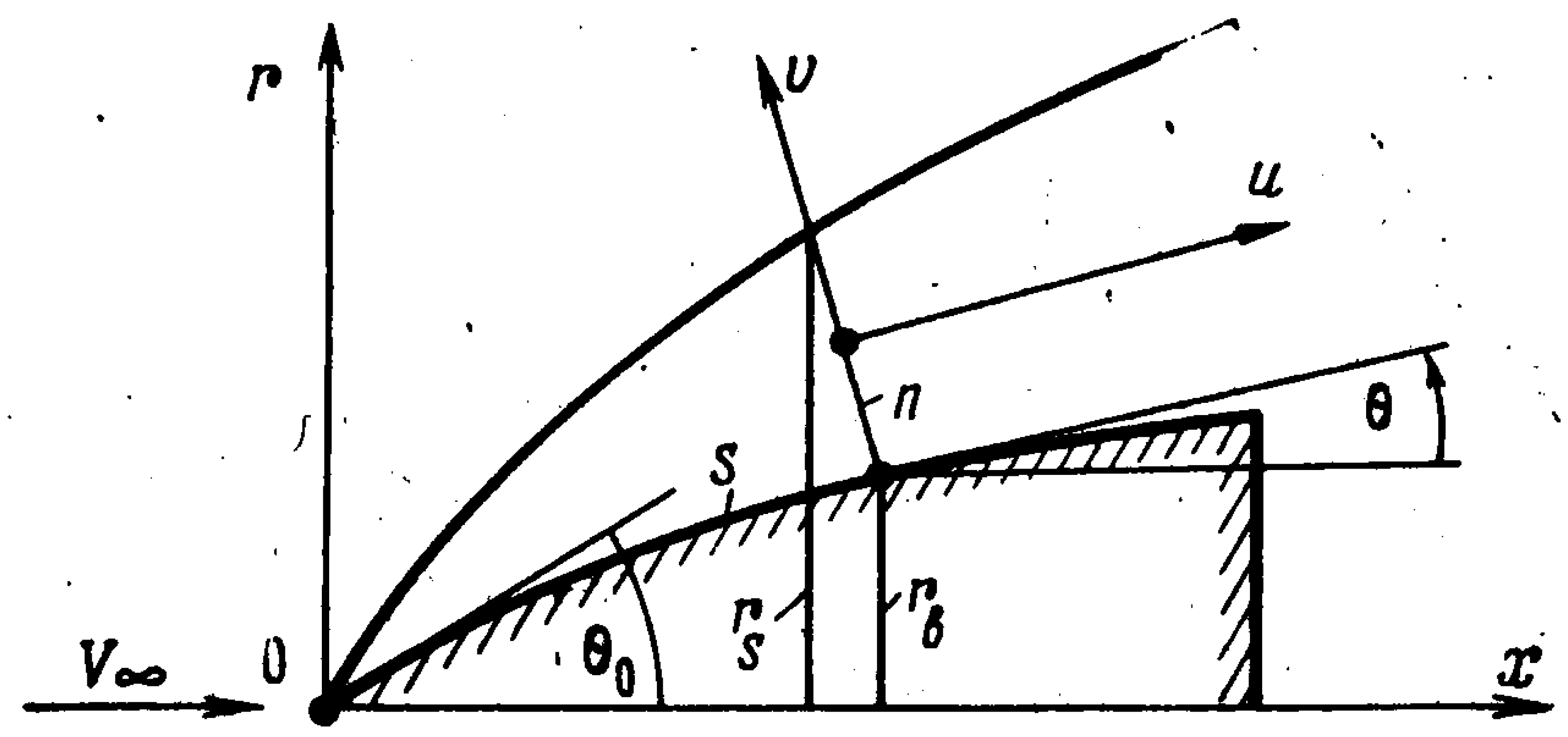
УДК 533.6.011

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАОСТРЕННОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Б. М. Булах

(Ленинград)

Рассматривается осесимметричное стационарное обтекание сверхзвуковым потоком невязкого газа заостренного тела вращения, кривизна меридиональной кривой которой отлична от нуля в вершине тела. Показано, что производные по $\zeta = n / s$ (n — расстояние от вершины тела вдоль меридиональной кривой, s — расстояние по нормали к поверхности тела) от удельной энтропии $S = S(s, \zeta)$ и касательной состав-



ляющей скорости частиц газа $u = u(s, \zeta)$ вблизи поверхности тела имеют порядок $\zeta^{-1/2}$, т. е. поверхность тела является особой.

1. Рассмотрим осесимметричное стационарное обтекание заостренного тела вращения сверхзвуковым потоком невязкого газа, обладающего числом Маха $M_\infty > 1$, скоростью V_∞ и т. д. (фигура). Введем цилиндрические координаты x и r с осью Ox, совпадающей с осью симметрии тела, и координаты s и n, используемые в теории пограничного слоя. Поверхность обтекаемого тела зададим уравнением $r = r_b(s)$, $dr_b / ds = \sin\theta$, где θ — угол между касательной к меридиональной кривой и осью Ox; причем $d\theta / ds = -\varkappa$, где $\varkappa$ — кривизна меридиональной кривой. Уравнения Эйлера, неразрывности, энергии для стационарных потоков, возникающих при пересечении однородным потоком ударных волн, могут быть преобразованы при помощи интеграла Бернулли так, что искомыми функциями будут скорость частиц газа $\mathbf{V}$ и удельная энтропия S. Для конических течений газа аналогичное преобразование сделано в [1].

Для осесимметричной задачи, где в качестве независимых переменных взяты s, $\zeta = n / s$, преобразованные уравнения имеют вид

$$\left\{(u^2-a^2)\left(s\frac{\partial u}{\partial s}-\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)+(v^2-a^2)(1+\varkappa\zeta s)\frac{\partial v}{\partial \zeta}+ \right. \tag{1.1}$$
$$\left. +uv\left[s\frac{\partial v}{\partial s}-\zeta\frac{\partial v}{\partial \zeta}+(1+\varkappa\zeta s)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right]\right\}\frac{r_b+\zeta s\cos\theta}{s}-$$
$$-a^2\left[(1+\varkappa\zeta s)(u\sin\theta+v\cos\theta)+(r_b+\zeta s\cos\theta)\varkappa v\right]=0$$

$$u\left[s\frac{\partial v}{\partial s}-\zeta\frac{\partial v}{\partial \zeta}-(1+\varkappa\zeta s)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right]-\varkappa u^2 s-T(1+\varkappa\zeta s)\frac{\partial S}{\partial \zeta}=0 \tag{1.2}$$

$$[v(1+\varkappa\zeta s)-\zeta u]\frac{\partial S}{\partial \zeta}+us\frac{\partial S}{\partial s}=0 \tag{1.3}$$

Здесь u, v — компоненты $\mathbf{V}$ в направлении увеличения s и n соответственно, абсолютная температура $T = T(S, i)$ и скорость звука $a = a(S, i)$ есть заданные функции своих аргументов, где $i = i_\infty + {}^1/_2 (V^2 - V_\infty^2)$ — удельная энтальпия. Условие безотрывного обтекания поверхности тела имеет вид $v = 0$, $\xi = 0$. На головной ударной волне, задаваемой уравнением $r_b = r_b(s)$ (см. фигуру), должны выполняться условия совместности, которые здесь не выписываются. Поток, возникающий при обтекании тела, предполагается сверхзвуковым, поэтому вблизи вершины тела осуществляется течение, близкое к коническому, т. е. при $s \to 0$

$$U(s, \zeta) \to u_1(\zeta), \quad v(s, \zeta) \to v_1(\zeta), \quad S(s, \zeta) \to S_1 = \mathrm{const}$$

где u_1, v_1, S_1 — параметры конического течения около конуса с углом полураствора θ_0 (см. фигуру).

2. Исследуем уравнение (1.3). Введем вместо ζ переменную $\xi = \zeta^{1/2}$; тогда (1.3) можно записать в виде

$$\frac{v(1 + \varkappa\zeta s) - \zeta u}{2\zeta} \frac{\partial S}{\partial \xi} + us \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{S - S_b}{\xi}\right) = 0 \tag{2.1}$$

где $S_b = \mathrm{const}$ — значение энтропии на поверхности тела. Перейдем в (2.1) к пределу, устремив ξ к нулю, в результате получим

$$\frac{1}{2u}\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} - u\right)\frac{\partial S}{\partial \xi} + s\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь все функции взяты при $\xi = 0$, т. е. на поверхности тела. Решая уравнение (2.2) относительно $(\partial S / \partial \xi)_{\xi=0}$, получим ($c$ и s_0 — постоянные)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = c \cdot \exp\left[\int_{s_0}^{s} \frac{1}{2u}\left(u - \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)\frac{ds}{s}\right] \tag{2.3}$$

Найдем теперь $\partial v / \partial \zeta$ при $\xi = 0$ из уравнения (1.1). Переходя к пределу при $\zeta \to 0$, получим из (1.1) соотношение

$$\frac{r_b}{s}\left[(u^2 - a^2)s\frac{\partial u}{\partial s} - a^2\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right] - a^2 \sin\theta u = 0$$

из которого следует

$$\partial v / \partial \zeta \to -u \quad \text{при } s \to 0 \quad (\xi = \zeta = 0) \tag{2.4}$$

Отсюда и из формулы (2.3) получаем, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} \sim s \quad \text{при } r \to 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} \equiv 0$$

Если удастся показать, что $(\partial^2 S / \partial s \partial \xi)_{s=\xi=0} \neq 0$, то это будет означать, что постоянная c в формуле (2.3) не равна нулю, и вблизи поверхности тела имеется слой, где

$$S - S_b \sim \xi \sim \zeta^{1/2} \sim (n / s)^{1/2} \tag{2.5}$$

Чтобы показать, что $(\partial^2 S / \partial s \partial \xi)_{s=\xi=0} \neq 0$, была составлена система уравнений для функций

$$u_2(\zeta) = \lim_{s \to 0} \frac{\partial u}{\partial s}, \quad v_2(\zeta) = \lim_{s \to 0} \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$S_2(\zeta) = \lim_{s \to 0} \frac{\partial S}{\partial s}$$

(Нахождение u_2, v_2, S_2 представляет и самостоятельный интерес, так как эти функции отражают влияние величины $\varkappa_0 = \varkappa|_{s=0}$ на поле течения.) Для определения u_2, v_2, S_2 требуется решить линейную краевую задачу, в которой должны быть удовлетворены условие обтекания тела и условия на головной ударной волне. «Свободным параметром» задачи является кривизна меридиональной кривой головной ударной волны при $s = 0$, выбором которой удовлетворяется условие обтекания тела: $v_2 = 0$, $\zeta = 0$. Выражение для S_2 имеет вид

$$S_2(\zeta) = S_{2s} \exp\left(\int_{\xi_0}^{\zeta} \frac{u_1}{\xi u_1 - v_1} d\zeta\right) \tag{2.6}$$

где $S_{2s} = \mathrm{const}$; u_1, v_1 — параметры конического течения около конуса с углом полураствора θ_0; $\xi = \xi_0$ — уравнение конуса, касающегося ударной волны в вершине тела. Вычисления показали, что $S_{2s} \neq 0$; в частности, в случае совершенного газа

$$S_{2s} = -{}^3/_2\, \varkappa_0 \operatorname{ctg} \theta_0\, c_p \text{ при } M_\infty \to \infty,\ \gamma \to 1$$

где c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, γ — адиабатический индекс. Так как $dv_1/d\zeta \to -u_1$ при $\xi \to 0$ (см. (2.4)), то из формулы (2.6) следует, что

$$S_2(\zeta) = \lim_{s\to 0} \frac{\partial S}{\partial s} \sim \zeta^{1/2} \sim \xi, \quad \xi \to 0$$

Дифференцируя это соотношение по ξ, получим

$$\left(\frac{dS_2}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial\xi\partial s}\right)_{\xi=s=0} \neq 0$$

что и требовалось показать.

Из уравнения (1.2), записанного при $\xi \to 0$, следует, что член $T(1 + \varkappa\zeta s)\,\partial S/\partial\zeta$, имеющий порядок $\zeta^{-1/2}$, может быть компенсирован только членом с производной $\partial u/\partial\zeta$. Это означает, что $\partial u/\partial\zeta \sim \xi^{-1/2}$ при $\xi \to 0$.

Таким образом, получен следующий результат.

Если существует единственное решение задачи осесимметричного сверхзвукового обтекания заостренного тела вращения, обладающее непрерывными вторыми производными по s и $\zeta = n/s$ в некоторой области около вершины тела, то в случае $\varkappa_0 \neq 0$ поверхность обтекаемого тела является особой, в ее окрестности $\partial u/\partial\zeta$, $\partial S/\partial\zeta \sim \zeta^{-1/2}$ или $\partial u/\partial n$, $\partial S/\partial n \sim n^{-1/2}$ при $n \to 0$ и фиксированном значении s.

Поступила 16 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970, стр. 11, 12.

УДК 539.374

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ, НАКЛАДЫВАЕМОМ УСЛОВИЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ РАССЕИВАНИЯ НА КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О. Д. Григорьев

(Новосибирск)

Рассматривается влияние требования о положительности диссипативной функции на краевые условия для скоростей пластического тела вдоль границы с жесткой областью. Установлено ограничение, которое позволяет выделять заведомо некорректные решения без построения поля скоростей. Показана некорректность решения задачи о давлении плоского штампа на срез выпуклой заготовки.

Пусть имеет место плоская деформация идеального жесткопластического тела. Рассмотрим линию разрыва скоростей, отделяющую жесткую область от пластической.