Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. Г. Сокольский

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости положений равновесия автономных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы для случая, когда одна из частот линейной системы равна нулю. Вопрос об устойчивости решается в нелинейной постановке. Изучен случай простых (случай Каменкова) и непростых (случай Ляпунова) элементарных делителей определяющей матрицы линейной системы. В зависимости от коэффициентов функции Гамильтона доказана устойчивость или неустойчивость положения равновесия.

1. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Координаты x_1, x_2 и импульсы X_1, X_2 выберем таким образом, чтобы начало координат фазового пространства совпадало с положением равновесия системы дифференциальных уравнений, а функцию Гамильтона представим в виде ряда (H_m — однородные полиномы степени m относительно координат и импульсов)

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.1}$$

$$H_m = \sum_{\nu_1+\mu_1+\nu_2+\mu_2=m} h_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2} x_1^{\nu_1} X_1^{\mu_1} x_2^{\nu_2} X_2^{\mu_2} \tag{1.2}$$

Если H_2 — знакоопределенная функция своих переменных, то по теореме Ляпунова [1] положение равновесия устойчиво. Если H_2 будет незнакоопределенной функцией, но имеет место устойчивость в первом приближении и частоты ω_1, ω_2 $(0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2)$ линейной системы не связаны резонансными соотношениями до четвертого порядка включительно, то в большинстве случаев вопрос об устойчивости решается с помощью теоремы Арнольда — Мозера [2,3]. Пусть существуют целые n_1, n_2, такие, что $0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 4$ и $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$. Тогда теорема Арнольда — Мозера неприменима, и задача об устойчивости нуждается в особом исследовании. Устойчивость при резонансах третьего $(2\omega_1 = \omega_2)$ и четвертого $(3\omega_1 = \omega_2)$ порядков исследована в работах [4, 5]. Устойчивость при резонансе второго порядка $(\omega_1 = \omega_2)$ рассматривалась в [6].

Цель данной работы—получение условий устойчивости и неустойчивости при резонансе первого порядка, т. е. в случае, когда одна из частот линейной системы равна нулю: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$.

Обратимся сначала к вопросу о нормальной форме квадратичной части функции Гамильтона (1.1). В самом общем виде такая нормальная форма установлена Вильямсоном и Д. М. Галиным и приведена в книге [7].

Пусть дана линейная система с гамильтонианом $H_2(x_1, X_1, x_2, X_2)$. Прежде всего заметим, что так как $\omega_1 \neq \omega_2$ и $\omega_2 \neq 0$, то с помощью вещественного канонического преобразования гамильтониан можно привести к виду [8]

$$H_2 = h_2 + {}^1/_2\delta_2\omega_2(x_2^2 + X_2^2) \quad (\delta_2 = \pm 1)$$

где h_2 зависит только от переменных x_1, X_1 и в самом общем случае имеет вид

$$h_2 = {}^1/_2 a x_1^2 + b x_1 X_1 + {}^1/_2\, c X_1^2$$

Уравнения движения такой системы с одной степенью свободы запишем следующим образом:

$$\dot{\xi} = Jh\xi$$

$$\xi = \begin{Vmatrix} x_1 \\ X_1 \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad h = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix}$$

Определяющее уравнение этой системы $\det(Jh - \sigma E) = 0$, где E — единичная матрица, тогда принимает вид

$$\sigma^2 + D = 0 \quad (D = \det(Jh) = ac - b^2)$$

Очевидно, что если определяющее уравнение имеет нулевой корень, то $D = 0$. Можно показать, что все случаи, когда $D = 0$, с помощью линейных вещественных канонических замен можно свести к двум: 1) $a = b = c = 0$; 2) $a \neq 0$, $b = c = 0$. В первом и во втором случаях инвариантные многочлены определяющей матрицы $Jh - \sigma E$ соответственно равны: 1) $i_1 = i_2 = \sigma$; 2) $i_1 = \sigma^2$, $i_2 = 1$. Следовательно, в первом случае определяющая матрица имеет простые элементарные делители, а во втором — непростые. Заметим, кроме того, что в первом случае $\operatorname{rank}(Jh) = 0$, а во втором — $\operatorname{rank}(Jh) = 1$.

Таким образом, в первом случае $h_2 \equiv 0$, и окончательно нормальная форма функции H_2 будет иметь вид

$$H_2 = {}^1/_2\delta_2\omega_2(x_2^2 + X_2^2) \tag{1.3}$$

В случае непростых элементарных делителей с помощью канонических замен всегда можно добиться, чтобы $a = \delta_1 = \pm 1$, т. е. можно считать, что

$$H_2 = {}^1/_2\delta_1 x_1^2 + {}^1/_2\delta_2\omega_2(x_2^2 + X_2^2) \tag{1.4}$$

В работе А. М. Ляпунова [9] исчерпывающе рассмотрена задача об устойчивости негамильтоновой системы двух дифференциальных уравнений в случае пары нулевых корней определяющего уравнения и непростых элементарных делителей (случай Ляпунова). Г. В. Каменков [10] рассмотрел аналогичную задачу, но для случая простых делителей (случай Каменкова). Кроме того, Каменков рассмотрел задачи об устойчивости систем многих дифференциальных уравнений с парой нулевых корней. Однако Каменковым предполагалось, что все остальные корни определяющего уравнения имеют отрицательные вещественные части. Ясно, что в гамильтоновой системе такая ситуация никогда возникнуть не может, а так как доказательства Каменкова существенно опираются на упомянутое предположение, то отсюда также ясна необходимость особого рассмотрения случая гамильтоновых систем (или случая с чисто мнимыми корнями).

Тем не менее, некоторые идеи доказательства неустойчивости, разработанные А. М. Ляпуновым и Г. В. Каменковым для систем с одной степенью свободы, могут быть использованы и при исследовании систем с большим числом степеней свободы.

2. Почти во всех рассматривающихся до сих пор нерезонансных и резонансных задачах об устойчивости канонических систем с двумя степенями свободы исследование проводится по следующей схеме (исключение — случай непростых элементарных делителей при $\omega_1 = \omega_2$ [6]). Функция Гамильтона приводится к нормальному виду (в каждом случае к своему). Затем, с использованием интеграла $H = H^\circ = \text{const}$, где H° — малое число или нуль, осуществляется редукция, т. е. исследование сводится к системе с одной степенью свободы, но неавтономной. Если функция Гамильтона полученной системы оказывается знакопеременной, то каким-нибудь образом доказывается неустойчивость исходной системы; если знакоопределенной — устойчивость. В случае знакопостоянства первого члена разложения функции Гамильтона системы с одной степенью свободы вопрос об устойчивости решается членами следующего порядка. При этом знакопеременность возможна только в резонансной ситуации. Учтя все эти предварительные соображения, можно сформулировать следующую основную теорему, использование которой позволяет решить вопрос об устойчивости двухчастотных систем почти во всех случаях.

Теорема 2.1. Пусть функция Гамильтона системы с двумя степенями свободы в результате редукции приведена к виду

$$K = r^\alpha \Phi(\varphi) + K^*(r, \varphi, t, H^\circ) \tag{2.1}$$

$$\alpha > 1, \quad K^* = O(r^{\alpha+\alpha_1}), \quad (\alpha_1 > 0)$$

где функции Φ и K^* τ-периодичны по φ, а K^*, кроме того, 2π-периодична по t. В (2.1) H° — достаточно малое значение постоянной энергии. Тогда, если уравнение $\Phi(\varphi) = 0$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \tau$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Если существует такое число φ^*, что $\Phi(\varphi^*) = 0$, а $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Замечание 2.1. Если для всех корней φ^{**} уравнения $\Phi(\varphi) = 0$ оказывается, что $\Phi'(\varphi^{**}) = 0$, то вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка.

Замечание 2.2. Теорема 2.1 является простым обобщением теоремы 2.1 из [6], в которую она и переходит при $\alpha = 2$, и $\tau = 2\pi$.

Сначала с помощью теоремы Четаева [11] докажем утверждение о неустойчивости. Прежде всего заметим, что из условия периодичности функции $\Phi(\varphi)$ и из того, что $\Phi'(\varphi) \neq 0$, вытекает возможность подобрать такой корень φ^* уравнения $\Phi(\varphi) = 0$, что $\Phi'(\varphi^*) < 0$. За функцию Четаева возьмем функцию

$$V = r \sin \Psi, \quad \Psi = \frac{\pi}{2a}(\varphi - \varphi^* + a)$$

где достаточно малое (но конечное) число a подберем так, чтобы в окрестности $\varphi^* - a \leqslant \varphi \leqslant \varphi^* + a$ не было других нулей функции Φ, а Φ'

сохраняла бы в этой окрестности знак. Полная производная функции Четаева, составленная в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (2.1), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = r^{\alpha}\left\{\alpha \frac{\pi}{2a}\Phi\cos\Psi - \Phi'\sin\Psi\right\} + O\left(r^{\alpha+\alpha_1}\right) \tag{2.2}$$

Можно убедиться, что функция (2.2) в области $V \geqslant 0$ всегда положительна, и, следовательно, положение равновесия неустойчиво.

Для доказательства устойчивости перейдем к переменным «действие I — угол W» по формулам $r = \partial S / \partial\varphi, W = \partial S / \partial I$, где производящая функция канонического преобразования $r, \varphi \to I, W$ равна

$$S(I, \varphi) = I\tau\frac{E(\varphi)}{E(\tau)}, \quad E(u) = \int_0^u [\Phi(\varphi)]^{1/\alpha}\, d\varphi$$

Отметим, что при $0 \leqslant u \leqslant \tau$ и выполнении условий теоремы интеграл $E(u)$ всегда существует. Тогда в новых переменных гамильтониан (2.1) запишется в виде

$$K(I, W) = \gamma(I) + K^*(I, W, t, H^\circ), \quad \gamma(I) = [I\tau / E(\tau)]^\alpha$$

где достаточно гладкая функция K^* имеет период τ по φ, период 2π по t и порядок не ниже $\alpha + \alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$) относительно I. Так как $d\gamma / dI \neq 0$ в кольце $0 < c_1 \leqslant I \leqslant c_2$, то в силу теоремы Мозера об инвариантных кривых [3] исследуемое положение равновесия устойчиво.

3. Пусть определяющее уравнение системы с гамильтонианом (1.1) имеет пару чисто мнимых корней, а элементарные делители просты (случай Каменкова). Будем считать, что линейная нормализация уже произведена и H_2 имеет вид (1.3); формы H_m имеют вид (1.2).

Сделаем теперь такое нелинейное каноническое преобразование

$$(x_1, X_1, x_2, X_2) \to (y_1, Y_1, y_2, Y_2) \tag{3.1}$$

чтобы максимально упростить формы H_3, H_4 и т. д. Нормализующее преобразование (3.1) будем искать не с помощью классического метода Биркгофа, а с помощью новых методов нормализации Депри — Хори [12, 13]. Тогда в обозначениях работы[1] нормализация сводится к решению операторного уравнения

$$DS_m = G_m - F_m \tag{3.2}$$

в каждом порядке m относительно переменных. Здесь S_m — члены разложения производящей функции преобразования (3.1), F_m — члены разложения новой, нормализованной функции Гамильтона F, а формы G_m вычисляются по простым формулам через ранее найденные формы $H_2, \ldots, H_m, S_3, \ldots, S_{m-1}, F_3, \ldots, F_{m-1}$ (например, $G_3 = H_3, G_4 = H_4 + {}^1/_2\{H_3 + F_3; S_3\}$), где фигурными скобками обозначена операция вы-

[1] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, 1976, № 31.

числения скобок Пуассона). В (3.2)

$$DS_m = \{S_m; H_2\} = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial S_m}{\partial y_j}\frac{\partial H_2}{\partial Y_j} - \frac{\partial S_m}{\partial Y_j}\frac{\partial H_2}{\partial y_j}\right) \tag{3.3}$$

Для удобства решения операторного уравнения (3.2) сделаем линейную комплексную каноническую замену переменных

$$x_1 = x_1^*, \quad X_1 = X_1^* \tag{3.4}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2^* + i\delta_2 X_2^*), \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\omega_2 x_2^* + X_2^*) \tag{3.5}$$

Соответствующие формулы можно выписать и для переменных y_j, Y_j, y_j^*, Y_j^*. Тогда, учитывая вид функции H_2, записанной через комплексные переменные, имеем

$$D = i\omega_2\left(y_2^*\frac{\partial}{\partial y_2^*} - Y_2^*\frac{\partial}{\partial Y_2^*}\right)$$

Это приводит к решению таких алгебраических уравнений относительно коэффициентов производящей функции и новой функции Гамильтона (эти функции также можно записать в комплексных переменных):

$$\omega_2(\nu_2 - \mu_2)\, s^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2} = -i\,(g^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2} - f^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2}) \tag{3.6}$$

Отсюда видно, что если $\nu_2 \neq \mu_2$, то соответствующие члены в новой функции Гамильтона можно уничтожить. Возвратившись к вещественным переменным, получим такой вид нормальной формы функции Гамильтона:

$$F = \frac{1}{2}\delta_2\omega_2(y_2^2 + Y_2^2) + \sum_{m=3}^{M}\sum_{k=0}^{[m/2]} h^{(k)}_{m-2k}(y_2^2 + Y_2^2) + F_{M+1} + \ldots \tag{3.7}$$

Здесь $h^{(k)}_{m-2k}$ — однородные полиномы степени $m - 2k$ относительно y_1, Y_1, а квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа. Предполагается, что нормализация проведена до такого порядка M относительно переменных, что хотя бы один коэффициент полинома $h^{(0)}_M$ отличен от нуля.

Теорема 3.1. Пусть каноническая система с двумя степенями свободы имеет одну нулевую частоту и простые элементарные делители, а ее функция Гамильтона приведена к виду (3.7). Тогда, если $h^{(0)}_M$ — знакоопределенная функция переменных y_1, Y_1, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Если $h^{(0)}_M$ — знакопеременная функция, то положение равновесия неустойчиво.

Замечание 3.1. Если $h^{(0)}_M$ — знакопостоянная функция, то вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка.

Замечание 3.2. Последнее утверждение теоремы 3.1 доказывается здесь при дополнительном предположении, что среди корней уравнения $h^{(0)}_M = 0$ имеется однократный. Теорема остается справедливой и без этого предположения.

Следствие 3.1. Если M — нечетное число, то положение равновесия неустойчиво.

Для доказательства теоремы перейдем к полярным координатам r_j, φ_j по формулам

(3.8) $$y_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad Y_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$$

Функция Гамильтона (3.7) тогда принимает вид

(3.9) $$F = \delta_2\omega_2 r_2 - \delta_2\omega_2 r_1^{M/2}\Phi(\varphi_1) + \sum_{m=3}^{M}\sum_{k=1}^{[m/2]}\Phi_{m,k}(\varphi_1) r_1^{m/2-k} r_2^{k} + F^{(M+1)}$$

где функция $-\delta_2\omega_2\Phi(\varphi_1)$ получается из $h_M^{(0)}$, если вместо y_1, Y_1 подставить величины $\sqrt{2}\sin\varphi_1$, $\sqrt{2}\cos\varphi_1$ соответственно. Функции $\Phi_{m,k}$ получаются аналогичным способом. Через $F^{(M+1)}$ обозначены члены, порядок которых относительно $\sqrt{r_j}$ выше M и 2π-периодические по φ_1, φ_2.

При помощи интеграла $F = H^\circ = \text{const}$ понизим порядок системы на две единицы и сведем исследование автономной системы с двумя степенями свободы к исследованию системы с одной степенью свободы, но неавтономной. При этом новый гамильтониан $K = r_2$ будет 2π-периодической функцией новой независимой переменной φ_2.

Движение рассматривается в достаточно малой окрестности начала координат, поэтому можно считать, что $r_1 \sim \varepsilon$, $r_2 \sim \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Пусть, кроме того, начальные условия таковы, что $H^\circ \sim \varepsilon^{(M+1)/2}$. Тогда, разрешая уравнение (3.9) относительно r_2 и обозначая гамильтониан полученной системы через K, приходим к (2.1), где $\alpha = M/2$, $\alpha_1 = {}^1/_2$, $\tau = 2\pi$, $\varphi = \varphi_1$, $r = r_1$.

Наконец, замечая, что условия знакоопределенности или знакопеременности функции $h_M^{(0)}$ эквивалентны соответствующим условиям отсутствия или наличия корней уравнения $\Phi(\varphi) = 0$, которые фигурируют в основной теореме 2.1, сразу же получаем оба утверждения теоремы 3.1.

4. Рассмотрим случай непростых элементарных делителей (случай Ляпунова). Квадратичная часть функции Гамильтона (1.1) имеет вид (1.4). Нелинейную нормализацию проведем тем же способом, что и в случае простых элементарных делителей. При этом вместо замены (3.4) произведем замену $x_1 = \sqrt{-i\delta_1}x_1^*$, $X_1 = \sqrt{i\delta_1}X_1^*$. Тогда квадратичная часть функции Гамильтона принимает вид

$$H_2^* = -{}^1/_2 i x_1^{*2} + i\omega_2 x_2^* X_2^*$$

Подставляя это выражение в операторное уравнение (3.2), приходим к задаче решения системы таких алгебраических уравнений:

$$(\mu_1 + 1)\, s^*_{\nu_1-1,\,\mu_1+1,\,\nu_2,\,\mu_2} + \omega_2(\nu_2 - \mu_2)\, s^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2} = \\ = -i\,(g^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2} - f^*_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2})$$

Рассматривая эти уравнения, нетрудно убедиться, что в новой функции Гамильтона нельзя уничтожить только члены, для которых $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \mu_2$. Это приводит к такой нормальной форме гамильтониана, записанного в вещественных переменных:

$$(4.1)\qquad F=\frac{1}{2}\delta_1y_1^2+\frac{1}{2}\delta_2\omega_2(y_2^2+Y_2^2)+\sum_{m=3}^{M}\sum_{k=0}^{[m/2]}a_{m-2k,k}Y_1^{m-2k}\times$$
$$\times(y_2^2+Y_2^2)^k+F_{M+1}+\ldots$$

где $a_{m-2k,k}$ — вещественные коэффициенты. При этом нормализацию надо провести до такого порядка M, чтобы $a_{M,0}\neq 0$. Коэффициенты нормальной формы довольно просто выражаются через коэффициенты исходной функции Гамильтона (1.1). Например

$$(4.2)\qquad a_{3,0}=h_{0300}$$
$$a_{4,0}=h_{0400}-\frac{1}{2}\delta_1h_{1200}^2+\frac{3}{2}\delta_1h_{2100}h_{0300}-\frac{1}{\omega_2}\delta_2h_{0210}h_{0201}$$

Теорема 4.1. Пусть каноническая система с двумя степенями свободы имеет одну нулевую частоту и непростые элементарные делители, а ее функция Гамильтона приведена к виду (4.1). Тогда

1) если M — нечетное, то положение равновесия неустойчиво;

2) если M — четное и $\delta_1a_{M,0}<0$, то положение равновесия неустойчиво;

3) если M — четное и $\delta_1a_{M,0}>0$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Для доказательства теоремы введем полярные координаты r_2, φ_2 по формулам (3.8) и, как и в п. 3, понизим порядок системы с помощью интеграла $F=H^\circ=\mathrm{const}$, приняв φ_2 за новую независимую переменную. Для новой функции Гамильтона K получим такое выражение:

$$(4.3)\qquad K=\frac{1}{\delta_2\omega_2}\left[\frac{1}{2}\delta_1y_1^2+a_{M,0}Y_1^M+K^{(M)}+K^{(M+1)}\right]$$
$$(4.4)\qquad K^{(M)}=\sum_{m=3}^{M}\sum_{k=1}^{[m/2]}a^*_{m-2k,k}Y_1^{m-2k}y_1^{2k}$$
$$K^{(M+1)}(y_1,Y_1,\varphi_2,H^\circ)=O\left((y_1^2+Y_1^2)^{(M+1)/2}\right)$$

В (4.4) вещественные величины $a^*_{m-2k,k}$ получаются по простым формулам из величин $a_{i,j}$ $(i,\ j=1,\ldots,m)$.

Докажем сначала первое утверждение теоремы 4.1 с помощью теоремы Ляпунова о неустойчивости [1]. За функцию Ляпунова возьмем знакопеременную функцию

$$V=\delta_2\omega_2(y_1-M\delta_1a_{M,0}y_1Y_1)$$

Производная функция V, составленная в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (4.3), имеет вид

$$(4.5)\qquad dV/d\varphi_2=Ma_{M,0}(y_1^2+Y_1^{M-1})+V^*$$

где через V^* обозначены или члены более высокого порядка относительно y_1, Y_1, или члены вида $y_1^mY_1^k$, где $3\leqslant m+k\leqslant M-1$, но $m\neq 0$. В достаточно малой окрестности начала координат функция (4.5) будет знакоопределенной. В этом можно убедиться, сделав замену $y_1\to\delta^{M-1}y$, $Y_1\to\delta^2Y$, где δ — достаточно малое число. Тогда все члены из V^* будут членами более высокого порядка относительно δ, и знак функции (4.5) будет совпадать со знаком $a_{M,0}$.

Таким образом, первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Для доказательства двух последних утверждений теоремы сделаем каноническую замену переменных

$$y_1 = \sqrt{2}r^{M/(M+2)}\,\mathrm{Sn}\,\varphi, \quad Y_1 = \frac{M+2}{2\sqrt{2}}\,r^{2/(M+2)}\,\mathrm{Cs}\,\varphi$$

где φ, r — новые координата и импульс, а $\mathrm{Sn}\,\varphi$, $\mathrm{Cs}\,\varphi$ — ляпуновские функции [9], определяемые формулами

$$\frac{d\,\mathrm{Cs}\,\varphi}{d\varphi} = -\mathrm{Sn}\,\varphi, \quad \frac{d\,\mathrm{Sn}\,\varphi}{d\varphi} = \mathrm{Cs}^{M-1}\varphi, \quad \mathrm{Cs}\,0 = 1, \quad \mathrm{Sn}\,0 = 0 \tag{4.6}$$

$$\mathrm{Cs}^M\varphi + {}^1\!/_2 M\,\mathrm{Sn}^2\,\varphi = 1$$

Отметим, что при $M = 4$ имеем $\mathrm{Cs}\,\varphi = \mathrm{cn}\,\varphi$, $\mathrm{Sn}\,\varphi = \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi$, где $\mathrm{cn}\,\varphi$, $\mathrm{sn}\,\varphi$, $\mathrm{dn}\,\varphi$ — эллиптические функции с модулем $1/\sqrt{2}$. Функции $\mathrm{Sn}\,\varphi$, $\mathrm{Cs}\,\varphi$ — периодические с общим периодом, выраженным через гамма-функции следующим образом:

$$T_M = 2\sqrt{\frac{2\pi}{M}}\,\Gamma\left(\frac{1}{M}\right)\Big/\left(\frac{M+2}{2M}\right)$$

Функция Гамильтона (4.3), записанная в переменных r, φ, имеет вид (2.1), где

$$\varkappa = 2M\,/\,(M+2), \quad \alpha_1 = 1\,/\,(M+2), \quad \tau = T_M \tag{4.7}$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{\delta_1}{\delta_2\omega_2}\,[\mathrm{Sn}^2\,\varphi + A\,\mathrm{Cs}^M\,\varphi], \quad A = \delta_1 a_{M,0}\left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}}\right)^M \tag{4.8}$$

Сравнивая выражение (4.6) и выражение, стоящее в квадратных скобках в (4.8), можно убедиться, что при $\delta_1 a_{M,0} > 0$ функция $\Phi(\varphi)$ не имеет нулей. При $\delta_1 a_{M,0} < 0$ получаем $\Phi(\varphi^*) = 0$, где

$$\mathrm{Sn}\,\varphi^* = -\delta_1\delta_2\left[-\left(1-\frac{AM}{2}\right)\Big/A\right]^{-1/2}, \quad \mathrm{Cs}\,\varphi^* = \left(1-\frac{AM}{2}\right)^{-1/M}$$

$$\Phi'(\varphi^*) = -\frac{2}{\omega_2}\sqrt{-A}\left(1-\frac{AM}{2}\right)^{(2-M)/2M} \neq 0$$

Воспользовавшись теперь основной теоремой из п. 2, сразу получаем два последних утверждения теоремы 4.1.

5. Для иллюстрации применимости описанных выше результатов в механических задачах рассмотрим вопрос об устойчивости лагранжевых решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел при нулевом соотношении масс [14].

Первые члены разложения функции Гамильтона в окрестности лагранжева решения имеют вид

$$H_2 = \frac{1}{2}q_1^2 - kq_1q_2 - q_1p_2 - \frac{5}{8}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 \tag{5.1}$$

$$H_3 = -\frac{7\sqrt{3}}{36}kq_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_1^2q_2 + \frac{11\sqrt{3}}{12}kq_1q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_2^3 \tag{5.2}$$

$$H_4 = \frac{37}{128}q_1^4 + \frac{27}{24}kq_1^3q_2 - \frac{123}{64}q_1^2q_2^2 - \frac{15}{8}kq_1q_2^3 - \frac{3}{128}q_2^4 \tag{5.3}$$

$$k = {}^3\!/_4\sqrt{3}\,(1-2\mu)$$

где μ — отношение массы меньшего из основных притягивающих тел к сумме их масс.

Известно [14], что при $\mu > \mu^* \approx 0.0385...$ лагранжевы решения неустойчивы, так как определяющее уравнение имеет корни с положительной вещественной частью. Вопрос об устойчивости лагранжевых решений при $0 < \mu \leqslant \mu^*$, решение которого потребовало нелинейного анализа, рассмотрен в работах [15–17]. При $\mu = 0$ ответ на вопрос об устойчивости следует из простых физических соображений. В самом деле, при $\mu = 0$ задача сводится к исследованию устойчивости движения материальной точки вокруг неподвижного притягивающего центра, а такое движение, как известно, неустойчиво по Ляпунову: его период зависит от начальных условий.

Однако представляет интерес получить этот же результат из чисто формального рассмотрения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, в духе результатов работ [15–17].

При $\mu = 0$ частоты движения в окрестности лагранжева решения имеют вид: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, а элементарные делители определяющей матрицы линейной системы непросты. Каноническое преобразование

$$\mathbf{Q} = N\xi \tag{5.4}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{13}}{2} & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{4}{\sqrt{13}} \\ -\dfrac{1}{6} & \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{5}{2\sqrt{13}} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{5}{2\sqrt{13}} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix}$$

приводит квадратичную часть (5.1) функции Гамильтона к виду (1.4), а $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$. Формы H_3, H_4 запишутся в виде (1.2), где коэффициенты $h_{\nu_1\mu_1\nu_2\mu_2}$ просто выражаются через коэффициенты форм (5.2), (5.3) и коэффициенты преобразования (5.4). Производя нелинейную нормализацию описанным в п. 4 способом, функцию Гамильтона приведем к виду (4.1), где (см. (4.2), (4.3))

$$a_{3,0} = 0, \quad a_{4,0} = \frac{81}{104}(13 - 4\sqrt{3})$$

Так как $\delta_1 a_{4,0} < 0$, то, согласно второму утверждению теоремы 4.1, получаем, что лагранжевы решения при $\mu = 0$ неустойчивы.

В заключение автор благодарит А. П. Маркеева за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Поступила 9 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6.
3. *Мозер Ю. К.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
4. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
6. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974
8. *Булгаков Б. В.* О нормальных координатах. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
9. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.

10. *Каменков Г. В.* Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. Избр. тр. т. I. М., «Наука», 1971.
11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Изд. 3. М., «Наука», 1965.
12. *Hori G. I.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. J. Japan Astron. Soc., 1966, vol. 18, No. 4, p. 287—296.
13. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter. Celest. Mech., 1969, vol. 1, No. 1, p. 12—30.
14. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
15. *Deprit A., Deprit-Bartholome A.* Stability of the triangular lagrangian points. Astron. J., 1967, vol. 72, No. 2, p. 173—179.
16. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
17. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.