УДК 531.38

БЕЗНУТАЦИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА

П. М. Бурлака

(Донецк)

Исследуется решение Е. И. Харламовой [1] задачи о движении гиростата. Найдены условия существования безнутационных движений (при которых постоянен угол нутации) в этом решении.

Обзор основных результатов в задаче о безнутационных движениях дан в работе [2].

Е. И. Харламова указала решение, основываясь на выведенном ею интегро-дифференциальном уравнении [1]. Это уравнение получено из уравнений [3] в предположении, что центр тяжести и вектор гиростатического момента находятся в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки. Следуя работе [1], обозначим через a, a_1, a_2, b_1, b_2 компоненты гирационного тензора в специальных осях; λ, λ_1, λ_2 — компоненты гиростатического момента; ν, ν_1, ν_2 — компоненты единичного вектора, указывающего направление силы тяжести; x, y, z — компоненты кинетического момента; Γ — произведение веса гиростата и расстояния между центром тяжести и неподвижной точкой и примем условие Гесса ($a_2 = a_1$) и $b_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Для этой цели отнесем переменные x, y, z, ξ [1] и параметры λ, λ_1 к величине $\sqrt{\Gamma / b}$, а компоненты a, a_1 гирационного тензора к b. Тогда решение Е. И. Харламовой примет вид

$$x = \xi + a_1\lambda_1, \quad y = \frac{c_0}{\xi} + l + \xi\left(c_2 - \frac{a - a_1}{2}\right) \tag{1}$$

$$z^2 = \frac{1}{\xi^2}(m_4\xi^4 + m_3\xi^3 + m_2\xi^2 + m_1\xi - c_0^2)$$

$$\nu = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2, \quad \nu_1 = \frac{c_0c_1}{\xi} + s_0' + s_1'\xi + s_2'\xi^2$$

$$\nu_2 = z(c_1 + 2c_2\xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -\xi z$$

где

$$l = c_1 + \frac{a_1(a\mu - \lambda^*)}{aa_1 - 1}, \quad s_0 = \frac{1}{a_1}(c_1^2 + a_1c_1\lambda^* + 2c_0c_2) \tag{2}$$

$$s_0' = c_1^2 + c_1\mu + 2c_0c_2, \quad s_1 = \frac{1}{a_1^2 + 1}[6a_1c_1c_2 + c_1(a_1^2 + 1) +$$
$$+ 2a_1c_2(\mu + a_1\lambda^*)]$$

$$s_1' = \frac{1}{2(a_1^2 + 1)}[6c_1c_2(a_1^2 - 1) - c_1(a - a_1)(a_1^2 + 1) + 4a_1c_2(a_1\mu - \lambda^*)]$$

$$s_2 = \frac{c_2}{4 + a_1^2}[6a_1c_2 + (3a_1^2 - aa_1 + 4)], \quad s_2' = \frac{c_2}{4 + a_1^2}[2(a_1^2 - 2)c_2 -$$
$$-(2a + aa_1^2 - a_1^3)]$$

$$m_1 = -2c_0(c_1 + \mu)$$

$$m_2 = -\frac{c_0}{a_1(4 + a_1^2)}[4 - a_1(a - a_1)(3 + a_1^2) + 2a_1c_2(1 + a_1^2)] -$$
$$-\frac{1}{2a_1c_2(1 + a_1^2)}[c_1^2(1 + a_1^2) + 4a_1^2c_1c_2(2\lambda^* + a_1\mu) +$$
$$+ 2a_1^3c_2(\mu^2 + \lambda^{*2}) + 2a_1c_1^2c_2(4 + a_1^2)]$$

$$m_3 = \frac{1}{a_1^2+1}\{2c_1c_2(5-a_1^2)+c_1(a-a_1)(1+a_1^2)+$$
$$+2c_2[2a_1\lambda^*+\mu(1-a_1^2)]-(a_1^2+1)[2\lambda^*-\mu(a-a_1)]\}$$
$$m_4 = \frac{1}{4(4+a_1^2)}\{4(8-a_1^2)c_2^2+4[2a+a_1^2(a-a_1)]c_2-$$
$$-(4+a_1^2)[4+(a-a_1)^2]\}$$
$$c_1 = \frac{1}{(4+a_1^2)[6c_2+(a+a_1)]}\{2c_2[\mu(a_1^2-2)-a_1\lambda^*(2a_1^2+5)]+$$
$$+\lambda^*(3a_1^2-aa_1+4)+\mu(a_1^3-a_1^2a-2a)\}$$
$$6c_2 = 2\delta-(a+a_1), \quad \delta = \pm(a^2+a_1^2-aa_1+3)^{1/2}$$
$$\lambda^* = \lambda+a_1\lambda_1, \quad \mu = a_1\lambda+\lambda_1(a_1^2-aa_1+1)$$

Уравнение для определения величины c_0 таково:

$$Ac_0^2+Bc_0+C=0 \tag{3}$$
$$A = 8c_2^3(1+a_1^2)(4+a_1^2), \quad B = 2c_1c_2\ \{2c_1c_2(8-11a_1^2-a_1^4)+$$
$$+4a_1c_2(4+a_1^2)(\lambda^*-a_1\mu)+a_1c_1(1+a_1^2)[a_1(a_1-a)-4]\}$$
$$C = (4+a_1^2)\{c_1^4[2c_2(1-2a_1^2)-a_1(1+a_1^2)]+4a_1c_1^3c_2[\lambda^*(1-a_1^2)+$$
$$+a_1\mu]+2a_1^2c_1^2c_2(\lambda^{*2}+\mu^2)-2a_1^2c_2(1+a_1^2)\}$$

В отличие от работы [1] здесь указана явная зависимость величин m_2 и c_0 от основных параметров.

Отметим, что при $\lambda^*=0$, $\mu=0$ получим решение А. И. Докшевича [4], геометрическое истолкование которого методом годографов дано в работе [5].

Рассмотрим области изменения безразмерных параметров, в которых решение действительно. Так как изучается задача о движении гиростата, то неравенства треугольника, накладываемые на моменты инерции гиростата, отбрасываем. Из условий определенной положительности кинетической энергии гиростата вытекает $aa_1-1>0$. Из уравнения (3) следует второе ограничение на параметры: $B^2-4AC\geqslant 0$. Переменная ξ изменяется в промежутке, где правая часть выражения для z^2 из (1) неотрицательна.

Рассмотрим граничное значение функции z^2

$$m_4\xi^4+m_3\xi^3+m_2\xi^2+m_1\xi-c_0^2=0 \tag{4}$$

Дискриминант уравнения (4) имеет вид

$$G = g_2^3-27g_3^2,$$
$$g_2 = -m_4c_0^2-{}^1/_4m_1m_3+{}^1/_{12}m_2^2$$
$$g_3 = -{}^1/_{16}m_2m_4c_0^2+{}^1/_{48}m_1m_2m_3-{}^1/_{16}m_1^2m_4+{}^1/_{16}m_3^2c_0^2-{}^1/_{216}m_2^3$$

Выпишем неравенства

$$^1/_{16}m_3^2-{}^1/_6\,m_2m_4>0, \quad {}^3/_{16}m_3^4-m_2m_3^2m_4+m_2^2m_4^2+4m_4^3c_0^2+ \tag{5}$$
$$+m_1m_3m_4^2>0$$

характеризующие вместе с дискриминантом условие действительности корней уравнения (4). Условиями на параметры, при которых решение действительно, будут: 1) $G\geqslant 0$ и неравенства (5), 2) $G<0$.

Рассмотрим условия существования безнутационных движений относительно вертикали в данном решении. Равенство $\alpha\nu+\beta\nu_1+\gamma\nu_2=\alpha_0$, где α, β, γ, α_0 — постоянные, является необходимым и достаточным условием таких движений. В данном случае будет постоянен угол между вектором $\mathbf{v}$, (ν, ν_1, ν_2) и вектором $\mathbf{e}\,(\alpha, \beta, \gamma)$, неизменно связанным с телом. Подставим ν, ν_1, ν_2 из (1) в последнее соотношение и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по ξ. Используя неравенство

$$m_4 = -\frac{1}{4+a_1^2}[(a+c_1')^2+(1+a_1c_2')^2]<0, \quad c_2' = c_2 - \frac{a-a_1}{2}$$

найдем

(6) $$\gamma = 0, \quad c_0c_1 = 0, \quad \alpha s_2 + \beta s_2' = 0, \quad \alpha s_1 + \beta s_1' = 0, \quad \alpha_0 = \alpha s_0 + \beta s_0'$$

Рассмотрим условие, вытекающее из третьего и четвертого уравнений (6)

(7) $$s_1's_2 - s_1s_2' = 0$$

После подстановки сюда s_1, s_2, s_1', s_2' из (2) получим

$$2c_2(a_1^2+1)(a_1\lambda^* - 2\mu) - 2\mu(a_1^3 + a_1 + a) + \lambda^*(a_1^4 - a_1^3a + 3a_1^2 - 3aa_1 + 4) = 0$$

или после преобразований

(8) $$2c_2[3a_1\tau - \sigma(a_1^2-2)] + \sigma(2a + aa_1^2 - a_1^3) + \tau(3a_1^2 - aa_1 + 4) = 0$$

$$\sigma = \mu + a_1\lambda^*, \quad \tau = a_1\mu - \lambda^*$$

Нетрудно показать, что решение τ/σ уравнения (8) можно представить в следующем виде: $2\tau/\sigma = (a_1 - a) - 2c_2$. После подстановки сюда c_2 из (2) получим

(9) $$3\tau/\sigma = (2a_1 - a) - \delta$$

При этом значении τ/σ имеем $c_1 = 0$. Тем самым показано, что условие (7) влечет за собой равенство нулю коэффициента c_1, и уравнение $c_0c_1 = 0$ выполняется.

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования безнутационных движений в изучаемом решении является лишь соотношение (9).

Покажем, что при условии (9) существуют такие значения безразмерных параметров a, a_1, σ, τ, при которых решение (2) действительно. Пусть $a = 2$, $a_1 = 2$, $\sigma = 4$, $\delta = -2.65$. Тогда $c_2 = -1.55$, $c_0 = -0{,}64$, $g_2 = 3.38$, $g_3 = 1.21$. При этих значениях параметров $G > 0$ и выполняются неравенства (5), и, следовательно, уравнение (4) имеет четыре действительных корня. Это показывает, что безнутационное движение физически реализуемо.

Автор благодарит П. В. Харламова за постановку задачи и руководство работой.

Поступила 2 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламова Е. И.* Об алгебраическом инвариантном соотношении интегро-дифференциального уравнения задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, при условиях Гесса. В кн.: Механика твердого тела, вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. *Горр Г. В.* Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
3. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела, ч. I. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
4. *Докшевич А. И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 11.
5. *Бурлака П. М., Горр Г. В.* Движение твердого тела в одном частном случае интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона. В кн.: Механика твердого тела, вып. 7. Киев, «Наукова думка», 1974.