выбором которой удовлетворяется условие обтекания тела: $v_2 = 0$, $\zeta = 0$. Выражение для S_2 имеет вид

$$S_2(\zeta) = S_{2s} \exp\left(\int\limits_{\xi_0}^{\zeta} \frac{u_1}{\xi u_1 - v_1} d\zeta\right) \tag{2.6}$$

где $S_{2s} = \mathrm{const}$; u_1, v_1 — параметры конического течения около конуса с углом полураствора θ_0; $\xi = \xi_0$ — уравнение конуса, касающегося ударной волны в вершине тела. Вычисления показали, что $S_{2s} \neq 0$; в частности, в случае совершенного газа

$$S_{2s} = -{}^3/_2\, \varkappa_0 \operatorname{ctg} \theta_0\, c_p \text{ при } M_\infty \to \infty,\ \gamma \to 1$$

где c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, γ — адиабатический индекс. Так как $dv_1/d\zeta \to -u_1$ при $\xi \to 0$ (см. (2.4)), то из формулы (2.6) следует, что

$$S_2(\zeta) = \lim_{s\to 0} \frac{\partial S}{\partial s} \sim \zeta^{1/2} \sim \xi, \quad \xi \to 0$$

Дифференцируя это соотношение по ξ, получим

$$\left(\frac{dS_2}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial\xi\partial s}\right)_{\xi=s=0} \neq 0$$

что и требовалось показать.

Из уравнения (1.2), записанного при $\xi \to 0$, следует, что член $T(1 + \varkappa\zeta s)\, \partial S/\partial\zeta$, имеющий порядок $\zeta^{-1/2}$, может быть компенсирован только членом с производной $\partial u/\partial\zeta$. Это означает, что $\partial u/\partial\zeta \sim \xi^{-1/2}$ при $\xi \to 0$.

Таким образом, получен следующий результат.

Если существует единственное решение задачи осесимметричного сверхзвукового обтекания заостренного тела вращения, обладающее непрерывными вторыми производными по s и $\zeta = n/s$ в некоторой области около вершины тела, то в случае $\varkappa_0 \neq 0$ поверхность обтекаемого тела является особой, в ее окрестности $\partial u/\partial\zeta$, $\partial S/\partial\zeta \sim \zeta^{-1/2}$ или $\partial u/\partial n$, $\partial S/\partial n \sim n^{-1/2}$ при $n \to 0$ и фиксированном значении s.

Поступила 16 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970, стр. 11, 12.

УДК 539.374

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ, НАКЛАДЫВАЕМОМ УСЛОВИЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ РАССЕИВАНИЯ НА КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О. Д. Григорьев

(Новосибирск)

Рассматривается влияние требования о положительности диссипативной функции на краевые условия для скоростей пластического тела вдоль границы с жесткой областью. Установлено ограничение, которое позволяет выделять заведомо некорректные решения без построения поля скоростей. Показана некорректность решения задачи о давлении плоского штампа на срез выпуклой заготовки.

Пусть имеет место плоская деформация идеального жесткопластического тела. Рассмотрим линию разрыва скоростей, отделяющую жесткую область от пластической.

Для удобства будем считать жесткую область неподвижной. Как известно [1-5], линия разрыва скоростей представляет собою предельное положение тонкого переходного слоя, по толщине которого скорость меняется хотя и быстро, но непрерывно. При этом, используя условие положительности диссипативной функции

$$D = \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{1}$$

которое для указанного тонкого слоя принимает вид

$$\tau_{\alpha\beta} [v] > 0 \tag{2}$$

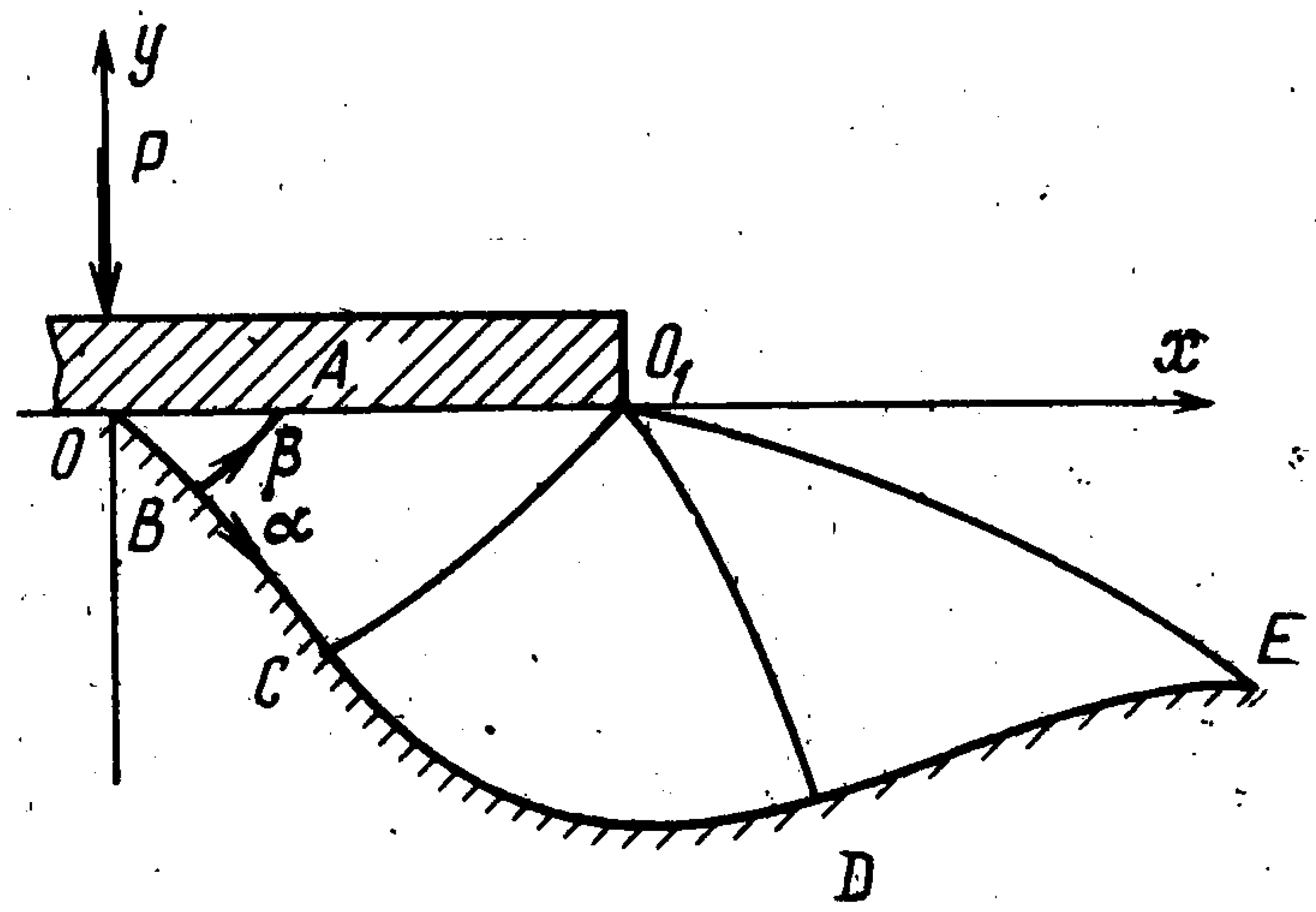
получим, что вдоль линии разрыва скоростей

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim [v], \quad \tau_{\alpha\beta} = \pm k, \; k = \mathrm{const} \tag{3}$$

причем знак $\tau_{\alpha\beta}$ совпадает со знаком $[v]$, $\sim$ обозначает пропорциональность величин [2].

Здесь $\sigma_\alpha, \ldots, \varepsilon_\alpha$ — компоненты тензоров напряжения и скоростей деформации, $[v]$ — скачок скорости вдоль границы с неподвижной областью, $[v] > 0$, если v возрастает с ростом соответствующей координаты. Например, в задаче о вдавливании штампа вдоль границы $OBCDE$ (фигура) $[v] > 0$. Поэтому здесь согласно (2), (3) имеем $\varepsilon_{\alpha\beta} > 0$, $\tau_{\alpha\beta} = k > 0$.

С другой стороны, при решении краевых задач для скоростей характер быстрого изменения скорости в указанном тонком слое, т. е. знак $\varepsilon_{\alpha\beta}$ на границе, не учитывается. Поэтому поле скоростей может не удовлетворять условию положительности рассеивания как угодно близко от границы. Известным примером может служить задача о выпуклом штампе [3], где вблизи свободной поверхности (в области задачи Коши) диссипативная функция всюду отрицательна [6, 7], хотя вдоль границы $[v] > 0$ и (2) выполняется. Это противоречие объясняется тем, что при постановке краевой задачи для скоростей условие (2) вдоль границы не учитывается. Ниже, во-первых, устанавливается добавочное ограничение для скоростей вдоль границы с жесткой областью, во-вторых, показано, что с помощью последнего можно выделять заведомо некорректные решения.



Пусть граница с жесткой областью является α-линий, где $\beta = 0$. Будем считать жесткую область неподвижной. Тогда вдоль границы для компонентов скорости вдоль линий скольжения имеем

$$v_\alpha = v_0 = \mathrm{const}, \quad v_\beta = 0, \quad \beta = 0 \tag{4}$$

Рассмотрим в пластической области элемент, ограниченный отрезками линий скольжения ds_α, ds_β. Выберем направления осей α, β так, чтобы $\tau_{\alpha\beta} > 0$. Тогда, учитывая, что $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = 0$, запишем (1) при пластической деформации элемента в виде

$$D = \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} > 0 \tag{5}$$

или, так как здесь $\tau_{\alpha\beta} > 0$, то (1) равносильно неравенству

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + \frac{v_\alpha}{R_\alpha} + \frac{v_\beta}{R_\beta} > 0 \tag{6}$$

где $R_\alpha, \ldots$ — радиусы кривизны линий скольжения, $\partial / \partial s_\alpha, \ldots$ — производные вдоль дуг последних. Формула (6) является исходной для вывода критерия положительности диссипации Грина [8].

Применим (6) для элемента ds_α, ds_β, бесконечно близкого к границе $\beta = 0$. Тогда, согласно (4), (6), учитывая непрерывность скоростей и их производных, при $\beta = +0$ получим

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{v_0}{R_\alpha} > 0 \tag{7}$$

(случай движения среды как твердого тела не рассматривается).

При известной сетке линий скольжения, например из решения уравнений для напряжений, в условии (7) будет неизвестен только первый член. Выразим последний через краевые условия. Рассмотрим случай, когда оба семейства линий скольжения криволинейны. Введем координаты α и β для линий скольжения следующим образом [4]:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(\varphi \mp \frac{p}{2k}\right) \pm \frac{p_0}{2k}\right] \tag{8}$$

$$p = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \varphi = \alpha + \beta \tag{9}$$

Здесь — p_0 — значение среднего напряжения в начальной точке O ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). φ — угол между касательными к α-линиям в рассматриваемой точке и точке O. При этом $\varphi > 0$, если по отношению к касательной в начальной точке касательная поворачивается против часовой стрелки.

Заметим, что $d\alpha = d\varphi$, $d\beta = d\varphi$. Поэтому элементы дуг линий скольжения связаны с радиусами кривизны соотношениями

$$ds_\alpha = R_\alpha d\varphi = R_\alpha d\alpha, \quad ds_\beta = -R_\beta d\varphi = -R_\beta d_\beta \tag{10}$$

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} \tag{11}$$

За начальные характеристики α и β примем, как и выше, границу с жесткой областью ($\beta = 0$), вдоль которой изменяется только координата α, и ортогональную к границе линию скольжения семейства β, проходящую через начальную точку O, выбор которой определяется конкретными граничными условиями. При движении вдоль границы с жесткой областью ($\beta = 0$) координата α согласно (9) равна углу поворота касательной к границе по отношению к начальной точке, причем $\alpha > 0$, если касательная поворачивается против часовой стрелки.

В принятой системе координат для определения компоненты скорости v_α имеем телеграфное уравнение [4]

$$\partial^2 v_\alpha / \partial\alpha\partial\beta + v_\alpha = 0$$

Интегрируя это уравнение по α вдоль границы, т. е. при $\beta = +0$, где согласно (4) $v_\alpha = v_0$, получим

$$\left.\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta}\right|_{\beta=0} + v_0\alpha = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta}\right)^\circ, \quad v_0 = \text{const} \tag{12}$$

Здесь и ниже значения величин при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ отмечаются верхним нулевым индексом.

Так как для принятой системы координат согласно (11) элемент дуги линии скольжения семейства β равен $ds_\beta = -R_\beta d\beta$, то из (12) найдем при $\beta = +0$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} = -\frac{1}{R_\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} = \frac{1}{R_\beta}\left[v_0\alpha - \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta}\right)^\circ\right] = \frac{1}{R_\beta}\left[v_0\alpha + \left(R_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta}\right)^\circ\right] \tag{13}$$

Подставляя (13) в (7), получим ограничение, которое налагает требование положительности диссипативной функции (1) на краевые условия вдоль границы с жесткой неподвижной областью

$$\frac{1}{R_\beta}\left[v_0\alpha + \left(R_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta}\right)^\circ\right] + \frac{v_0}{R_\alpha} > 1, \quad \beta = 0 \tag{14}$$

Заметим, что вдоль границы R_β — непрерывная функция, а радиус кривизны границы может иметь разрывы.

Заметим, что если семейство β-линий скольжения, ортогональных к границе, состоит из прямых, т. е. $1 / R_\beta = 0$, то (14) принимает вид

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta}\right)^\circ + \frac{v_0}{R_\alpha} > 0, \quad \beta = 0$$

Этот результат получается также непосредственно из уравнений Гейрингер и граничных условий.

Пример. Рассмотрим задачу о давлении плоского гладкого штампа на срез выпуклой заготовки с криволинейными симметричными свободными контурами [3]. Схема линий скольжения при двухстороннем выпирании изображена на фигуре. За начальную точку возьмем середину подошвы штампа, т. е. точку O ($\alpha = 0$, $\beta = 0$).

Граничные условия при единичной скорости вдавливания штампа будут: вдоль границы $OBCDE$ с жесткой областью

(15) $$v_\alpha = \sqrt{2} = v_0, \quad v_\beta = 0, \quad \beta = 0$$

под штампом

(16) $$v_\alpha - v_\beta = \sqrt{2} = v_0$$

Определим $\partial v_\alpha / \partial s_\beta$ при $\alpha = +0$, $\beta = +0$. Для этого рассмотрим элементарный прямоугольный треугольник OBA (фигура), где $OB = ds_\alpha$, $BA = ds_\beta$. Воспользуемся уравнениями Гейрингер [1]

(17) $$\begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\varphi &= 0 \quad (\beta = \text{const}) \\ dv_\beta + v_\alpha d\varphi &= 0 \quad (\alpha = \text{const}) \end{aligned}$$

В точке B ($\beta = 0$) согласно (15) $v_\alpha = \sqrt{2} = v_0$. Поэтому вдоль $BA = ds_\beta$ согласно второму уравнению (17)

(18) $$dv_\beta = - v_0 d\varphi$$

где $d\varphi$ — угол поворота касательной к α-линии вдоль BA. Далее, согласно (16) и (18) в точке A имеем

$$v_\alpha = v_0 + v_\beta = v_0 - v_0 d\varphi$$

Отсюда, учитывая, что $v_\alpha = v_0$ в точке B, получим формулу для dv_α вдоль $BA = ds_\beta$, $dv_\alpha = v_0 - v_0 d\varphi - v_0 = - v_0 d\varphi$.

Следовательно, учитывая (11), найдем

(19) $$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta}\right)^\circ = - v_0 \frac{d\varphi}{ds_\beta} = \left(\frac{v_0}{R_\beta}\right)^\circ$$

После подстановки (19) в (14) получим ограничение, накладываемое в этой задаче требованием положительности диссипативной функции (1) на краевые условия вдоль границы с жесткой областью

(20) $$\alpha + 1/R_\beta + 1/R_\alpha > 0, \quad \beta = 0$$

Как показано в [3], в рассматриваемой задаче $R_\alpha < 0$, $R_\beta < 0$ в области Коши (O_1DE на фигуре). При этом для области Коши угол поворота касательной к линии $\beta = 0$ (границе) направлен по отношению к начальной точке O против часовой стрелки, т. е. $\alpha > 0$. Поэтому условие (20) здесь не выполняется, и соответствующее решение не может быть полным.

Замечание. Ранее было указано, что формула (6) является исходной для критерия положительности диссипации Грина [8, 9]

(21) $$U / R_\alpha - v / R_\beta > 0$$

где U, V — радиусы кривизны отображений линий α, β на план скоростей, при этом [9]

$$U = \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} + v_\alpha, \quad V = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} - v_\beta \tag{22}$$

Хотя критерий Грина также использует радиусы кривизны линий скольжения, для получения из (21) ограничения (14) необходимо подставить в (21) формулы (4) и (22). Это равносильно возврату к исходному для (21) уравнению (6). При этом все следующие после (7) выкладки сохраняются.

Поступила 11 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
4. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М., «Машиностроение», 1975.
6. *Lee E. H.* The theoretical analysis of metal forming problems in plane strain. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1953, № 1.)
7. *Друянов Б. А.* Оценки предельного давления в некоторых задачах о вдавливании пуансонов. Машиностроение, 1972, № 1.
8. *Green A. P.* The plastic yielding of notched bars due to bending. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, vol. 6, No. 2.
9. *Друянов Б. А.* О прокатке полосы при условиях максимального трения. В сб. Пластическое течение металлов. М., «Наука», 1968.

ОБЪЯВЛЕНИЕ

Научный Совет по проблемам прочности и пластичности АН СССР и Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики Ростовского госуниверситета проводят в сентябре 1977 г. в Ростове-на-Дону Всесоюзную научную конференцию «Смешанные задачи механики деформируемого тела».

На конференции будут обсуждены следующие вопросы:

1. Статические и динамические контактные задачи теории упругости и термоупругости.
2. Контактные задачи вязкоупругости и пластичности.
3. Смешанные задачи теории концентрации напряжений (трещины, включения, накладки).
4. Смешанные задачи взаимодействия тонкостенных упругих элементов с деформируемыми телами.

Адрес оргкомитета:
344061, Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 192/2, НИИмеханики и прикладной математики РГУ, Чебакову М. И.
Телефоны для справок в Ростове-на-Дону — 2-37-69, 2-48-71.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 24/XI-1976 г. Т-03740 Подписано к печати 26/I-1977 г. Тираж 2850 экз.
Зак. 1403 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 17,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10