УДК 531.381

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Ю. В. Баркин, В. Г. Демин

(Москва)

В работе [1] методом малого параметра Пуанкаре было установлено существование периодических движений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском поле сил. Предполагалось, что тело мало отличается от динамически симметричного, а его центр тяжести близок к закрепленной точке. В качестве независимых переменных выбирались канонические элементы Андуайе. За невозмущенное движение принималось свободное вращательное движение осесимметричного твердого тела [2].

В данной работе исследуется существование периодических движений твердого тела, закрепленного в центре масс, в центральном ньютоновском силовом поле. Порождающее решение отвечает свободному вращательному движению по Эйлеру—Пуансо, а за независимые переменные принимаются канонические переменные действие — угол. Предполагается, что эллипсоид инерции тела близок к шару.

1. Для описания движения твердого тела вокруг закрепленного центра масс в ньютоновском поле тяготения воспользуемся каноническими переменными действие— угол [3] L, G, H, l, g, h. Гамильтониан задачи $F = T - U$ в этих переменных определяется формулами

$$T = \frac{1}{2D}\overline{L}^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\overline{G}^2, \quad \overline{L} = L\left[1 + \frac{1}{16}(b-1)(b+3)e^2 + \ldots\right] \tag{1.1}$$

$$\overline{G} = G, \quad b = \frac{G^2}{L^2}, \quad \frac{1}{D} = \frac{1}{C} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right), \quad e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)D$$

$$U = 3P/2g_0R\,(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)$$

Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, P — вес тела, g_0 — ускорение свободного падения, γ, γ', γ'' — направляющие косинусы радиус-вектора R центра масс, исходящего из притягивающего центра, в системе координат, неизменно связанной с телом.

Для дальнейшего необходимо выразить U через переменные действие — угол. Для этого воспользуемся формулами невозмущенного эйлеровского движения [3]. После преобразований получим для U выражение в виде ряда

$$U = (B - A)\frac{3P}{2g_0R}\sum_{k_1, k_2} U_{k_1k_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\cos(k_1l + k_2g) \tag{1.2}$$

$$(k_1 = 0, 2, 4, \ldots; \quad k_2 = -2, -1, 0, 1, 2)$$

$$U_{0,0} = {}^1\!/_4 \sin^2\rho\,(2\delta-1) + {}^1\!/_2\,(1-{}^3\!/_2\sin^2\rho)\,[(2\delta-1)\cos^2\theta d_{00}^{\circ} + \sin^2\theta d_{00}^{2}]$$

$$U_{2m,0} = {}^1\!/_2\,(1 - {}^3\!/_2\sin^2\rho)\,[(2\delta - 1)\cos^2\theta d_{0,m}^{\circ} + \sin^2\theta d_{0,m}^{2}]$$

$$U_{2m,\pm1} = {}^1\!/_4 \sin 2\rho\,(1-2\delta)\sin 2\theta d_{\pm1,m}^{\circ} \pm {}^1\!/_4 \sin^2\rho \sin\theta d_{\pm1,m}^{2}$$

$$U_{2m,\pm2} = -{}^1\!/_4\sin^2\rho\,(1-2\delta)\sin^2\theta d_{\pm2,m}^{\circ} + {}^1\!/_8\sin^2\rho\,(1 \pm \cos\theta)^2 d_{\pm2,m}^{2}$$

$$\cos\rho = H / G, \quad \cos\theta = L / G, \quad \delta = (C - A)/(B - A)$$

Величины $d_{n,m}^k$ представляются известными рядами, расположенными по возрастающим степеням e, коэффициенты которых функции θ.

Таким образом задача описывается каноническими уравнениями

$$dL / dt = -\partial F / \partial l, \quad dl / dt = \partial F / \partial L \tag{1.3}$$

$$dG / dt = -\partial F / \partial g, \quad dg / dt = \partial F / \partial G$$

$$dH / dt = -\partial F / \partial h, \quad dh / dt = \partial F / \partial H$$

Эта система допускает два первых интеграла

(1.4) $F = c_1, \quad H = c_2$

Предположим теперь, что эллипсоид инерции тела близок к шару. Тогда, выбирая в качестве малого параметра величину $\nu = 3P\ (B - A)\ /\ (2g_0R)$, преобразуем гамильтониан F к виду, необходимому для применения метода малого параметра Пуанкаре

(1.5) $$F = F_0(L, G) + \nu F_1\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}, l, g\right), \quad F_0 = T, \quad \nu F_1 = -U$$

2. Введем новые обозначения для переменных действие — угол

$$x_1 = L, \quad x_2 = G, \quad x_3 = H, \quad y_1 = l, \quad y_2 = g, \ y_3 = h$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде

(2.1) $$dx_i\ /\ dt = -\partial F\ /\ \partial y_i, \quad dy_i\ /\ dt = \partial F\ /\ \partial x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

где вместо (1.5) будем иметь

(2.2) $$F = F_0(x_1, x_2) + \nu \sum_{k_1, k_2} U_{k_1k_2}(x_1, x_2, x_3) \cos(k_1y_1 + k_2y_2)$$

При $\nu=0$ из (2.1) получаем порождающую систему уравнений

$$dx_i/dt = 0, \quad dy_i/dt = \partial F_0/dx_i = n_i^{(0)}$$

общее решение которой имеет вид

(2.3) $$x_i^{(0)} = a_i, \quad y_i^{(0)} = n_i^{(0)}t + \omega_i \quad (i = 1,2,3)$$

где a_i, ω_i — произвольные постоянные интегрирования и (с учетом (1.2))

(2.4) $$n_1^{(0)} = \frac{\partial F_0}{\partial x_1}\bigg|_{x_i=a_i} = \frac{a_1}{D}\left[1 - \frac{e^2}{8}(b_0^2 - 3) + \ldots\right]$$

$$n_2^{(0)} = \frac{\partial F_0}{\partial x_2}\bigg|_{x_i=a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)a_2 + \frac{a_1}{4D}\,[b_0^{1/2}(b_0+1)e^2 + \ldots]$$

$$n_3^{(0)} = \frac{\partial F_0}{\partial x_3}\bigg|_{x_i=a_i} = 0, \quad b_0 = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

Это решение будет периодическим с периодом T, если при целых числах $\bar{k}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ выполняются условия

$$x_i(T) - x_i(0) = 0, \quad y_i(T) - y_i(0) = n_i^{(0)}T = 2\bar{k}_i\pi$$

Рассмотрим решение уравнений (2.1) с начальными условиями $x_i = a_i + \beta_i$, $y_i = \omega_i + \gamma_i$, которое представим в форме

(2.5) $$x_i = a_i + \beta_i + \xi_i(t), \quad y_i = n_i^{(0)}t + \omega_i + \gamma_i + \eta_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

По формулам (2.5) перейдем к новым переменным ξ_i, η_i. Уравнения движения запишутся в виде

(2.6) $$d\xi_i\ /\ dt = -\partial K\ /\ \partial\eta_i, \quad d\eta_i\ /\ dt = \partial K\ /\ \partial\xi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$K = \xi_1 n_1^{(0)} + \xi_2 n_2^{(0)} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial F}{\partial a_i}\xi_i + \frac{\partial F}{\partial \omega_i}\eta_i\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\xi_i\xi_j\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} + \xi_i\eta_j\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial \omega_j} + \eta_i\eta_j\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_i \partial \omega_j}\right] + O(\xi^2)$$

Необходимые и достаточные условия для существования периодических решений системы (2.6) будут

(2.7) $$\xi_i(T) = 0, \quad \eta_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Разлагая $F(a_i + \beta_i \mid n_i^{(0)}t + \omega_i + \gamma_i)$ в степенной ряд по β, γ, ν, из уравнений (2.6) получим явный вид условий (2.7)

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & -\frac{\xi_k(T,\beta,\gamma,\nu)}{\nu T} = \frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_k} + \sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\omega_k \partial a_j}\beta_j + \right.\\
& \left. + \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\omega_k\partial\omega_j}\gamma_j\right\} + \ldots = 0 \quad (k = 1, 2)\\
& \xi_3(T, \beta, \gamma, \nu) = 0\\
& \frac{\eta_1(T,\beta,\gamma,\nu)}{T} = \beta_1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_2} + \nu\left\{\frac{\partial [F_1]}{\partial a_1} - \right.\\
& - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2}\int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1}\xi d\xi dt + \beta_1\left(\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_1^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2}\int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial a_1 \partial \omega_1} t dt\right) + \\
& \left. + \beta_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_1 \partial a_2} + \beta_3 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_1 \partial a_3} + \gamma_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_1 \partial \omega_1} + \gamma_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_1 \partial \omega_2}\right\} + \ldots = 0\\
& \frac{\eta_2(T,\beta,\gamma,\nu)}{T} = \beta_1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2 \partial a_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2^2} + \nu\left\{\frac{\partial [F_1]}{\partial a_2} - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2^2}\int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \times \right.\\
& \times \xi d\xi dt + \beta_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2 \partial a_1} + \beta_2\left(\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_2^2}\int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial a_2 \partial \omega_1} t dt\right) + \\
& \left. + \beta_3 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2 \partial a_3} + \gamma_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2 \partial \omega_1} + \gamma_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_2 \partial \omega_2}\right\} + \ldots = 0\\
& \frac{\eta_3(T,\beta,\gamma,\nu)}{\nu T} = \frac{\partial [F_1]}{\partial a_3} + \beta_1\left(\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_3 \partial a_1} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1^2}\int_0^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial a_3 \partial \omega_1} t dt\right) + \\
& + \beta_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_3 \partial a_2} + \beta_3 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_3^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_3 \partial \omega_1} + \gamma_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial a_3 \partial \omega_2} + \ldots = 0\\
& [F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(a_i \mid n_i^{(0)}t + \omega_i)\, dt
\end{aligned}
$$

Уравнения движения (2.1) допускают два первых интеграла (1.4), якобиан которых по переменным x_1, x_3 в порождающем решении отличен от нуля

$$
(2.9)\qquad \left.\frac{\partial(c_1, c_2)}{\partial(x_1, x_3)}\right|_{x_i = a_i} = n_1^{(0)} \neq 0
$$

Следовательно, первое и третье условия из (2.8) должны рассматриваться как следствия из остальных четырех. Поэтому полагаем $\xi_1 = \xi_3 = 0$ и далее рассматриваем лишь четыре уравнения

$$
(2.10)\qquad \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0
$$

Таким образом, для шести неизвестных β, γ имеем четыре уравнения. Поэтому две неизвестные (скажем γ_1 и γ_3) можно взять произвольно. Пусть $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ и выберем начало отсчета в начальный момент времени так, чтобы $\omega_1 = \omega_3 = 0$. Тогда уравнения (2.10) будут давать β_1, β_2, β_3, γ_2 как голоморфные функции от ν, обращающиеся в нуль вместе с ν, если будут выполнены условия [4]

$$
(2.11)\qquad \frac{\partial [F_1]}{\partial \omega_2} = 0, \quad \frac{\partial [F_1]}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial(\xi_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2)} \neq 0
$$

Уравнения $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$ при $\nu = 0$ зависят лишь от β_1 и β_2. Следовательно, якобиан из (2.11) является произведением якобиана η_1 и η_2 по β_1 и β_2, который представляет собой гессиан F_0 по x_1, x_2 в порождающем решении, и якобиана ξ_2 и η_2 по γ_2 и β_2, который равен гессиану $[F_1]$ по a_3 и ω_2.

Таким образом третье условие (2.11) эквивалентно двум другим

(2.12) $$H(F_0)\Big|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} \neq 0, \quad H([F_1])\Big|_{\substack{a_3\\ \omega_2}} \neq 0$$

3. Рассмотрим условия существования периодических решений, возвращаясь к переменным действие — угол.

Первое из условий (2.12) выполняется всегда, за исключением случая $1 / D = 0$, поскольку с точностью до e^2

$$H(F_0) = \frac{1}{2D}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \frac{e^2}{8D^2} L_0 b_0^{-1/2}(3b_0 + 1) + \ldots \neq 0$$

Прежде чем исследовать остальные условия, получим явное выражение для $[F_1]$:

а) в случае соизмеримости $Nn_1^{(0)} = n_2^{(0)}$

$$[F_1] = U_{0,0}\left(\frac{L_0}{G_0}, \frac{H_0}{G_0}\right) + U_{2N,-2}\left(\frac{L_0}{G_0}, \frac{H_0}{G_0}\right)\cos 2(Nl_0 - g_0)$$

б) в случае соизмеримости $2Nh_1^{(0)} = n_2^{(0)}$

$$[F_1] = U_{0,0}\left(\frac{L_0}{G_0}, \frac{H_0}{G_0}\right) + U_{2N,-1}\cos(2Nl_0 - g_0) + U_{4N,-2}\cos 2(2Nl_0 - g_0)$$

Здесь N — положительное целое число, а коэффициенты $U_{0,0}$, $U_{2N,-2}$, $U_{4N,-2}$, $U_{2N,-1}$ вычисляются по (1.2) при порождающих значениях переменных L_0, G_0, H_0.

Подставляя выражение для $[F_1]$ в первое условие (2.11), в обоих случаях для угловых переменных l, g, h в результате получим следующие порождающие значения: $l_0 = 0$; $g_0 = 0$, $\pi / 2$, π, $^3/_2\pi$; $h_0 = 0$.

Второе условие периодичности (2.11) удобнее записать относительно новой величины ρ. Тогда уравнение (2.11) примет вид

$$\frac{1}{\sin\rho}\,\frac{\partial[F_1]}{\partial\rho} = 0$$

В случае соизмеримости а) это условие запишется так:

(3.1) $$\cos\rho\,\{(2\delta - 1) - 3[(2\delta - 1)\cos^2\theta d_{0,0}^{\circ} + \sin^2\theta d_{00}{}^2] + p[(2\delta - 1)\sin^2\theta d_{-2,2N}^{\circ} + {}^1/_2(1 - \cos\theta)^2 d_{2,2N}^2]\} = 0$$
$$(p = \cos 2g_0 = \pm 1)$$

Условие (3.1) выполняется, если $\rho = \pi/2$, при этом величины δ, e и θ могут иметь произвольные значения. Если получаем произвольное значение в интервале $(0, \pi / 2)$, то величины δ, e, θ связаны некоторым соотношением.

Если ввести новые параметры ε и μ, характеризующие отклонение эллипсоида инерции тела от шара по формулам $B = A(1 + \varepsilon)$, $C = A(1 + \mu)$, то придем к уравнению вида $f(\varepsilon, \mu, \theta) = 0$, анализ которого можно провести численными методами. Наконец, последнее условие существования периодических решений, близких к найденным порождающим, выполняется всегда. Его можно записать в явном виде и проверить непосредственно.

Поступила 22 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
2. *Баркин Ю. В.* Уравнения возмущенного вращательного движения твердого тела относительно центра масс. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1975, № 1.
3. *Kinoshita H.* Stationary motions of a triaxial body and their stabilities. Publs. Astron. Soc. Japan, 1972, vol. 24, No. 3.
4. *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 1. М., «Наука», 1971.