для уточнения информационного множества в момент τ_i, но у него нет возможности использовать ее при формировании своего управляющего воздействия $v[t]$. Второе из условий (1.3), стесняя класс информационных множеств, характеризует качество используемого способа наблюдения.

Приняв указанную схему управления, исходную задачу с неполной информацией естественно подменить задачей об управлении информационным множеством, причем условие уклонения неизвестного точно фазового состояния $x[t]$ естественно заменить условием

$$\{t,\ G[t]\} \cap M = \varnothing, \qquad t \in [t_0, \vartheta] \tag{1.4}$$

Чтобы оценить результат, обеспечиваемый тем или иным законом управления, рассматриваемую задачу удобно включить в схему некоторой антагонистической игры, складывающейся между игроком — управителем, вырабатывающим воздействие $v[t]$, и фиктивным игроком, распоряжающимся реализациями возмущений $u[t]$ и информационных множеств $G[t]$ в пределах ограничений (1.3). При этом оказывается удобным и для фиктивного игрока—противника (при взгляде на задачу с его «точки зрения») сохранить «позиционный» характер формирования возмущений $u[t]$ и информационных множеств $G[t]$. Именно, будем полагать, что формирование указанных объектов производится этим игроком в дискретные моменты времени τ_i и происходит по следующей иерархической схеме: по множеству $G\{G[\tau_{i-1}],\ \tau_{i-1},\ \tau_i\}$ назначается множество $G[\tau_i]$, удовлетворяющее условиям (1.3); по множеству $G[\tau_i]$ формируется возмущающая сила $v[t]$, которая будет воздействовать на систему в течение промежутка $[\tau_i, \tau_{i+1})$, и процесс повторяется.

При этом, чтобы сохранить сложившуюся терминологию, будем игрока — управителя, распоряжающегося управляющим воздействием $v[t]$ и желающим осуществить уклонение (1.4), именовать вторым игроком, а его противника, осуществляющего формирование информационных областей и возмущений $u[t]$,— первым.

Учитывая, что рассматриваемая игра является антагонистической, условие завершения процесса, успешное для первого игрока, в терминах информационных множеств естественно представить в виде

$$(1.5) \qquad \{\tau, G[\tau]\} \cap M \neq \varnothing$$

для некоторого $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

2. Математическая формализация указанных задач конфликтного управления основана на описанной выше подмене исходных задач с неполной информацией задачами управления информационной областью, трактуемой как элемент нового обобщенного фазового пространства comp (R^n), образуемого всевозможными компактными множествами из R^n с метрикой Хаусдорфа.

Пусть всякому $t \in R^1$ поставлено в соответствие непустое замкнутое множество $\Gamma(t) \subset$ comp (R^n), причем выполнено следующее

Условие 2.1. $G + y \in \Gamma(t)$ для всех $G \in \Gamma(t)$, $y \in R^n$, $t \in R^1$. При этом символом $A + B$ будем обозначать алгебраическую сумму множеств $A, B \subset R^n$, причем если одно из них, скажем B, состоит из единственного вектора $b \in R^n$ (т. е. $B = \{b\}$), то вместо записи $A + \{b\}$ будем для простоты использовать запись $A+b$.

Множества $\Gamma(t)$, характеризующие качество используемого способа наблюдения системы (1.1), в дальнейшем изложении могут трактоваться как своеобразные ограничения на «информационные ресурсы» первого игрока, назначающего множества $G[t]$.

Пары $\{t, G\} \in R^1 \times$ comp (R^n) будем называть позициями. В соответствии с указанным выше принципом формирования управляющих воздействий $v[t]$ вторым игроком — управителем, используемые им законы регулирования — стратегии V, будем отождествлять с отображениями, сопоставляющими всякой позиции $\{t, G\}$ функцию $v[\tau]$, $(\tau \in [t, \infty))$, измеримым образом зависящую от τ и удовлетворяющую условию $v[\tau] \in Q(\tau)$. Законы формирования информационных областей $G[t]$ и возмущающих воздействий $u[t]$ первым игроком — его стратегии J и U, отождествим с отображениями, сопоставляющими всякой позиции $\{t, G\}$ множество $G' = J(t, G)$, удовлетворяющее условиям

$$G' \subset G, \quad G \in \Gamma(t)$$

и измеримую функцию $u[\tau]$, $(\tau \in [t, \infty))$, удовлетворяющую включению $u[\tau] \in P(\tau)$ соответственно.

Пусть $\Delta = \{\tau_i : \tau_0 = t_0, \tau_{i+1} > \tau_i, i = 0,1 \ldots\}$ — некоторое разбиение полуоси $[t_0, \infty)$ интервалами $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $u[t]$ — некоторая измеримая функция со значениями во множестве $P(t)$, а V — некоторая стратегия. Аппроксимационным движением из позиции $\{t_0, G_0\}$, отвечающим выбранным элементам, назовем всякую функцию $G_\Delta(t] = G_\Delta[t, t_0, G_0, V, u[\cdot]]$

со значениями в пространстве comp (R^n), определяемую следующими рекуррентными соотношениями:

$$G_\Delta[t] = G[\tau_i] + \int_{\tau_i}^{t} f(\tau, u[\tau], v_i[\tau])\, d\tau, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

$$G_\Delta[\tau_{i+1}] \subset G[\tau_i] + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau, u[\tau], v_i[\tau])\, d\tau$$

$$G_\Delta[t_0] = G_0, \quad G[\tau_{i+1}] \in \Gamma(\tau_{i+1}), \ v_i[\cdot] = V(\tau_i, G_\Delta[\tau_i]).$$

Аналогично, аппроксимационным движением из позиции $\{t_0, G_0\}$, отвечающим стратегиям U, J, разбиению $\Delta = \{\tau_i\}$ и некоторой измеримой функции $v[t]$, удовлетворяющей условию $v[t] \in Q(t)$, назовем всякую функцию $G_\Delta[t] = G_\Delta[t, t_0, G_0, U, J, v[\cdot]]$ со значениями в пространстве comp (R^n), определяемую следующими рекуррентными соотношениями:

$$G_\Delta[t] = G[\tau_i] + \int_{\tau_i}^{t} f(\tau, u_i[\tau], v[\tau])\, d\tau, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

$$G_\Delta[\tau_{i+1}] = J(\tau_{i+1}, G_\Delta[\varphi_i] + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau, u_i[\tau], v[\tau])\, d\tau$$

$$G_\Delta^*[t_0] = G_0, \ u_i[\cdot] = U(\tau_i, G_\Delta[\tau_i])$$

В дальнейшем от аппроксимационных движений будет удобно перейти к некоторым идеальным движениям подобно тому, как это делается в [1, 7] для игровых задач с полной информацией.

Пусть $G: R^1 \to$ comp (R^n) — некоторое отображение. Через $\mathrm{gr}_{[t_1,t_2]}G$ будем обозначать график отображения G, рассматриваемый на отрезке $[t_1, t_2]$ и определяемый соотношением $\mathrm{gr}_{[t_1,t_2]}\, G = [\{t, x\} \in [t_1, t_2] \times R^n : x \in G(t)]$

Движением $G[t, t_0, G_0, V]$ из позиции $\{t_0, G_0\}$, порождаемым стратегией V, назовем всякую функцию $G[t]$ со значениями в пространстве comp (R^n), для которой на всяком отрезке $[t_0, \vartheta]$ найдется последовательность аппроксимационных движений $G_{\Delta(k)}[t] = G_{\Delta(k)}[t, t_0, G_0^{(k)}, V, u^{(k)}[\cdot]]$, такая, что

$$\mathrm{cl}\,(\mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]}G^*_{\Delta(k)}) \to \mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]}G = \mathrm{cl}\,(\mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]}\,G), \quad G_0^{(k)} \to G_0 \tag{2.1}$$

$$\sup_i(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$$

при $k \to \infty$. Отметим, что символ cl (X), обозначает замыкание множества X в соответствующем пространстве, а сходимость в (2.1) понимается в смысле хаусдорфовой метрики соответствующего пространства.

Сходным образом определяются движения, порождаемые стратегиями U и J. Именно, движением $G[t, t_0, G_0, U, J]$ из позиции $\{t_0, G_0\}$, отвечающим стратегиям U и J, назовем всякую функцию $G[t]$ со значениями в пространстве comp (R^n), для которой на всяком отрезке $[t_0, \vartheta]$ найдется такая последовательность аппроксимационных движений $G_{\Delta(k)}[t] = G_{\Delta(k)}[t, t_0, G_0, U, J, v^{(k)}[\cdot]]$, что

$$\mathrm{cl}\,(\mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]} G_{\Delta(k)}) \to \mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]} G = \mathrm{cl}\,(\mathrm{gr}_{[t_0,\vartheta]} G)$$

$$\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Множества всевозможных движений, порождаемых стратегией V или U и J из позиции $\{t_0, G_0\}$, обозначим через $\Pi(t_0, G_0, V)$ и $\Pi(t_0, G_0, U, J)$ соответственно. Справедлива следующая

Лемма 2.1. Каковы бы ни были стратегии V, U, J, множества $\Pi(t_0, G_0, V)$ и $\Pi(t_0, G_0, U, J)$ содержат по крайней мере один общий элемент. При этом все элементы указанных множеств являются полунепрерывными сверху по включению ([5], стр. 38, 39) функциями со значениями в пространстве comp (R^n), удовлетворяющими следующим условиям:

(2.2) $$G[t_0] = G_0, \quad G[t] \neq \varnothing, \quad t \in [t_0, \infty)$$

Так же, как и в задачах управления с полной информацией [1, 5], данное абстрактное определение стратегий и движений допускает, по крайней мере для второго игрока — управителя, естественный переход к реализуемым на практике процедурам управления. Этот переход осуществляется обращением к аппроксимационным движениям и дискретной схеме формирования управляющих воздействий, причем все утверждения, сформулированные для движения $G[t]$, имеют аппроксимационные аналоги.

Обратимся теперь к формализованной постановке задач. Задачу второго игрока — управителя можно поставить в следующей форме

Задача 2.1. Для позиции $\{t_0, G_0\}$ найти открытую окрестность $H(M)$ множества M и построить стратегию V°, такие, что для всякого движения $G[t] = G[t, t_0, G_0, V^\circ]$ выполняется следующее условие:

(2.3) $$\{t, G[t]\} \cap H(M) = \varnothing, \; t \in [t_0, \infty)$$

Контр-задачу первого игрока в формализованных выше понятиях стратегий U и J и отвечающих им движений можно сформулировать в следующем виде

Задача 2.2. Для позиции $\{t_0, G_0\}$ построить стратегии U° и J°, которые для всякого движения $G[t] = G[t, t_0, G_0, U^\circ, J^\circ]$ обеспечивали бы выполнение условия

(2.4) $$\{\tau, G[\tau]\} \cap M \neq \varnothing$$

в тот или иной момент $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Отметим, что условие $\Pi(t_0, G_0, V) \cap \Pi(t_0, G_0, U, J) \neq \varnothing$, справедливое в силу леммы 2.1 для всевозможных позиций $\{t_0, G_0\}$ и стратегий V, U, J, позволяет объединять задачи 2.1 и 2.2 и называть их совокупность игрой.

3. Основу подхода к рассматриваемым задачам будет составлять экстремальная конструкция из работы [1], приспособленная подобно [3-5] к особенностям данных игровых задач. Опишем основные элементы упомянутой экстремальной конструкции. Ограничимся, прежде всего, случаем существования седловой точки в маленькой игре ([5], стр. 55—57),

т. е. будем полагать выполненным следующее условие:

$$\min_{u\in P(t)} \max_{v\in Q(t)} sf(t,u,v) = \max_{v\in Q(t)} \min_{u\in P(t)} sf(t,u,v) \tag{3.1}$$

при всех $t\in R^1$, $s\in R^n$.

Пусть $W\subset R^1\times \mathrm{comp}\,(R^n)$ — некоторое множество. Важным для дальнейшего является следующее понятие, именуемое стабильностью. Для произвольных измеримых функций $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющих условиям $u(t)\in P(t)$, $v(t)\in Q(t)$, $(t\in[t_*,\infty))$, положим

$$F_u(t, v(t)) = \mathrm{co}\,\{f: f = f(t, u, v(t)), u\in P(t)\} \tag{3.2}$$

$$F_v(t, u(t)) = \mathrm{co}\,\{f: f = f(t, u(t), v), v\in Q(t)\} \tag{3.3}$$

и рассмотрим дифференциальные включения

$$dx/dt\in F_v(t, u(t)), \quad x(t_*) = 0 \tag{3.4}$$

$$dx/dt\in F_u(t, v(t)), \quad x(t_*) = 0 \tag{3.5}$$

Множество W назовем v-стабильным, если при всяком выборе позиции $\{t_*, G_*\}\in W$, момента $t^* > t_*$, измеримой функции $u(t)\in P(t)$ $(t\geqslant t_*)$ и множества $G^*\subset G_*$, $G^*\in\Gamma(t^*)$ найдется абсолютно непрерывное решение $x(t)$ включения (3.4), такое, что $\{t^*, G^*+x(t^*)\}\in W$.

Если же окажется, что при всяком выборе позиции $\{t_*, G_*\}\in W$, момента $t^* > t_*$ и измеримой функции $v(t)$, удовлетворяющей условию $v(t)\in Q(t)$ $(t\geqslant t_*)$, найдется абсолютно непрерывное решение $x(t)$ включения (3.5) и множество $G^*\subset G_*$, $G^*\in\Gamma(t^*)$, такие, что либо $\{\tau, G_*+x(\tau)\}\cap M\neq\varnothing$ при некотором $\tau\in[t_*, t^*]$, либо $\{t^*, G^*+ x(t^*)\}\in W$, то множество W будем называть u — j-стабильным (относительно цели M).

Обратимся теперь к описанию другого важного элемента рассматриваемой конструкции — экстремальным стратегиям. В пространстве $R^1\times \mathrm{comp}\,(R^n)$ с метрикой

$$\rho(\{t_1, G_1\}, \{t_2, G_2\}) = \max\,\{|t_1 - t_2|, \mathrm{dist}\,(G_1, G_2)\} \tag{3.6}$$

рассмотрим некоторое замкнутое множество W. Пусть $\{t_*, G_*\}$ — произвольная позиция. Через $S(t_*, G_*)$ обозначим совокупность всевозможных векторов $s\in R^n$, удовлетворяющих условиям

$$\{t_*, G_* + s\}\in W, \quad \|s\| = \min\,[\|s'\|, \; s'\in R^n: \{t_*, G_* + s'\}\in W] \tag{3.7}$$

Построим стратегию $V^{(e)}$, которую по аналогии с [1, 5] будем называть экстремальной к множеству W. При $S(t, G)\neq\varnothing$ выберем произвольный вектор $s_*\in S(t, G)$ и определим множества $Q^{(e)}(\tau)$ $(\tau\in[t,\infty))$, складывающиеся из всевозможных векторов $v_*\in Q(\tau)$, удовлетворяющих условию

$$\min_{u\in P(\tau)} s_* f(\tau, u, v_*) = \max_{v\in Q(\tau)} \min_{u\in P(\tau)} s_* f(\tau, u, v) \tag{3.8}$$

Используя измеримость многозначных отображений $P(t)$ и $Q(t)$, можно показать, что множества $Q^{(e)}(\tau)$ также зависят от параметра τ измеримым образом. Для рассматриваемой позиции $\{t, G\}$ положим теперь $V^{(e)}(t, G) = v[\cdot]$, где $v[\tau]$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $v[\tau] \in Q^{(e)}(\tau)$, $(\tau \in [t, \infty))$.

Если же для позиции $\{t, G\}$ множество $S(t, G)$ окажется пустым, то будем полагать $V^{(e)}(t, G) = v[\cdot]$, где $v[\tau]$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $v[\tau] \in Q(\tau)$, $(\tau \in [t, \infty))$.

Аналогичным образом определяется и стратегия $U^{(e)}$, экстремальная к множеству W. Именно, в случае $S(t, G) \neq \varnothing$ следует выбрать произвольный вектор $s_* \in S(t, G)$ и построить множества $P^{(e)}(\tau)$, $(\tau \in [t, \infty))$, складывающиеся из всевозможных векторов $u_* \in P(\tau)$, удовлетворяющих условию

$$(3.9) \qquad \max_{v \in P(\tau)} -s_* f(\tau, u_*, v) = \min_{u \in P(\tau)} \max_{v \in Q(\tau)} -s_* f(\tau, u, v)$$

Далее для выбранной позиции следует положить $U^{(e)}(t, G) = u[\cdot]$, где $u[\tau]$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $u[\tau] \in P^{(e)}(\tau)$ $(\tau \in [t, \infty))$. В случае же, когда $S(t, G) = \varnothing$, следует полагать $U^{(e)}(t, G) = u[\cdot]$, где $u[\tau]$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $u[\tau] \in P(\tau)$ $(\tau \in [t, \infty))$.

Несколько иной вид в рассматриваемом случае приобретает определение стратегии $J^{(e)}$, экстремальной к множеству W. Для произвольной позиции $\{t, G\}$ через $\Xi(t, G)$ обозначим совокупность всевозможных множеств $G' \in \mathrm{comp}(R^n)$, таких, что

$$(3.10) \qquad \{t, G' + y'\} \in W, \quad G' \subset G, \quad G' \in \Gamma(t)$$

при том или ином $y' \in R^n$, причем

$$(3.11) \qquad \| y' \| \leqslant \| y \|$$

для всякого вектора $y \in R^n$, для которого найдется множество $G'' \subset G$, $G'' \in \Gamma(t)$, такое, что $\{t, G'' + y\} \in W$. Множество $\Xi(t, G)$ представляет собой, таким образом, совокупность таких компактов $G' \subset G$, $G' \in \Gamma(t)$, для которых сдвигом на вектор $y' \in R^n$ минимальной нормы может быть обеспечено вложение $\{t, G' + y'\} \in W$.

Стратегию $J^{(e)}$ определим теперь следующим образом. При $\Xi(t, G) \neq \varnothing$ положим $J^{(e)}(t, G) = G'$, где G' — произвольный элемент из множества $\Xi(t, G)$. Если же при выбранной позиции множество $\Xi(t, G)$ пусто, то будем полагать $J^{(e)}(t, G) = G'$, G' — произвольное множество удовлетворяющее условиям $G' \subset G$, $G' \in \Gamma(t)$.

Символом $G^{[\varepsilon]}$ обозначим замкнутую ε-окрестность множества $G \subset R^n$.

В следующих предложениях выясняется роль экстремальных стратегий.

Лемма 3.1. Если для позиции $\{t_0, G_0\}$ существует число $\alpha_0 > 0$, такое, что $\{t_0, G_0^{[\alpha_0]}\} \in W$ и замкнутое множество $W \subset R^1 \times \mathrm{comp}(R^n)$ является v-стабильным и таким, что справедливость включения $\{t, G\} \in W$ влечет справедливость включения $\{t, G'\} \in W$ для всех $G' \in \mathrm{comp}(R^n)$, $G' \subset G$, то стратегия $V^{(e)}$, экстремальная к множеству W для всех движений $G[t] = G[t, t_0, G_0, V^{(e)}]$, обеспечивает выполнение условия

$$(3.12) \qquad \{t, G[t]\} \in W, \quad t \geqslant t_0$$

Лемма 3.2. Если $\{t_0, G_0\} \in W$ и замкнутое множество $W \subset R^1 \times \operatorname{comp}(R^n)$ является u — j-стабильным, то стратегии $U^{(e)}$ и $J^{(e)}$, экстремальные к данному множеству W, обеспечивают выполнение условия

$$\{t, G[t]\} \in W, \quad t \in [t_0, \tau) \tag{3.13}$$

для всякого движения $G[t] = G[t, t_0, G_0, U^{(e)}, J^{(e)}]$, для которого

$$\{t, G[t]\} \cap M = \varnothing \tag{3.14}$$

при всех $t \in [t_0, \tau]$.

Доказательство приведенных утверждений проводится по плану рассуждений, которые использовались, например, в [5], в случае обыкновенной дифференциальной игры с полной информацией и здесь опускается.

Следует заметить, что леммы 3.1 и 3.2 остаются справедливыми и в аппроксимационном варианте. При этом движения $G[t]$ следует заменить их аппроксимационными аналогами — движениями $G_\Delta[t]$, а множества W и M их открытыми ε-окрестностями в соответствующих пространствах. Утверждения приведенных предложений будут в этом случае справедливы для всех аппроксимационных движений $G_\Delta[t]$ с разбиениями $\Delta = \{\tau_i\}$, диаметр $d(\Delta) = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ которых не превосходит некоторого достаточно малого числа $\delta = \delta_\varepsilon$.

4. Опираясь на леммы 3.1 и 3.2 и полагая выполненным

Условие 4.1. $\Gamma(t^*) \subset \Gamma(t_*)$ при всех $t^* > t_*$,

докажем справедливость следующего альтернативного утверждения, составляющего основной результат данной работы.

Теорема 4.1. Каково бы ни было число ϑ и позиция $\{t_0, G_0\}$, справедливо одно и только одно из двух следующих утверждений: либо (I) для позиции $\{t_0, G_0\}$ разрешима задача 2.1 об уклонении вплоть до момента ϑ, либо (II) для позиции $\{t_0, G_0\}$ разрешима задача 2.2 о сближении к моменту ϑ.

Приведем схему доказательства теоремы 4.1, следуя при этом последовательности рассуждений из [5]. Пусть выбрано некоторое ϑ. Через $W^{(\vartheta)}$ обозначим множество всевозможных позиций $\{t, G\}$, для каждой из которых как для начальной не разрешима задача 2.1 об уклонении от множества M вплоть до момента ϑ. Аналогично [5] можно показать, что указанное множество $W^{(\vartheta)}$ является замкнутым. Особо важным, однако, оказывается то, что множество $W^{(\vartheta)}$ обладает свойством u — j-стабильности. Для доказательства примем от противного, что он таковым не является. Тогда найдутся позиция $\{t_*, G_*\} \in W^{(\vartheta)}$, момент $t^* > t_*$ и измеримая функция $v_*(t)$, удовлетворяющая условию $v_*(t) \in Q(t)$ $(t \in [t_*, t^*])$, такие, что для всякого абсолютно непрерывного решения $x(t)$ включения

$$dx / dt \in F_u(t, v_*(t)), \quad x(t_*) = 0 \tag{4.1}$$

выполняются следующие условия:

$$\{\tau, G_* + x(\tau)\} \cap M = \varnothing \tag{4.2}$$

при всех $\tau \in [t_*, t^*]$;

$$\{t^*, G + x(t^*)\} \notin W \tag{4.3}$$

при всех $G \subset G_*$, $G \in \Gamma(t^*)$. Отметим, что в силу замкнутости в равномерной метрике множества решений дифференциального включения (4.1), а также замкнутости множества M, условие (4.2) останется справедливым и для некоторой достаточно малой открытой окрестности $M^{(\varepsilon_0)}$ множества M.

Пусть $\Sigma^* \subset \mathrm{comp}\,(R^n)$ — множество всевозможных элементов G' вида

(4.4) $$G' = G + x\,(t^*), \quad G \subset G_*, \quad G \in \Gamma\,(t^*)$$

где $x\,(\cdot)$ — некоторое решение включения (4.1). Используя определение множеств $W^{(\vartheta)}$ и Σ^*, условие 4.3 и рассуждая так же, как и в аналогичной ситуации в обыкновенной позиционной дифференциальной игре ([5], стр. 66—67), можно показать, что для всякого элемента $G^* \in \Sigma^*$ найдутся стратегия V^*, открытая окрестность $H^*\,(M)$ множества M и число $\delta^* > 0$, такие, что для всех движений $G\,[t] = G\,[t, t^*, G, V^*]$ будет обеспечено выполнение условия

(4.5) $$\{t, G\,[t]\} \cap H^*\,(M) = 0, \quad t \in [t^*, \vartheta]$$

если только элемент $G \in \mathrm{comp}\,(R^n)$ удовлетворяет следующему неравенству:

(4.6) $$\mathrm{dist}\,(G, G^*) \leqslant \delta^*$$

Здесь $\mathrm{dist}\,(G, G^*)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами G и G^*. Учитывая данное свойство элементов $G^* \in \Sigma^*$, а также компактность множества Σ^*, нетрудно убедиться, что найдется конечная система множеств

$$\sigma_i = \{G \in \mathrm{comp}\,(R^n) : \mathrm{dist}\,(G, G_i^*) \leqslant \delta_i^*\}, \quad G_i^* \in \Sigma^*$$

покрывающих множество Σ^*, и стратегий $V_i^*\,(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$, таких, что для всякого элемента $G \in \sigma_i$ стратегия V_i^* обеспечит уклонение

(4.7) $$\{t, G\,[t]\} \cap H_i^*\,(M) = \varnothing, \quad t \in [t^*, \vartheta]$$

всех движений $G\,[t] = G\,[t, t^*, G, V_i^*]$ от некоторой открытой окрестности $H_i^*\,(M)$ множества M на отрезке $[t^*, \vartheta]$.

Пусть ε^* — минимальное из чисел $\varepsilon_0\,/\,2, \delta_1^*\,/\,2, \delta_2^*\,/\,2, \ldots \delta_m^*\,/\,2$, а $\Lambda^*\,(G) = \{G' : G' \subset G,\ G' \in \Gamma\,(t^*)\}$. Рассуждая от противного, можно убедиться в существовании такого числа $\alpha_0 > 0$, что

(4.8) $$\Lambda^*\,(G_*^{[\alpha_0]}) \subset (\Lambda^*\,(G_*))^{(\varepsilon^*)}$$

Обозначим через $W_*^{(\vartheta)}$ замыкание множества, складывающегося из всевозможных позиций $\{t, G\}$, таких, что либо $t \in [t_*, t^*]$ и

(4.9) $$G = G' + x\,(t^*), \quad G' \in \mathrm{comp}\,(R^n), \quad G' \subset G_*^{[\alpha_0]}$$

где $x\,(\cdot)$ — какое-либо решение включения (4.1), либо $t \in (t^*, \infty)$ и

(4.10) $$G = G\,[t, t^*, G', V_j^*]$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots m\}$ и некоторого движения $G\,[\cdot, t^*, G', V_j^*]$ и элемента $G' \in \sigma_j$.

Используя условие (4.1), непосредственной проверкой можно убедиться, что построенное множество $W_*^{(\vartheta)}$ обладает свойством v-стабильности, причем для всякой позиции $\{t, G\} \in W_*^{(\vartheta)}$, $t \in [t_*, \vartheta]$ выполняется условие

(4.11) $$\{t, G\} \cap H_*\,(M) = \varnothing$$

Здесь $H_*\,(M)$ — некоторая открытая окрестность множества M, в качестве которой можно выбрать, например, пересечение окрестностей, $H_0\,(M) = M^{(\varepsilon_0/2)}$, $H_1^*\,(M)$, $H_2^*\,(M), \ldots H_m^*\,(M)$.

Согласно определению множества $W_*^{(\vartheta)}$ для позиции $\{t_*, G_*\}$ будет справедливо включение $\{t_*, G_*^{[\alpha_0]}\} \in W_*^{(\vartheta)}$, откуда с учетом v-стабильности множества $W_*^{(\vartheta)}$ в соответствии с леммой 3.1 заключаем, что стратегия $V^{(e)}$, экстремальная к данному множеству, обеспечит уклонение

(4.12) $$\{t, G\,[t]\} \cap H_*\,(M) = \varnothing, \quad t \in [t_*, \vartheta]$$

всех движений $G\,[t] = G\,[t, t_*, G_*, V^{(e)}]$ от открытой окрестности $H_*\,(M)$ множества M на отрезке $[t_*, \vartheta]$, и, стало быть, для позиции $\{t_*, G_*\}$ будет разрешимой задача 2.1 об уклонении. Последнее обстоятельство противоречит, однако, выбору позиции $\{t_*, G_*\} \in W^{(\vartheta)}$ как позиции, для которой задача 2.1 не разрешима, и тем самым доказывает u — j-стабильность множества $W^{(\vartheta)}$.

Учитывая теперь условие

(4.13) $\{\vartheta, G\} \cap M \neq \varnothing, \quad \{\vartheta, G\} \in W^{(\vartheta)}$

непосредственно вытекающее из определения множества $W^{(\vartheta)}$, в силу леммы 3.2 заключаем, что для всякой позиции $\{t_0, G_0\} \in W^{(\vartheta)}$ разрешима задача 2.2 о сближении с множеством M к моменту ϑ, причем в качестве стратегий, разрешающих эту задачу, могут быть выбраны стратегии $U^{(e)}$ и $J^{(e)}$, экстремальные к множеству $W^{(\vartheta)}$.

Таким образом для всякой позиции $\{t_0, G_0\}$ разрешима задача 2.1, если только $\{t_0, G_0\} \notin W^{(\vartheta)}$, и задача 2.2, если $\{t_0, G_0\} \in W^{(\vartheta)}$, что с учетом леммы 2.1, гарантирующей невозможность одновременной разрешимости этих задач, и доказывает теорему 4.1.

Аппроксимационные аналоги лемм 3.1 и 3.2 позволяют получить следующий аппроксимационный вариант теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Пусть выбрано некоторое число ϑ и фиксирована некоторая позиция $\{t_0, G_0\}$. Тогда, если для позиции $\{t_0, G_0\}$ выполнено первое из утверждений теоремы 4.1, т. е. разрешима задача 2.1, то найдутся стратегия V°, число $\delta_0 > 0$ и некоторая открытая окрестность $H_0(M)$ множества M, такие, что для всех аппроксимационных движений $G_\Delta[t] = G_\Delta[t, t_0, G_0, V^\circ, u[\cdot]]$ с шагом $d(\Delta) = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ разбиения $\Delta = \{\tau_i\}$, удовлетворяющим условию $d(\Delta) < \delta_0$, будет обеспечено выполнение следующего условия:

(4.14) $\{t, G_\Delta[t]\} \cap H_0(M) = \varnothing, \quad t \in [t_0, \vartheta]$

Если же, напротив, для позиции $\{t_0, G_0\}$ выполняется второе из утверждений теоремы 4.1, т. е. разрешима задача 2.2, то при всяком выборе числа $\varepsilon > 0$ можно будет указать число $\delta_\varepsilon > 0$, такое, что некоторые стратегии U° и J° обеспечат выполнение условия

(4.15) $\{\tau, G_\Delta[\tau]\} \cap M^{[\varepsilon]} \neq \varnothing, \quad \tau \in [t_0, \vartheta]$

для всех аппроксимационных движений $G_\Delta[t] = G_\Delta[t, t_0, G_0, U^\circ, J^\circ, v[\cdot]]$ с шагом $d(\Delta) = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ разбиения Δ, не превосходящим числа δ_ε.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за внимание к работе, а также А. И. Субботина и А. Г. Ченцова за полезное обсуждение результатов.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I. II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Задача управления с неполной информацией. Изв. АН СССР. МТТ. 1973, № 4.
4. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр с неполной информацией. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 4.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.